

Метод СЛАУ расчета статических плоскопараллельных полей в кусочно-однородных средах (вторичные источники: простой слой зарядов; кусочно-постоянная и кусочно-линейная аппроксимации)

Для расчета магнитного поля в кусочно-однородной среде при кусочно-постоянной и кусочно-линейной аппроксимациях плотности магнитных зарядов предлагается вывод системы линейных алгебраических уравнений путем применения принципа непрерывности магнитного потока в интегральной форме. Это позволяет существенно увеличить точность расчета поля при весьма малом количестве разбиений границы. Уменьшается также время счета. Метод применим для расчета любых других статических плоскопараллельных полей.

Для розрахунку магнітного поля в кусково-однорідному середовищі при кусково-постійній та кусково-лінійній апроксимаціях щільності магнітних зарядів пропонується виведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом застосування принципу безперервності магнітного потоку в інтегральній формі. Це дозволяє істотно збільшити точність розрахунку поля при вельми малій кількості розбиття межі. Зменшується також час розрахунку. Метод застосовний для розрахунку будь-яких інших статичних плоскопаралельних полів.

В методе интегральных уравнений (ИУ) расчета статических полей в кусочно-однородных средах при неизбежном переходе от ИУ к их конечномерному аналогу — системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) количество точек, в которых требуется выполнение граничного условия (точек коллокации), обычно берется таким же, как и количество элементов разбиения. Точки коллокации выбираются, как правило, в центре отрезков разбиения. При разумном количестве элементов разбиения и весьма точном решении получившейся СЛАУ, ее решение сильно отличается от решения ИУ, т.е. от истинного решения задачи. При расчете поля с использованием результатов решения этой СЛАУ погрешность еще больше (см. пример расчета в конце статьи).

Для устранения этого недостатка в данной работе предлагается вместо граничного условия в точке (например, $B_n^+(Q) = B_n^-(Q)$) использовать интегральное соотношение ($\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$), которое записывается для боковой поверхности цилиндра, охватывающего данный отрезок разбиения (плоскопараллельный случай). При этом сразу непосредственно получаем СЛАУ, даже не записывая ИУ.

Условие $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ является более информативным по сравнению с условием $B_n^+(Q) = B_n^-(Q)$, где Q — фиксированная точка на отрезке разбиения, ближе к истинному условию $B_n^+(P) = B_n^-(P)$ для всех точек P отрезка разбиения, поэтому решение предлагаемой СЛАУ ближе к решению ИУ по сравнению с решением СЛАУ,

получающейся непосредственно из ИУ стандартным способом.

Авторами обнаружено, что выведенная СЛАУ с использованием условия $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ может быть получена, правда, нетривиальным способом из ИУ. Но мы оставляем на первом месте вывод СЛАУ из условия $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ по следующим двум причинам.

Во-первых, пользователь может и не знакомиться с выводом и теорией ИУ, во-вторых, лучшие свойства предлагаемой СЛАУ понятны из того, что условие $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ "лучше" условия $B_n^+(Q) = B_n^-(Q)$.

В [4] условие $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ использовалось один или несколько раз для поверхности, охватывающей несколько элементов. При этом получалось одно или несколько дополнительных уравнений к стандартной СЛАУ, вытекающей непосредственно из ИУ. Решение получающейся переопределенной СЛАУ было также ближе к решению ИУ по сравнению с решением стандартной СЛАУ (без указанных дополнительных уравнений). Предлагаемая в данной работе СЛАУ дает еще больший эффект.

Рассмотрим вывод СЛАУ на примере плоскопараллельного магнитного поля, возмущенного бесконечно длинным цилиндром произвольной формы сечения с магнитной проницаемостью μ (рис.1). Выделим k -й элемент разбиения ($k=1, \dots, N$). Его длина — Δl_k , внешняя единичная нормаль \vec{n}_k . В соответствии с принципом непрерывности магнитного потока (рис.1) получим

$$\int_{\Delta_k^-} \vec{B}^- \vec{n}_k dl - \int_{\Delta_k^+} \vec{B}^+ \vec{n}_k dl = 0. \quad (1)$$

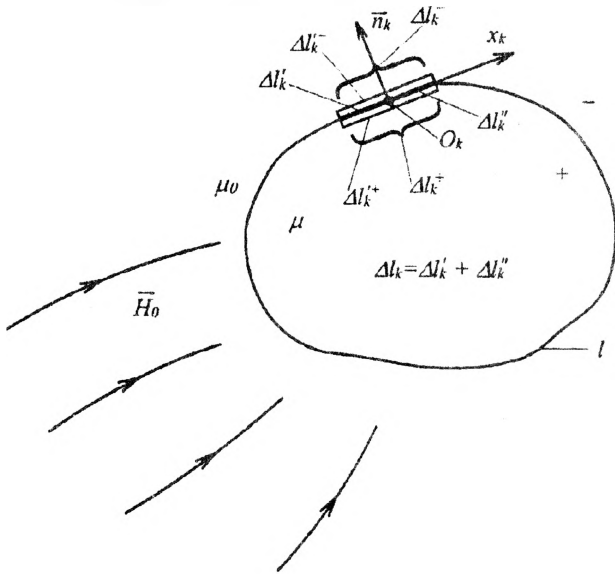


Рис. 1

Для индукций \vec{B}^- и \vec{B}^+ в точках соответственно отрезков Δ_k^- и Δ_k^+ (эти отрезки бесконечно близки друг к другу) можно записать выражения:

