

УДК 621.3.011.74.005

Н.А. ШИДЛОВСЬКА, чл.-кор. НАН України (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ), В.Г. САМОЙЛЕНКО, докт. фіз.-мат. наук (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка), О.П. КРАВЧЕНКО, канд. техн. наук, І.М. КУЧЕРЯВА, канд. техн. наук (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ)

Порівняльний аналіз аналітичного та чисельного методів розрахунку процесів у нелінійному електричному колі

Проведено порівняльний аналіз розрахунків процесів у нелінійному розрядному колі, виконаних за допомогою аналітичного та чисельного методів. Доведено ефективність використання запропонованого аналітичного методу для розв'язання відповідних задач електротехніки.

Проведен сравнительный анализ расчетов процессов в нелинейном разрядном контуре, выполненных с помощью аналитического и численного методов. Доказана эффективность использования предложенного аналитического метода для решения соответствующих задач электротехники.

Вступ. З ростом вимог до сучасних електротехнічних та електроенергетичних пристроїв і систем постає необхідність при аналізі режимів їхньої роботи враховувати нелінійні ефекти, що супроводжують функціонування цих пристроїв і можуть суттєво впливати на їхні характеристики. Для виявлення характеру впливу нелінійних ефектів на роботу системи недостатньо обмежитися лише результатами чисельного розрахунку, необхідно провести якісний аналіз, що дозволяє виявити характер і особливості впливу нелінійних явищ. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває проблема розробки нових аналітичних методів, адаптованих до задач електротехніки. Для оцінки точності аналітичного методу необхідно проводити порівняння розрахунків, що проводяться новим методом, з результатами розрахунків, отриманих для тих самих задач, методами, точність яких наперед відома і строго математично обґрунтована.

Метою даної статті є проведення порівняльного аналізу розрахунків процесів у нелінійному розрядному колі, виконаних за допомогою запропонованого аналітичного [5] та чисельного методів.

Формули для наближеного розв'язку. В статті [5] розглянуто новий метод розрахунків слабо нелінійних розрядних кіл, що базується на розкладанні розв'язків нелінійної системи по розв'язках незбуреної системи. За допомогою означеного методу проаналізовано послідовне RLC розрядне коло, потокозчеплення в якому описується співвідношенням

$$\psi = L (dq/dt) - \varepsilon (dq/dt)^3. \quad (1)$$

Рівняння Кірхгофа для такого кола має вигляд нелінійного диференціального рівняння другого порядку [6]

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \varepsilon \frac{3}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \frac{d^2q}{dt^2}, \quad (2)$$

яке за умови, що

$$\varepsilon \frac{3}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 < 1, \quad (3)$$

можна звести до регулярно збуреного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \\ & = -\varepsilon \left(\frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} \right) \left(\frac{3}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{3}{L} \right)^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В подальшому замість (4) розглядається рівняння

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = -\varepsilon \frac{3}{L} \left[\frac{R}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^3 + \frac{q}{LC} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \right], \quad (5)$$

яке отримане з (4) шляхом нехтування доданками

$$-\varepsilon^2 \left(\frac{3}{L} \right)^2 \left(\frac{Rdq}{L dt} + \frac{q}{LC} \right) \left(\left(\frac{dq}{dt} \right)^4 + \varepsilon \frac{3}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^6 + \dots \right),$$

що з огляду на точність обчислення наближеного розв'язку рівняння (4) (відповідно, рівняння (2)) приведе до похибки порядку ε^2 .

Позначимо

$$\frac{1}{LC} = \omega^2; \quad \frac{R}{L} = 2\delta; \quad \frac{3}{L} = r;$$

$$\lambda_1 = -\delta - (\delta^2 - \omega^2)^{1/2}; \quad \lambda_2 = -\delta + (\delta^2 - \omega^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Тоді у випадку $\delta \neq \omega$ ($\delta^2 - \omega^2 > 0$), наближений розв'язок рівняння (5) з початковою умовою $q|_{t=0} = Q$, $dq/dt|_{t=0} = 0$ можна записати у вигляді [5]

