УДК 621.3.011.74.005

Н.А.Шидловська, член-кор. НАН України, **О.П.Кравченко**, канд.техн.наук (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ), **В.Г.Самойленко**, докт.фіз.-мат.наук, **В.В.Потороча** (Київський національний ун-т ім. Т.Шевченка)

Новий алгоритм дослідження процесів в нелінійних розрядних колах

Запропоновано алгоритм розв'язання нелінійного диференціального рівняння, що описує процеси в нелінійному розрядному колі. Перевагою запропонованої методики є можливість аналізувати як коливальний, так і аперіодичний розряд конденсатора.

Предложен алгоритм решения нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает процессы в нелинейной разрядной цепи. Преимущество предложенной методики заключается в возможности анализа как колебательного, так и апериодического разряда конденсатора.

Останнім часом, завдяки підвищенню вимог до технічних характеристик електротехнічних та електроенергетичних пристроїв та систем постає необхідність в урахуванні нелінійності характеристик елементів таких систем. Оскільки одним з найпоширеніших структурних елементів означених систем є розрядне коло, аналіз перебігу процесів у ньому набуває особливого значення. Лінеаризація нелінійних характеристик у зазначених колах спричиняє виникнення помилки [2] і такий підхід часто невиправданий. В свою чергу, врахування нелінійності призводить до необхідності розв'язання нелінійних диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних та алгебраїчних рівнянь, точний розв'язок яких найчастіше невідомий.

Дана робота присвячена розвитку алгоритмів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, що описують процеси в колі послідовного з'єднання лінійних конденсатора C і опору R та нелінійної індуктивності, характеристика якої описується співвідношенням [5]

$$\Psi = L_0\, dq/dt - \varepsilon \left(dq/dt\right)^3, \tag{1}$$

де L_0 — індуктивність, що відповідає лінійному випадку; $q=q(t)$ — заряд конденсатора в момент часу t; ε — малий параметр.

При вивченні процесів в означеному колі за допомогою методу малого параметру [1] та методу усереднення Боголюбова [3, 4] було показано, що процеси у ньому описуються диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L_0}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{L_0C}=\varepsilon\left[-\frac{3R}{L_0^2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^3-\frac{3q}{L_0^2C}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Розглянемо алгоритм розрахунку процесів в слабко нелінійних розрядних колах з втратами, який можна застосувати для знаходження наближених розв'язків рівняння вигляду (2).

Для перетворення диференціального рівняння другого порядку (2) в систему двох рівнянь першого порядку виконаємо заміну змінних

$$q=x_1, \quad dq/dt=x_2. \tag{3}$$

Тоді рівняння (2) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &dx_1/dt=x_2, \\ &dx_2/dt=-\omega^2x_1-2\delta x_2-\varepsilon\omega^2 r x_2^2 x_1-2\varepsilon\delta r x_2^2, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\omega^2=(L_0C)^{-1}$; $2\delta=R/L_0$; $r=3/L_0$. (5)

Систему (4) подамо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0 & 0\\ \omega^2 & 2\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-rx_2^2x_1\\ -rx_2^3\end{pmatrix} \tag{6}$$

і виконаємо в ній заміну змінних

$$x = y_1 + y_2, \quad dx/dt = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$

або

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2. \qquad (7)$$

Тут $\lambda_1 = -\delta - (\delta^2 - \omega^2)^{0.5}$, $\lambda_2 = -\delta + (\delta^2 - \omega^2)^{0.5}$ — характеристичні числа незбуреної (при $\varepsilon = 0$) системи (6).

Тоді з (4) одержимо

$$dy_1/dt + dy_2/dt = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$

$$\lambda_1 dy_1/dt + \lambda_2 dy_2/dt = -\omega^2 \left(y_1 + y_2\right) -$$

$$-2\delta\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) - \varepsilon r\left[\omega^2\left(y_1 + y_2\right)\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2\delta\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^3\right]. \qquad (8)$$

З (8) знаходимо похідні для y_1, y_2:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{-\left(\omega^2 + 2\delta\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2\right)y_1 -\right.$$

$$-\left(\omega^2 + 2\delta\lambda_2 + \lambda_2^2\right)y_2 - \varepsilon r\left[\omega^2\left(y_1 + y_2\right)\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^2 +\right.$$

$$\left.\left. + 2\delta\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^3\right]\right\},$$

(9)