$$\vec{B}^- = \mu_0 \vec{H}^- = \mu_0 (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma_k}^- + \vec{H}_{\sigma}^-); \quad (2)$$

$$\vec{B}^+ = \mu \vec{H}^+ = \mu (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma_k}^+ + \vec{H}_{\sigma}^+), \quad (3)$$

где \vec{H}_0 — напряженность первичного магнитного поля, \vec{H}_{σ_k} — напряженность, обусловленная зарядами полосы $\Delta_k \cdot \infty$ с поверхностной плотностью σ_k , (σ_k , вообще говоря, зависит от координаты вдоль Δ_k), \vec{H}_{σ} — напряженность, обусловленная всеми остальными зарядами на боковой поверхности цилиндра.

Подставляя в (1) выражения (2) и (3), получим (для всех $k=1, \dots, N$)

$$\mu_0 \int_{\Delta_k^-} (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma_k}^- + \vec{H}_{\sigma}^-) \vec{n}_k dl - \mu \int_{\Delta_k^+} (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma_k}^+ + \vec{H}_{\sigma}^+) \vec{n}_k dl = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы выразить $\int_{\Delta_k^-} \vec{H}_{\sigma_k}^- \vec{n}_k dl$ и $\int_{\Delta_k^+} \vec{H}_{\sigma_k}^+ \vec{n}_k dl$ через σ_k , необходимо остановиться на какой-либо аппроксимации функции σ_k . Вначале рассмотрим кусочно-постоянную аппроксимацию, т.е. будем считать $\sigma_k = \text{const}$. Тогда в силу симметрии и с учетом выбранной аппроксимации имеем

$$\int_{\Delta_k^-} \vec{H}_{\sigma_k}^- \vec{n}_k dl = - \int_{\Delta_k^+} \vec{H}_{\sigma_k}^+ \vec{n}_k dl = \frac{1}{2} \int_{\Delta_k^- + \Delta_k^+} \vec{H}_{\sigma_k} \vec{n}_k dl = \frac{\sigma_k \Delta l_k}{2}. \quad (5)$$

Теперь из (4) и (5) получаем:

$$(\mu_0 - \mu) \int_{\Delta_k} (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma}) \vec{n}_k dl + (\mu_0 + \mu) \sigma_k \Delta l_k / 2 = 0. \quad (6)$$

Представим \vec{H}_{σ} в виде суммы $\vec{H}_{\sigma} = \sum_{i=1, i \neq k}^{\infty} \vec{H}_i$, где \vec{H}_i — напряженность магнитного поля, обусловленная i -м элементом в точках элемента Δ_k .

В силу линейности среды (воздух) можно записать

$$\vec{H}_i = \sigma_i \vec{h}_i'', \quad (7)$$

где \vec{h}_i'' — напряженность магнитного поля в точках элемента Δ_k , обусловленная единичной плотностью заряда на элементе Δ_i .

Если обозначить

$$\frac{2(\mu - \mu_0)}{(\mu + \mu_0) \Delta l_k} \int_{\Delta_k} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl = a_{ki}, \quad (8)$$

$$\frac{2(\mu - \mu_0)}{(\mu + \mu_0) \Delta l_k} \int_{\Delta_k} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl = b_k,$$

то с учетом (7) из (6) получаем СЛАУ:

$$\sigma_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N a_{ki} \sigma_i + b_k, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Как было замечено, СЛАУ (9) можно получить также из ИУ, которое в данном случае имеет вид [6]:

$$\sigma(Q) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \left[\frac{1}{\pi} \int_l \sigma(P) \frac{(\vec{r}_{PQ} \vec{h}_Q^0)}{r_{PQ}^2} dl_P + 2H_{0n}(Q) \right]. \quad (10)$$

Здесь $H_{0n}(Q)$ — нормальная компонента напряженности первичного магнитного поля; σ — поверхностная плотность магнитных зарядов.