$$\begin{aligned} q = & -\frac{\lambda_2 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \varepsilon \frac{r \lambda_1^3 \lambda_2^2 Q^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 - 3\lambda_2} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] e^{\lambda_1 t} + \\ & + \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \varepsilon \frac{r \lambda_1^2 \lambda_2^3 Q^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left[\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 - 3\lambda_1} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] e^{\lambda_2 t} + \\ & + \frac{\varepsilon r \lambda_1^3 \lambda_2^3 Q^3 e^{3\lambda_1 t}}{2(-3\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3} - \frac{\varepsilon r \lambda_1^3 \lambda_2^3 Q^3 e^{3\lambda_2 t}}{2(\lambda_1 - 3\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3} + \\ & + \frac{\varepsilon r \lambda_1^2 \lambda_2^3 (2\lambda_1 + \lambda_2) Q^3 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3} - \\ & - \frac{\varepsilon r \lambda_1^3 \lambda_2^2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) Q^3 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \quad (7) \end{aligned}$$

$$i = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \varepsilon \frac{r \lambda_1^4 \lambda_2^2 Q^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \times$$

$$\times \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 - 3\lambda_2} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] e^{\lambda_1 t} +$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_2 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \varepsilon \frac{r \lambda_1^2 \lambda_2^4 Q^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left[\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 - 3\lambda_1} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \right] e^{\lambda_2 t} +$$

$$+ \frac{3\varepsilon r \lambda_1^4 \lambda_2^3 Q^3 e^{3\lambda_1 t}}{2(-3\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3} - \frac{3\varepsilon r \lambda_1^3 \lambda_2^4 Q^3 e^{3\lambda_2 t}}{2(\lambda_1 - 3\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3} +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\varepsilon r \lambda_1^2 \lambda_2^3 (2\lambda_1 + \lambda_2)^2 Q^3 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3} - \\ & - \frac{\varepsilon r \lambda_1^3 \lambda_2^2 (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2 Q^3 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^3}. \quad (8) \end{aligned}$$

Зазначимо, що рівняння (5) відрізняються від рівняння (2) на величину порядку ε^2 . Тобто, при знаходженні наближеного розв'язку рівняння (2) за допомогою рівняння (5) доцільно обмежитися лише доданками нульового і першого порядку відносно ε .

Згідно з загальною теорією методів малого параметра [1] регулярно збурених диференціальних рівнянь, такий наближений розв'язок відрізняється від точного розв'язку рівняння (2) на величину порядку ε^2 . З іншого боку, величина $|q_{\text{точне}}(t) - q_{\text{набл}}(t)|$ залежить від моменту часу t , для якого розглядаються значення, отримані за допомогою чисельного та аналітичного методів.

Оскільки $\text{Re} \lambda_1 < 0$, $\text{Re} \lambda_2 < 0$, то, як це впливає з формул (7), (8), для великих значень t похибка буде незначною, оскільки вона має порядок першого відкинутого доданка в формулі для наближеного розв'язку.

Аналіз значень наближеного аналітичного і чисельного розв'язків. Для оцінки ефективності аналітичного методу [5] порівняємо значення наближеного розв'язку рівняння (2), що отримується з формул (7), (8), з відповідними значеннями чисельних розв'язків співвідношення (2), що знаходяться за допомогою математичної системи Mathcad. Порівняння проводиться залежно від співвідношення між лінійною ψ_L та нелінійною ψ_H складовими в апроксимаційній залежності для нелінійної індуктивності (1) з урахуванням малої величини ε , тобто, виходячи з кратностей

$$k = \psi_H / \psi_L = 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001, \quad (9)$$

де $\psi_L = L(dq/dt)$, $\psi_H = \varepsilon(dq/dt)^3$, $\psi = \psi_L - \psi_H$.

Для цього вираховуємо величину малого параметру ε і порівняємо значення струму в колі, що одержано з аналітичних співвідношень (7) та (8), з відповідними чисельними значеннями. Для обчислення оберемо такі характеристики кола: $L = 5 \times 10^{-6}$ Гн; $C = 100 \times 10^{-4}$ Ф; $q_0 = 0,014$ Кл та $R = 0,033$ Ом для аперіодичного процесу і $R = 0,007$ Ом — для періодичного розряду.

Для знаходження числових значень розв'язку рівняння (2) використано чисельний метод Рунге-Кутти [7,8] з фіксованим кроком і четвертим порядком похибки на кожному кроці за часом. Цей метод є стійким і реалізується за явною схемою, тому крок інтегрування за часом може бути автоматично

зменшено, коли функція швидко змінюється, або збільшено у разі уповільнення зміни функції. Такі властивості методу є важливими при розрахунках на комп'ютері. Детально переваги методу і шляхи забезпечення високої точності за рахунок вибору прийнятної крока інтегрування описано в [2,7]. Часовий інтервал для інтегрування вибрано відповідно до заданої кількості коливань при розряді конденсатора — до 7 періодів коливальної процесу. Метод Рунге-Кутти разом з графічною обробкою результатів реалізовано в програмному середовищі математичного пакету MathCad [1].