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{\left(\omega^2 + 2\delta\lambda_1 + \lambda_1^2\right)y_1 + \left(\omega^2 + 2\delta\lambda_2 + \lambda_1^2\right)y_2 +\right.$$

$$+\varepsilon r\left[\omega^2\left(y_1 + y_2\right)\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^2 +\right.$$

$$\left.\left. + 2\delta\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^3\right]\right\}.$$

Цю систему можна записати у матричному вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \varepsilon r H(y), \qquad (10)$$

де $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;

$$H(y) = \begin{pmatrix} -A \\ A \end{pmatrix},$$

де $A = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^{-1}\left[\omega^2\left(y_1 + y_2\right)\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^2 +\right.$

$$\left. + 2\delta\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^3\right].$$

Розв'язок системи (10) будемо шукати у вигляді

$$y = \varphi(t, z) = \begin{pmatrix} U(t, z) \\ V(t, z) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

де z — нова невідома вектор-функція змінної t.

Функції $U(t, z)$ та $V(t, z)$ зобразимо наступним чином:

$$U(t, z) = u_{11}z_1 + u_{12}z_2 + u_{21}z_1^2 + u_{22}z_1z_2 + u_{23}z_2^2 +$$

$$+ u_{31}z_1^3 + u_{32}z_1^2z_2 + u_{33}z_1z_2^2 + u_{34}z_2^3 + \ldots,$$

(12)

$$V(t, z) = v_{11}z_1 + v_{12}z_2 + v_{21}z_1^2 + v_{22}z_1z_2 + v_{23}z_2^2 +$$

$$+ v_{31}z_1^3 + v_{32}z_1^2z_2 + v_{33}z_1z_2^2 + v_{34}z_2^3 + \ldots,$$

де $u_{11}, v_{11}, \ldots, u_{34}, v_{34}, \ldots$ — деякі невідомі функції, залежні від змінної t, явний вигляд яких визначається рекурентним чином.

Враховуючи те, що

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

або

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt},$$

(13)

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt},$$

система (10) перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\dot{z} = W\varphi + \varepsilon H(\varphi). \qquad (14)$$

Рівняння (14) подамо у еквівалентному вигляді таким чином:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\dot{z} - Wz\right) = W\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}Wz + \varepsilon H(\varphi). \qquad (15)$$

Ця система з двох рівнянь містить чотири невідомих функції: $z_1(t), z_2(t), U(t, z), V(t, z)$. Тому будемо вважати, що вектор-функція z є розв'язком рівняння

$$\dot{z} - Wz = 0. \qquad (16)$$

Тоді рівняння (14) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = W\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}Wz + \varepsilon H(\varphi). \qquad (17)$$

З урахуванням того, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \partial U/\partial t \\ \partial V/\partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

де

$$B = \frac{du_{11}}{dt}z_1 + \frac{du_{12}}{dt}z_2 + \frac{du_{21}}{dt}z_1^2 + \frac{du_{22}}{dt}z_1z_2 + \frac{du_{23}}{dt}z_2^2 + \ldots$$

$$D=\frac{dv_{11}}{dt}z_1+\frac{dv_{12}}{dt}z_2+\frac{dv_{21}}{dt}z_1^2+\frac{dv_{22}}{dt}z_1z_2+\frac{dv_{23}}{dt}z_2^2+\ldots,$$

(17) набуває вигляду:

$$\frac{du_{11}}{dt}z_1+\frac{du_{12}}{dt}z_2+\frac{du_{21}}{dt}z_1^2+\frac{du_{22}}{dt}z_1z_2+\frac{du_{23}}{dt}z_2^2+\ldots=$$

$$=\lambda_1\left(u_{11}z_1+u_{12}z_2+u_{21}z_1^2+u_{22}z_1z_2+u_{23}z_2^2+\ldots\right)-$$

$$-\left(\lambda_1\frac{\partial U}{\partial z_1}z_1+\lambda_2\frac{\partial U}{\partial z_2}z_2\right)-\varepsilon r\frac{1}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left[\omega^2\left(y_1+y_2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\right)^2+2\delta\left(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\right)^3\right],\qquad(19)$$

$$\frac{dv_{11}}{dt}z_1+\frac{dv_{12}}{dt}z_2+\frac{dv_{21}}{dt}z_1^2+\frac{dv_{22}}{dt}z_1z_2+\frac{dv_{23}}{dt}z_2^2+\ldots=$$

$$=\lambda_2\left(v_{11}z_1+v_{12}z_2+v_{21}z_1^2+v_{22}z_1z_2+v_{23}z_2^2+\ldots\right)-$$

$$-\left(\lambda_1\frac{\partial V}{\partial z_1}z_1+\lambda_2\frac{\partial V}{\partial z_2}z_2\right)+\varepsilon r\frac{1}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left[\omega^2\left(y_1+y_2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\right)^2+2\delta\left(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\right)^3\right].\qquad(20)$$

З (16) знаходимо z_1, z_2:

$$z_1=C_1e^{\lambda_1t},\qquad z_2=C_2e^{\lambda_2t},\qquad(21)$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування, які визначаються з відповідних початкових умов.