Используя кусочно-постоянную аппроксимацию искомой функции, вместо (10) можно записать

$$\sigma(Q) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i \int_{\Delta_i} \frac{(\vec{r}_{PQ} \vec{h}_Q^0)}{r_{PQ}^2} dl_P + 2H_{0n}(Q) \right]. \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) по отрезку Δ_k

$$\sigma_k \Delta l_k = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i \int_{\Delta l_k} \vec{n}_k \int_{\Delta l_i} \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^2} dl_p dl_Q + \right. \\ \left. + 2 \int_{\Delta l_k} H_0(Q) \vec{n}_k dl_Q \right]. \quad (12)$$

Учитывая, что $(2\pi)^{-1} \int_{\Delta l_i} (\vec{r}_{PQ} / r_{PQ}^2) dl_p = \vec{h}_i''(Q)$,

вместо (12) можно записать

$$\sigma_k = \frac{2(\mu - \mu_0)}{\Delta l_k (\mu + \mu_0)} \left[\sum_{i=1, i \neq k}^N \sigma_i \int_{\Delta l_k} \vec{n}_k \vec{h}_i''(Q) dl_p dl_Q + \right. \\ \left. + \int_{\Delta l_k} \vec{H}_0(Q) \vec{n}_k dl_Q \right],$$

что совпадает со СЛАУ (9).

В [3] методом интегрирования по элементам получена СЛАУ для источников в виде простого слоя токов (метод полного осреднения).

Можно показать, что из СЛАУ (9) следует условие

$$\mu_0 \int_{i=1}^N \sigma_i \Delta l_i = 0. \quad (13)$$

Как известно, из стандартного ИУ (10) следует

$$\int_l \sigma dl = 0, \quad (14)$$

т.е. (13) является конечномерным аналогом известного соотношения (14).

Ниже, для конкретной магнитной системы, будет показано, что при замене последнего уравнения СЛАУ (9) уравнением (13) существенно увеличивается скорость сходимости итерационного процесса решения СЛАУ.

Рассмотрим теперь кусочно-линейную аппроксимацию искомой плотности магнитного заряда, т.е.

$$\sigma_k = \frac{\sigma_k'' - \sigma_k'}{\Delta l_k} x_k + \frac{\sigma_k'' + \sigma_k'}{2}. \quad (15)$$

Здесь координата x_k отсчитывается от середины отрезка Δl_k . Ось x_k условимся направлять вправо, если смотреть по направлению нормали \vec{n}_k (рис.1). Величины σ_k' и σ_k'' в (15) — значения соответственно на левом и правом концах отрезка Δl_k .

Так как при разбиении линии l , ограничивающей магнетик, на N элементарных отрезков число неизвестных будет равно $2N$, то каждому отрезку Δl_k должно соответствовать два уравнения. Одно из

них получится, если записать принцип непрерывности магнитного потока для боковой поверхности цилиндра, охватывающего левую половину полоски $\Delta l_k \cdot 1$, а именно $\Delta l_k' \cdot 1$, а второе — $\Delta l_k'' \cdot 1$ (рис.1).

Так как в силу симметрии поля зарядов отрезка $\Delta l_k'$

$$\int_{\Delta l_k'} \vec{H}_{\sigma_k}^- \vec{n}_k dl = - \int_{\Delta l_k'} \vec{H}_{\sigma_k}^+ \vec{n}_k dl = \frac{1}{2} \int_{\Delta l_k' + \Delta l_k''} \vec{H}_{\sigma_k} \vec{n} dl = \\ = \Delta l_k (3\sigma_k' + \sigma_k'') / 16, \quad (16)$$

то по аналогии с (6) получим

$$(\mu_0 - \mu) \int_{\Delta l_k'} (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma}) \vec{n}_k dl + \\ + (\mu_0 + \mu) \Delta l_k (3\sigma_k' + \sigma_k'') / 16 = 0. \quad (17)$$

Аналогично (для правой половины полоски $\Delta l_k \cdot 1$, т.е. $\Delta l_k'' \cdot 1$) получим

$$(\mu_0 - \mu) \int_{\Delta l_k''} (\vec{H}_0 + \vec{H}_{\sigma}) \vec{n}_k dl + \\ + (\mu_0 + \mu) \Delta l_k (\sigma_k' + 3\sigma_k'') / 16 = 0. \quad (18)$$

Представим \vec{H}_{σ} в выражениях (17) в виде: $\vec{H}_{\sigma} = \sum_{i=1, i \neq k} \vec{H}_i$, где \vec{H}_i — напряженность магнитного поля, обусловленная i -м отрезком, в точках отрезка $\Delta l_k'$.