На рис. 1 показано графіки порівняння аналітичних та чисельних розрахунків для різних значень коефіцієнта k при аперіодичному розряді конденсатора (рис. 1, a — $k=0,3$; $\epsilon=7,4 \cdot 10^{-10}$; $\sigma=19,2A$; $\delta_{\max}=0,62$; $1, b$ — $k=0,1$; $\epsilon=2,6 \cdot 10^{-10}$; $\sigma=2,86A$; $\delta_{\max}=0,153$; $1, c$ — $k=0,01$; $\epsilon=2,5 \cdot 10^{-11}$; $\sigma=0,28A$; $\delta_{\max}=0,012$). Тут і далі неперервною лінією позначено чисельний розв'язок, пунктирною — аналітичний. У разі аперіодичного розряду залежності струму представлені в рамках одного періоду і в різному масштабі осі ординат. Для кожного з розглянутих випадків на рис. 1 наведено значення коефіцієнта k (формула (9)), відповідного йому значення параметра ϵ , відносної похибки δ і середньоквадратичного відхилення σ , яке обчислено за формулою [3,4]:

$$\sigma = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (I_{\text{числ}}(t_k) - I_{\text{анал}}(t_k))^2 \right]^{1/2}$$

де $I_{\text{числ}}$, $I_{\text{анал}}$ — значення струму, отримані відповідно чисельним розрахунком і аналітично,

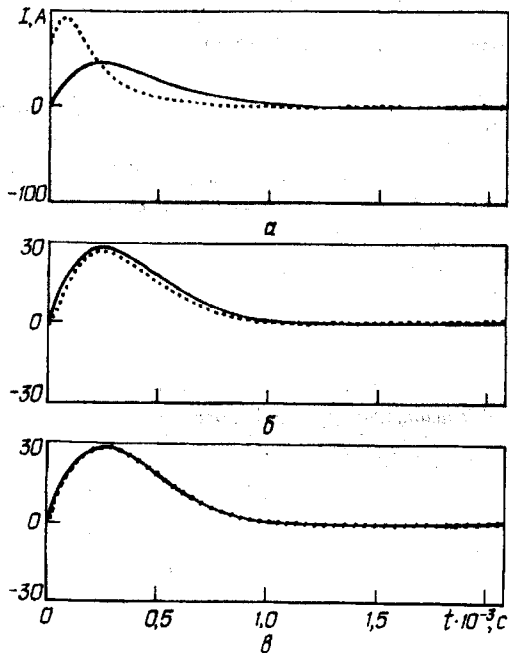


Рис. 1

$N=100$ — кількість точок на часовому інтервалі в межах одного (для аперіодичного режиму) і трьох (для періодичного) періодів процесу розряду конденсатора.

Як видно з порівняння залежностей на рис. 1, значення $k \leq 0,01$ забезпечують достатньо високу збіжність результатів аналітичного і чисельного розрахунків. У разі $k=0,01$ середньоквадратичне відхилення $\sigma=0,28A$, а відносна похибка $\delta=0,012$.

Дослідження періодичного режиму розрядного процесу (рис. 2) показало прийнятність більш високих значень k (починаючи з 0,1), а отже і більших значень ϵ в (1) та в аналітичних розв'язках (28), (29) [5] рівняння (2), які розглядаються в даній статті (на рис. 2, a — $k=1$; $\epsilon=3,6 \cdot 10^{-10}$; $\sigma=11,4A$; $\delta_{\max}=0,11$; $2, b$ — $k=0,5$; $\epsilon=1,7 \cdot 10^{-10}$; $\sigma=3,8A$; $\delta_{\max}=0,037$; $2, c$ — $k=0,1$; $\epsilon=3,6 \cdot 10^{-11}$; $\sigma=0,68A$; $\delta_{\max}=0,0078$).