Підставляючи (12) в рівняння (19) і (20) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z_1, z_2, маємо

$$du_{11}/dt=0,\qquad du_{12}/dt=\left(\lambda_1-\lambda_2\right)u_{12},$$
$$dv_{11}/dt=\left(\lambda_2-\lambda_1\right)v_{11},\qquad dv_{12}/dt=0.\qquad(22)$$

Для цих функцій виберемо наступні значення:

$$u_{11}=1,\quad u_{12}=0,\quad v_{11}=0,\quad v_{12}=1.\qquad(23)$$

Аналогічно визначимо функції $u_{21}-u_{23}$ та $v_{21}-v_{23}$ із наступних систем:

$$du_{21}/dt=-\lambda_1u_{21},\qquad du_{22}/dt=-\lambda_2u_{22},$$
$$du_{23}/dt=\left(\lambda_1-2\lambda_2\right)u_{23},$$

$$dv_{21}/dt=\left(\lambda_2-2\lambda_1\right)v_{21},\qquad dv_{22}/dt=-\lambda_1v_{22},\qquad(24)$$
$$dv_{23}/dt=-\lambda_2u_{23}.$$

Розв'язками цих диференціальних рівнянь можемо вибрати функції

$$u_{21}=u_{22}=u_{23}=0,\quad v_{21}=v_{22}=v_{23}=0.\qquad(25)$$

Для функцій $u_{31}-u_{34}$ та $v_{31}-v_{34}$ маємо наступні системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_{31}}{dt}=-2\lambda_1u_{31}+\frac{\varepsilon r\lambda_1^4}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{dv_{31}}{dt}=\left(\lambda_2-3\lambda_1\right)v_{31}-\frac{\varepsilon r\lambda_1^4}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{du_{32}}{dt}=-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)u_{32}+\frac{2\varepsilon r\lambda_1^3\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{dv_{32}}{dt}=-2\lambda_1v_{32}-\frac{2\varepsilon r\lambda_1^3\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{du_{33}}{dt}=-2\lambda_2u_{33}+\frac{2\varepsilon r\lambda_1\lambda_2^3}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{dv_{33}}{dt}=-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)v_{33}-\frac{2\varepsilon r\lambda_1\lambda_2^3}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{du_{34}}{dt}=\left(\lambda_1-3\lambda_2\right)u_{34}+\frac{\varepsilon r\lambda_2^4}{\lambda_1-\lambda_2},\\
&\frac{dv_{34}}{dt}=-\lambda_2v_{34}-\frac{\varepsilon r\lambda_2^4}{\lambda_1-\lambda_2}.
\end{aligned}\qquad(26)$$

Частинними розв'язками цих диференціальних рівнянь є функції

$$u_{31}=\frac{\varepsilon r\lambda_1^3}{2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)},\qquad u_{32}=\frac{2\varepsilon r\lambda_1^3\lambda_2}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)},$$

$$u_{33}=\frac{\varepsilon r\lambda_1\lambda_2^2}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)},\qquad u_{34}=\frac{\varepsilon r\lambda_2^4}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(3\lambda_2-\lambda_1\right)}.$$

$$v_{31}=\frac{\varepsilon r\lambda_1^4}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\lambda_2-3\lambda_1\right)},\quad v_{32}=-\frac{2\varepsilon r\lambda_1^2\lambda_2}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)},\qquad(27)$$

$$v_{33}=-\frac{2\varepsilon r\lambda_1\lambda_2^3}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)},\qquad v_{34}=-\frac{\varepsilon r\lambda_2^3}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}.$$