\vec{H}_i , очевидно, можно записать в виде

$$\vec{H}_i(Q) = \frac{\sigma_i'' - \sigma_i'}{\Delta l_i} \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta l_i} x_i \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^2} dl_p + \frac{\sigma_i'' + \sigma_i'}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta l_i} \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^2} dl_p = \\ = \frac{\sigma_i'' - \sigma_i'}{\Delta l_i} \vec{h}_i''(Q) + \frac{\sigma_i'' + \sigma_i'}{2} \vec{h}_i''(Q). \quad (19)$$

В связи с этим последнее слагаемое в (17) можно записать таким образом:

$$(\mu_0 - \mu) \int_{\Delta l_k'} \vec{H}_{\sigma} \vec{n}_k dl = (\mu_0 - \mu) \left\{ \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\sigma_i'' - \sigma_i'}{\Delta l_i} \int_{\Delta l_k'} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl + \right. \\ \left. + \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\sigma_i'' + \sigma_i'}{2} \int_{\Delta l_k'} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl \right\}. \quad (20)$$

В такой же форме можно записать последнее слагаемое в (18). В результате приходим к следующей СЛАУ:

$$A_{kk}\sigma_k' + B_{kk}\sigma_k'' + \sum_{i=1, i \neq k}^N A_{ki}'(\sigma_i'' - \sigma_i') + \sum_{i=1, i \neq k}^N B_{ki}'(\sigma_i'' + \sigma_i') = C_k', \quad (21)$$

$$B_{kk}\sigma_k' + A_{kk}\sigma_k'' + \sum_{i=1, i \neq k}^N A_{ki}''(\sigma_i'' - \sigma_i') + \sum_{i=1, i \neq k}^N B_{ki}''(\sigma_i'' + \sigma_i') = C_k'',$$

$$k=1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$A_{kk} = 3(\mu_0 + \mu)\Delta l_k / 16; \quad B_{kk} = (\mu_0 + \mu)\Delta l_k / 16;$$

$$A_{ki}' = \frac{(\mu_0 - \mu)}{\Delta l_i} \int_{\Delta l_i'} \vec{n}_i' \vec{n}_k' dl; \quad B_{ki}' = \frac{(\mu_0 - \mu)}{2} \int_{\Delta l_i'} \vec{n}_i' \vec{n}_k' dl;$$

$$A_{ki}'' = \frac{(\mu_0 - \mu)}{\Delta l_i} \int_{\Delta l_i''} \vec{n}_i'' \vec{n}_k'' dl; \quad B_{ki}'' = \frac{(\mu_0 - \mu)}{2} \int_{\Delta l_i''} \vec{n}_i'' \vec{n}_k'' dl; \quad (22)$$

$$C_k' = (\mu - \mu_0) \int_{\Delta l_k'} H_0 \vec{n}_k' dl; \quad C_k'' = (\mu - \mu_0) \int_{\Delta l_k''} H_0 \vec{n}_k'' dl.$$

По аналогии с уравнением (13) для кусочно-линейной аппроксимации можно получить уравнение

$$\frac{\mu_0}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i' + \sigma_i'') \Delta l_i = 0. \quad (23)$$

СЛАУ (21) также, как и СЛАУ (9), может быть получена из ИУ (10).

В качестве примера рассмотрим магнитную систему (МС), создающую плоскопараллельное магнитное поле в зазоре (рис. 2). Материал, из которого выполнена МС, обладает однородной и постоянной магнитной проницаемостью, равной $1000\mu_0$. Источником первичного магнитного поля в данной МС являются два бесконечно длинных прямолинейных проводника с током $i=1$ А. Рабочей областью данной МС является участок L в зазоре (рис. 2).

Расчет магнитного поля данной МС проводим с использованием СЛАУ (9), СЛАУ, получающейся из ИУ (10) стандартным способом, а также СЛАУ (21).

Используя кусочно-постоянную аппроксимацию плотности заряда для ИУ (10), получаем соответствующую СЛАУ:

$$\sigma_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N K_{ki} \sigma_i + F_k, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

где

$$K_{ki} = \frac{\mu - \mu_0}{\pi(\mu + \mu_0)} \int_{\Delta l_i} \vec{n}_k \frac{r_{PQ_k}}{r_{PQ_k}^2} dl_p, \quad F_k = 2 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} H_{0n}(Q_k),$$

$i, k=1, 2, \dots, N.$
Здесь Q_k — точка в центре отрезка Δl_k .

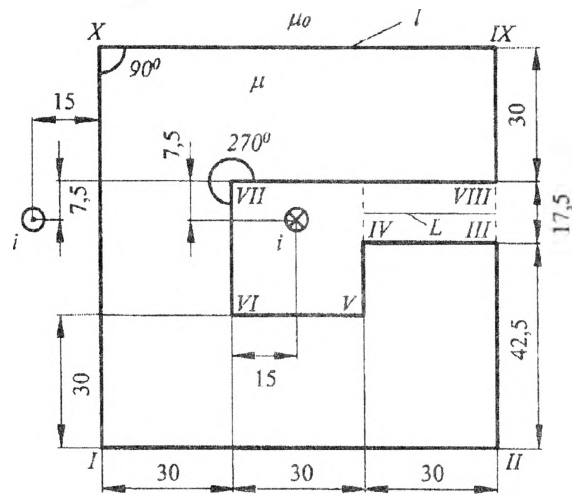


Рис. 2

Заметим, что СЛАУ (24) не совпадает со СЛАУ (9). В частности, решение СЛАУ (24) не обладает свойством (13).