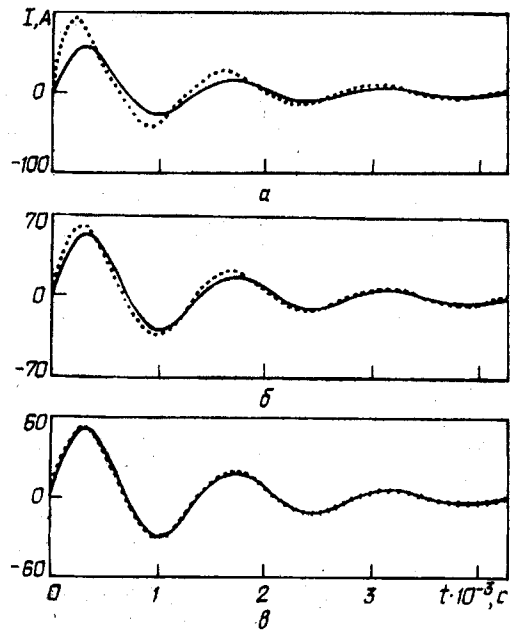


Рис. 2

На рис. 3 наведено залежності середньоквадратичного відхилення σ від значень коефіцієнта k для двох розрядних режимів — періодичного і аперіодичного.

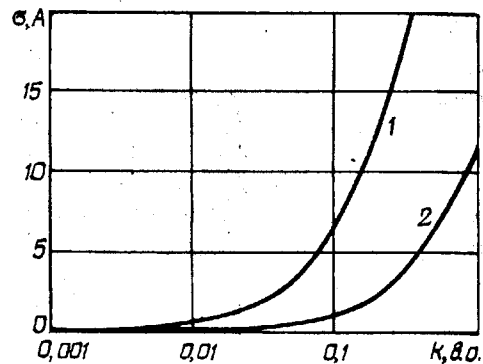


Рис. 3

дичного. Як показано, періодичний режим розряду може бути розраховано з високою точністю за допомогою аналітичних виразів при більших значеннях k , ніж аперіодичний режим. Такий результат підтверджено серією розрахунків при різних параметрах кола R, L, C і q_0 .

Висновки. На прикладі коливального кола з нелінійною індуктивністю шляхом порівняння аналітичних розрахунків з чисельними доведено ефективність аналітичного методу, описаного в [5]. Результати чисельних розрахунків при різних параметрах і початкових умовах електричного кола, а також порівняльний аналіз з аналітичними розрахунками показали, що запропонований аналітичний метод може застосовуватися для вивчення аперіодичного і періодичного розрядного процесів у випадку, коли відношення нелінійної частини до лінійної складової у виразі для індуктивності не перевищує 0,01 для аперіодичного розряду і 0,1 — для періодичного. При цьому відносна похибка результатів чисельного і аналітичного розрахунків складає менше 1—1,5% для аперіодичного режиму

і не більше 0,9% — для періодичного розрядного процесу.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
3. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования. — К.: Вища школа, 1977. — 280 с.
4. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. — 334 с.
5. Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Самойленко В.Г., Потороча В.В. Новый алгоритм дослідження процесів в нелінійних розрядних колах // Техн. електродинаміка. — 2007. — № 5. — С. 3—6.
6. Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Кучерява І. М., Самойленко В.Г. Застосування методу усереднення Боголюбова до аналізу процесів в нелінійних коливальних колах з втратами // Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки" — 2006. — Ч. 2. — С. 3—6.
7. Hildebrand F.B. Introduction to numerical analysis / Second Edition. — New York: McGraw-Hill, 1974. — 669 p.
8. <http://www.ptc.com/products/mathcad/>

Надійшла 30.10.08

УДК 621.3:537.3

М.И.БАРАНОВ, докт.техн.наук (НИПКИ "Молния" Нац. техн. ун-та "ХПИ", Харьков)

Волновое радиальное распределение свободных электронов в цилиндрическом проводнике с переменным электрическим током

На основе положений волновой механики проведена расчетная квантовомеханическая оценка радиального распределения в круглом металлическом проводнике свободных электронов, дрейфующих в продольном направлении проводника с электрическим током проводимости различных амплитудно-временных параметров. Показано, что в поперечном сечении исследуемого проводника на его внешнем радиусе укладывается целое квантованное число электронных полувольт де Бройля с убывающей от центра к периферии проводника амплитудой.

На основі положень хвильової механіки виконано розрахункову квантовомеханічну оцінку радіального розподілу у круглому металевому провіднику вільних електронів, що дрейфують у подовжньому напрямку провідника з електричним струмом провідності різних амплітудно-часових параметрів. Показано, що в поперечному перерізі досліджуваного провідника на його зовнішньому радіусі укладається ціле квантоване число електронних напівхвиль де Бройля зі спадаючою від центра до периферії провідника амплітудою.

Введение. В работах [3—7] автором с использованием известных принципов квантовой механики при определенных допущениях были проведены теоретические исследования одномерного волно-

вого продольного распределения дрейфующих свободных электронов в тонком однородном металлическом проводнике с постоянным или переменным (импульсным) электрическим током про-