Підставляючи у (12) співвідношення (23), (25), (27) та враховуючи заміну (7), одержимо наближений розв'язок для системи рівнянь (4)

$$x_1(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}-\frac{\varepsilon r\lambda_1^3}{2\left(\lambda_2-3\lambda_1\right)}C_1^3e^{3\lambda_1 t}-$$

$$-\frac{2\varepsilon r\lambda_1^2\lambda_2^2}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}C_1^2\,C_2e^{(2\lambda_1+\lambda_2)t}+\frac{\varepsilon r\lambda_1\lambda_2^2}{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)}C_1\times$$

$$\times C_2^2e^{(\lambda_1+2\lambda_2)t}-\frac{\varepsilon r\lambda_2^3\left(\lambda_1-2\lambda_2\right)}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\lambda_1-3\lambda_2\right)}C_2^3e^{3\lambda_2 t}, \qquad (28)$$

$$x_2(t)=\lambda_1C_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2C_2e^{\lambda_2 t}-\frac{3\varepsilon r\lambda_1^4}{\left(\lambda_2-3\lambda_1\right)}C_1^3e^{3\lambda_1 t}+$$

$$+\frac{2\varepsilon r\lambda_1^2\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_2^2\right)}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}C_1^2\,C_2e^{(2\lambda_1+\lambda_2)t}+$$

$$+\frac{\varepsilon r\lambda_1\lambda_2^2\left(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2^2\right)}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}C_1C_2^2\,e^{(\lambda_1+2\lambda_2)t}-$$

$$-\frac{\varepsilon r\lambda_2^4\left(2\lambda_1-3\lambda_2\right)}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\lambda_1-3\lambda_2\right)}C_2^3e^{3\lambda_2 t}. \qquad (29)$$

Сталі інтегрування будемо знаходити у вигляді степеневого ряду за степенями малого параметру ε:

$$C_1=C_{10}+\varepsilon C_{11}+\ldots,$$
$$C_2=C_{20}+\varepsilon C_{21}+\ldots. \qquad (30)$$

Початковими умовами є

$$x_1\,|_{t=0}=Q, \qquad x_2\,|_{t=0}=0. \qquad (31)$$

Підставляючи співвідношення (31) і (32) в рівняння (29), (30) та використовуючи метод малого параметру, остаточно для сталих інтегрування маємо

$$C_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}Q+\frac{\varepsilon r\lambda_1^3\lambda_2^3Q^3}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^4}\left[\frac{\lambda_2+6\lambda_1}{2\left(\lambda_2-3\lambda_1\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-3\lambda_2}+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right]+\ldots, \qquad (32)$$

$$C_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}Q+\frac{\varepsilon r\lambda_1^3\lambda_2^3Q^3}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^4}\left[\frac{5\lambda_1}{2\left(\lambda_2-3\lambda_1\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+1\right]+\ldots. \qquad (33)$$

Таким чином, запропоновано новий алгоритм розрахунку процесів в слабко нелінійних колах з втратами, який можна застосувати для знаходження наближених розв'язків рівняння вигляду (2). Деяка складність запропонованого алгоритму полягає в необхідності визначення відповідних сталих інтегрування C_1, C_2 при заданих початкових умовах з деяких нелінійних співвідношень. Запропонована методика, попри складність визначення сталих інтегрування, має значну перевагу — при аналізі не накладається ніяких умов щодо характеристичного рівняння (методика дає можливість за однаковим алгоритмом обчислювати як аперіодичний, так і коливальний розряд конденсатора). Оскільки при використанні методики шляхом спеціальної заміни відбувається перехід від нелінійного диференціального рівняння до системи лінійних диференціальних рівнянь, це робить можливим розв'язання більшості нелінійних диференціальних рівнянь з вибраною точністю (залежно від вибраних замін), що і є основною перевагою означеного методу.

1. *Шидловська Н.А.* Аналіз нелінійних електричних кіл методом малого параметру. — Київ. ІЕД. 1999. — 192 с.

2. *Шидловська Н.А., Кравченко О.П.* Аналіз помилки, що виникає в разі заміни нелінійної індуктивності лінійною при резонансі напруг // Праці ІЕД НАНУ. Електроенергетика. — 2005. — № 3(12). — С. 3—8.

3. *Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Кучерява І.М. та ін* Застосування методу усереднення Боголюбова до аналізу процесів в нелінійних коливальних колах з втратами // Техн.електродинаміка. Тем.вип. "Проблеми сучасної електротехніки". — 2006. — Ч. 2. — С. 3—6.

4. *Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Самойленко В.Г.* Аналіз нелінійного кола за допомогою методу усереднення Боголюбова // Доповіді НАНУ. — 2006. — № 6. — С. 88—92.

5. *Филиппов Е.* Нелинейная электротехника. — М.: Энергия, 1976. — 496 с.

Надійшла 05.04.2007