Расчет магнитного поля производится по формуле:

$$\vec{H}(M) = \frac{1}{2\pi} \int_1 \sigma(P) \frac{r_{PM}}{r_{PM}^2} dl_p + \vec{H}_0(M), \quad (25)$$

причем, для метода СЛАУ (21) $\sigma(P)$ — кусочно-линейная функция (15), а для метода СЛАУ (9) и для СЛАУ (24) — кусочно-постоянная.

Решение СЛАУ (24) с увеличением числа разбиений стремится к решению ИУ (10). Выбирая конечное, но весьма большое число разбиений, кусочно-постоянную функцию σ_k можно считать приближенно равной функции $\sigma(Q)$, то есть, точному решению ИУ (10).

Разобьем поверхность МС на рис. 2 на $N=4950$ отрезков. Полученное при этом решение СЛАУ (24) (распределение плотности магнитных зарядов) обозначим через σ_T , а соответствующее ему распределение магнитного поля в зазоре МС (рис. 2) — через \vec{H}_T . Тогда соответствующие погрешности для распределений, найденных при решении СЛАУ (9), (21) и (24) для любого меньшего, чем $N=4950$ числа разбиений, определяем так:

$$\xi = \frac{||\sigma - \sigma_T||}{||\sigma_T||} \cdot 100\%, \quad \eta = \frac{||\vec{H} - \vec{H}_T||}{||\vec{H}_T||} \cdot 100\%.$$

В этих формулах (рис. 2)

$$||\sigma|| = + \left[\int_l \sigma^2(P) dl_p \right]^{1/2},$$

$$||\vec{H}|| = + \left[\int_L H^2(M) dl_M \right]^{1/2}.$$

Погрешности ξ и η для рассматриваемых в статье методов при различных числах разбиений приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	t, c	$\xi, \%$	$\eta, \%$
Кусочно-постоянная аппроксимация плотности магнитного заряда			
Метод ИУ (10) (СЛАУ (24))			
100	0.046	51.871	19.950
400	2.875	43.987	8.8816
Метод СЛАУ (9)			
100	0.046	46.757	1.0997
400	2.983	41.468	0.1254
Кусочно-линейная аппроксимация плотности магнитного заряда			
Метод СЛАУ (21)			
100	0.375	41.877	0.1094
400	31.829	36.611	0.0069

СЛАУ (9), (21) и (24) решались следующими методами: методом простой итерации, методом Зейделя [2], вторым геометрическим методом [5], методом Крамера и методом разложения матрицы на множители [2]. Отличие между соответствующими решениями не превышает 0,0001%.

Замена последнего уравнения в СЛАУ (9) уравнением (13) позволяет сократить число итераций при решении этой СЛАУ методом простой

итерации. Так при $N=400$ для достижения погрешности $\eta=0,1254\%$ без замены требуется 1393 итерации, а с заменой — 228 итераций. В случае кусочно-линейной аппроксимации этот эффект еще больше (правда здесь приходится использовать метод Зейделя, так как метод простой итерации не работает).

Данные табл. 1 подтверждают сказанное в начале статьи: полученные при решении СЛАУ (24) для указанного в таблице числа разбиений распределение σ_k и соответствующее ему распределение $\vec{H}(M)$ определяются весьма грубо. В свою очередь, применение предложенного метода, основанного на решении СЛАУ (9), позволяет существенно повысить точность расчетов. Еще более высокую точность расчетов МС можно достичь, используя кусочно-линейную аппроксимацию в методе СЛАУ (21).

Необходимо отметить, что погрешность ξ в табл. 1 имеет столь существенную величину в силу особенностей функции $\sigma(Q)$, которые возникают в угловых зонах МС, в случае угла, меньшего 180° (рис. 2), и проявляются в виде всплесков в пределе стремящихся к бесконечности (рис. 3). Поэтому при числе разбиений существенно меньшем, чем $N=4950$ значение функции σ_k в этих областях будет плохо соответствовать значениям реальной функции $\sigma(Q)$. На рис. 3 показана зависимость плотности магнитного заряда от расстояния v , отложенного вдоль границы МС (начало отсчета v выбрано в угле I; римские цифры, указанные на графике, соответствуют обозначениям углов МС на рис.2).

Рассмотрим случай, когда в МС, изображенной на рис. 2, был уменьшен рабочий зазор с 17,5мм до 1 мм. Задача расчета магнитного поля при этом будет более сложной.

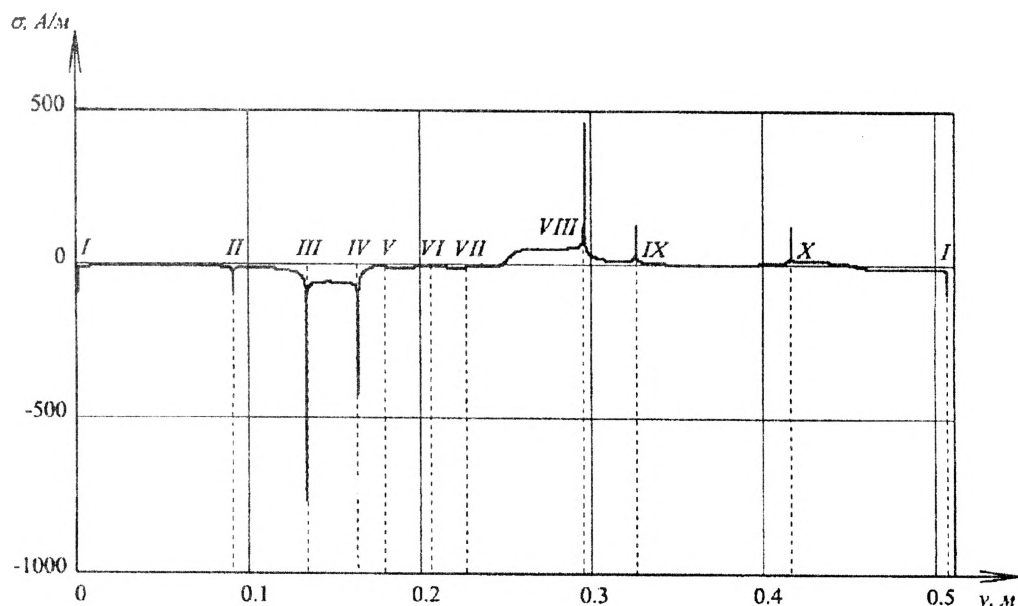


Рис. 3

Результаты расчетов поля для данной *МС* представлены в виде табл. 2, аналогичной табл. 1.

Таблица 2

<i>N</i>	<i>t, с</i>	$\xi, \%$	$\eta, \%$
Кусочно-постоянная аппроксимация плотности магнитного заряда			
Метод ИУ (10) (СЛАУ (24))			
200	0,327	49,327	42,985
800	31,203	35,252	25,505
Метод СЛАУ (9)			
200	0,375	26,921	3,6505
800	33,172	24,371	0,6646
Кусочно-линейная аппроксимация плотности магнитного заряда			
Метод СЛАУ (21)			
200	3,203	24,720	0,8621
800	459,860	21,570	0,1546

Для того чтобы точность расчетов осталась достаточно высокой, максимальное число разбиений увеличено до $N=5940$ точек. Магнитная проницаемость оставлена прежней: $1000\mu_0$. Использованные в табл. 2 обозначения имеют тот же смысл, что и в табл. 1.

Анализируя результаты, представленные в табл. 2, можно сделать вывод, что и при малом рабочем зазоре *МС* предлагаемый алгоритм дает результат, хорошо согласующийся с точным распределением поля (т.е. с распределением поля, полученным с использованием решения СЛАУ (24) для $N=5940$). При этом главное преимущество метода — большая точность при таком же числе уравнений, как и в СЛАУ (24), — сохраняется.

В табл. 3 приведено сопоставление количеств разбиений в различных методах при одной и той же погрешности расчета поля η . Результаты приведены для случая большого зазора (17,5 мм). Для малого зазора наблюдается такая же тенденция.

Таблица 3

	Метод ИУ (10) (СЛАУ (24))	Метод СЛАУ (9)	Метод СЛАУ (21)
$\eta, \%$	0,394	0,397	0,393
<i>N</i>	4290	204	40
<i>t, с</i>	859,016	0,281	0,078

Приложения. Определение интеграла $\int_{\Delta_k} \vec{n}_i' \vec{n}_k \vec{dl}$. Выберем систему координат как указано на рис. 4.

Обозначим $d\vec{n}_i' = \frac{dx}{2\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$. Имеем

$$\int_{\Delta_k} d\vec{n}_i' \vec{n}_k \vec{dl} = \int_{\Delta_k} \frac{dx}{2\pi r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}_k) dl = \frac{dx}{2\pi} \int_{\Delta_k} \frac{dl'}{r}$$

$$= \frac{dx}{2\pi} \left[\arctg \left(\frac{X_k - x}{Y_k} \right) - \arctg \left(\frac{X_H - x}{Y_H} \right) \right]$$

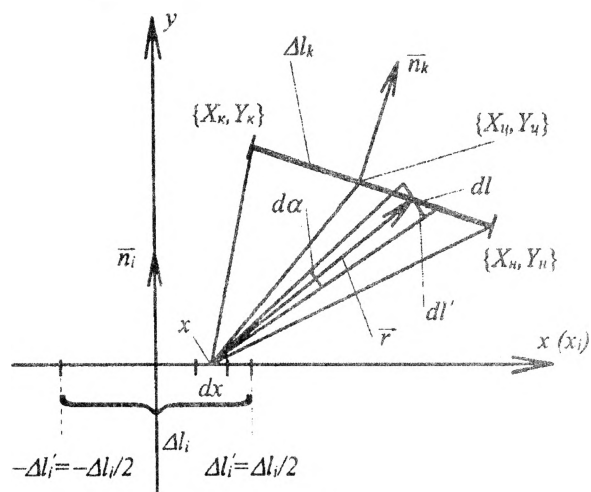


Рис. 4

Здесь $\{X_H, Y_H\}$ и $\{X_k, Y_k\}$ координаты соответственно начала и конца отрезка Δl_k (рис. 4), которые определяются следующим образом. Если смотреть из середины отрезка Δl_k по направлению нормали \vec{n}_k , то справа будет начало, а слева — конец этого отрезка.

Далее, используя [1], находим:

$$\int_{\Delta_k} \vec{n}_i' \vec{n}_k \vec{dl} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta l_i'}^{+\Delta l_i'} dx \left[\arctg \left(\frac{X_k - x}{Y_k} \right) - \arctg \left(\frac{X_H - x}{Y_H} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ (X_k + \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta l_i'} \right) + \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k + \Delta l_i')^2 \right] - (X_k - \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k - \Delta l_i'} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k - \Delta l_i')^2 \right] + (X_H - \Delta l_i') \times \right.$$

$$\left. \times \arctg \left(\frac{Y_H}{X_H - \Delta l_i'} \right) + \frac{Y_H}{2} \ln \left[Y_H^2 + (X_H - \Delta l_i')^2 \right] - \right.$$

$$\left. - (X_H + \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_H}{X_H + \Delta l_i'} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_H}{2} \ln \left[Y_H^2 + (X_H + \Delta l_i')^2 \right] \right\},$$

$$k=1, 2, \dots, N; \quad i=1, 2, \dots, N; \quad i \neq k.$$

Определение интеграла $\int_{\Delta_k} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl$. Предположим, что первичное поле \vec{H}_0 создается единичным прямолинейным бесконечно длинным проводником с током i . В общем случае применяем принцип суперпозиции. Выберем систему координат как показано на рис. 5.

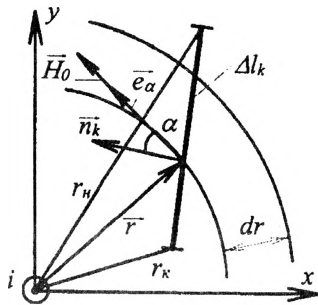


Рис. 5

Имеем: $\vec{H}_0 \vec{n}_k dl = \vec{H}_0 \vec{e}_\alpha \vec{n}_k dl = \frac{i}{2\pi r} (\cos\alpha) dl$. Далее

$$\int_{\Delta_k} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl = \frac{i}{2\pi} \int_{r_k}^{r_n} (\cos\alpha) dl/r = \frac{i}{2\pi} \int_{r_k}^{r_n} dr/r = \frac{i}{2\pi} \ln r \Big|_{r_k}^{r_n} = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_n}{r_k}.$$

Здесь r_n и r_k — расстояния до начала координат соответственно от начала и конца отрезка Δ_k , которые определяются так же, как и при вычислении интеграла $\int_{\Delta_k} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl$.

Определение интегралов, входящих в коэффициенты СЛАУ (21). Интегралы $\int_{\Delta_k'} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl$ и $\int_{\Delta_k''} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl$, входящие в коэффициенты B_{ki}' и B_{ki}'' , найдем по аналогии с ранее найденным интегралом $\int_{\Delta_k} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl$.

Имеем:

$$\int_{\Delta_k'} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl = \frac{1}{2\pi} \left\{ (X_k + \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta l_i'} \right) + \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k + \Delta l_i')^2 \right] - (X_k - \Delta l_i') \times \right. \\ \left. \times \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k - \Delta l_i'} \right) - \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k - \Delta l_i')^2 \right] + \right. \\ \left. + (X_k - \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k - \Delta l_i'} \right) + \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta l_i')^2 \right] - (X_k + \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta l_i'} \right) - \right. \\ \left. - \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k + \Delta l_i')^2 \right] \right\},$$

(26)

$$- \Delta l_i')^2 \left. \right\} - (X_k + \Delta l_i') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta l_i'} \right) - \\ - \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k + \Delta l_i')^2 \right],$$

$$k=1, 2, \dots, N; \quad i=1, 2, \dots, N; \quad i \neq k.$$

$$\int_{\Delta_k''} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl = \frac{1}{2\pi} \left\{ (X_k + \Delta l_i'') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta l_i''} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k + \Delta l_i'')^2 \right] - (X_k - \Delta l_i'') \times \right. \\ \left. \times \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k - \Delta l_i''} \right) - \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k - \Delta l_i'')^2 \right] + \right. \\ \left. + (X_k - \Delta l_i'') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k - \Delta l_i''} \right) + \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta l_i'')^2 \right] - (X_k + \Delta l_i'') \arctg \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta l_i''} \right) - \right. \\ \left. - \frac{Y_k}{2} \ln \left[Y_k^2 + (X_k + \Delta l_i'')^2 \right] \right\},$$

(27)

$$k=1, 2, \dots, N; \quad i=1, 2, \dots, N; \quad i \neq k.$$

Интегралы $\int_{\Delta_k'} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl$ и $\int_{\Delta_k''} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl$, входящие в коэффициенты C_k' и C_k'' СЛАУ (21), найдем по аналогии с ранее найденным интегралом $\int_{\Delta_k} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl$.

Имеем:

$$\int_{\Delta_k'} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_n}{r_k}, \quad \int_{\Delta_k''} \vec{H}_0 \vec{n}_k dl = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_n}{r_k},$$

$$k=1, 2, \dots, N.$$

Введенные в формулах (26) — (28) обозначения соответствуют обозначениям рис. 4 и рис. 5. При выводе формул (26) и (27) начало правой системы координат выбирается в центре отрезка Δ_k , ось x направляется по оси x_i . При выводе формул (28) предполагается, что первичное поле \vec{H}_0 создается одиночным проводником с током i .

Определение интегралов $\int_{\Delta_k'} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl$ и $\int_{\Delta_k''} \vec{h}_i'' \vec{n}_k dl$.

Очевидно (рис. 4) $d\vec{h}'_i = \frac{xdx}{2\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$.

$$\int_{\Delta'_k} d\vec{h}'_i \vec{n}_k dl = \int_{\Delta'_k} \frac{xdx}{2\pi r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}_k) dl = \frac{xdx}{2\pi} \int_{\Delta'_k} \frac{dl'}{r} =$$

$$= \frac{xdx}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{X_k - x}{Y_k} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{X_u - x}{Y_u} \right) \right].$$

Далее, используя [1], находим:

$$\int_{\Delta'_k} \vec{h}'_i \vec{n}_k dl = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta'_i}^{\Delta'_i} x \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{X_k - x}{Y_k} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{X_u - x}{Y_u} \right) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ X_k (X_k + \Delta'_i) \operatorname{arctg} \left(\frac{Y_k}{X_k + \Delta'_i} \right) - \right.$$

$$\left. - X_k (X_k - \Delta'_i) \operatorname{arctg} \left(\frac{Y_k}{X_k - \Delta'_i} \right) + \frac{X_k Y_k}{2} \times \right.$$

$$\times \ln \frac{Y_k^2 + (X_k - \Delta'_i)^2}{Y_k^2 + (X_k + \Delta'_i)^2} + \frac{1}{2} \left[(Y_k^2 + (X_k - \Delta'_i)^2) \times \right.$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{Y_k}{X_k - \Delta'_i} -$$

$$\left. - (Y_k^2 + (X_k + \Delta'_i)^2) \cdot \operatorname{arctg} \frac{Y_k}{X_k + \Delta'_i} \right] -$$

$$\left. - X_u (X_u + \Delta'_i) \operatorname{arctg} \frac{Y_u}{X_u + \Delta'_i} + X_u (X_u - \Delta'_i) \times \right.$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{Y_u}{X_u - \Delta'_i} - \frac{X_u Y_u}{2} \ln \frac{Y_u^2 + (X_u - \Delta'_i)^2}{Y_u^2 + (X_u + \Delta'_i)^2} -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left[(Y_u^2 + (X_u - \Delta'_i)^2) \operatorname{arctg} \frac{Y_u}{X_u - \Delta'_i} - \right. \right.$$

$$\left. - (Y_u^2 + (X_u + \Delta'_i)^2) \operatorname{arctg} \frac{Y_u}{X_u + \Delta'_i} \right] + (Y_u - Y_k) \Delta'_i \},$$

$$k=1, 2, \dots, N; \quad i=1, 2, \dots, N; \quad i \neq k.$$

Выражение для интеграла $\int_{\Delta'_k} \vec{h}'_i \vec{n}_k dl$, очевидно,

может быть получено из выражения для интеграла $\int_{\Delta'_k} \vec{h}'_i \vec{n}_k dl$ заменой X_k на X_u , Y_k на Y_u , X_u на X_k и Y_u на Y_k .

1. Давит Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1966. — 228 с.

2. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т. 1. Под ред. И. П. Мысовских. — Минск: "Высшейш. школа". 1972. — 584 с.

3. Петрушенко Е.І. До апроксимації інтегральних рівнянь теорії електромагнітного поля алгебраїчними системами // Доповіді АН УРСР. Сер. А. — 1969. — №7. — С. 618 — 621.

4. Стадник И. П., Жильцов А. В. Повышение эффективности метода интегральных уравнений расчета магнитостатических полей в кусочно-однородных средах // Техн. электродинамика. — 2003. — №2. — С. 3 — 8.

5. Стадник И.П. Методы и алгоритмы синтеза магнито- и электростатических полей / Дисс. ... докт. техн. наук. Симферополь. 1987. — 369 с.

6. Тозони О.Д., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев: Техника. 1974. — 352 с.

Надійшла 12.07.2006