

МОДЕЛЬ ВЕКТОРНОГО ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

И.С.Петухов, канд.техн.наук

Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина.

e-mail: igor_petu@mail.ru

Предложена модель векторного гистерезиса для симметричного цикла перемагничивания ферромагнетика, основанная на комбинации дробно-рациональных функций и явно выражающая зависимость напряженности магнитного поля от индукции на периоде изменения поля. Модель ориентирована на применение в методе конечных элементов и отражает влияние насыщения ферромагнетика на величину и характер изменения поля по двум ортогональным направлениям. Характер зависимости потерь от величины магнитной индукции при вращательном перемагничивании хорошо согласуется с известными экспериментальными данными. Библ. 17, рис. 5.

Ключевые слова: векторный гистерезис, периодическое электромагнитное поле.

Введение. Моделирование явления гистерезиса представляет собой одну из самых сложных задач при создании расчетных алгоритмов, направленных на исследование и проектирование электромагнитных устройств, в конструкции которых присутствуют ферромагнитные элементы. Особенно важным становится учет гистерезиса в магнитотвердых ферромагнетиках, находящихся в переменном магнитном поле. Трудности моделирования возрастают в случае, когда в ферромагнитной среде наблюдается наложение явлений гистерезиса и вихревых токов. Эти трудности обусловлены, в первую очередь, нелинейностью и неоднозначностью характеристики намагничивания ферромагнитной среды в переменном магнитном поле. Отмеченные особенности обуславливают появление большого числа публикаций, посвященных рассматриваемой тематике [3,9,12,16,17]. Причем, поток публикаций, начавшийся в прошлом веке, не ослабевает и в настоящее время. Особо следует отметить работы, направленные не просто на моделирование процесса гистерезиса в знакопеременном магнитном поле, но и на внедрение разработанных моделей в программные средства для расчета электромагнитных полей методом конечных элементов (МКЭ) [8].

Можно выделить несколько направлений в моделировании явления гистерезиса. Это создание моделей: 1) учитывающих эквивалентное совместное влияние вихревых токов и гистерезиса; 2) разделяющих эти два явления и учитывающих их по отдельности; 3) учитывающих магнитную вязкость различной природы, которая влияет на характеристики процесса проявления гистерезиса. Первое направление, которое следует отнести к методам приближенного учета рассматриваемого явления в сосредоточенных элементах электрической цепи, не может быть признано пригодным для решения полевых задач.

Раздельное моделирование одновременно существующих вихревых токов, гистерезиса и магнитной вязкости провести весьма сложно. Так, влияние вихревых токов на характеристики процесса, в частности потери, зависит от квадрата частоты, и приводит к перераспределению магнитной индукции по сечению ферромагнетика. Статический гистерезис и магнитная вязкость не приводят к перераспределению поля внутри ферромагнетика и потери, вызванные ними, зависят от первой степени частоты поля [2]. То есть, три указанных фактора имеют различное проявление, что затрудняет учет их в одной математической модели. Ситуация упрощается при моделировании периодического электромагнитного поля низкой частоты, поскольку в этом случае можно пренебречь магнитной вязкостью [2].

В работе [6] для учета несинусоидального характера изменения электромагнитного поля во времени предложен метод временных гармоник (далее МВГ), который используется для получения с помощью МКЭ периодического решения во временной области в виде тригонометрического полинома, и показано увеличение точности расчетов при его использовании для моделирования поверхностного эффекта в ферромагнитной среде. Однако, для реализации метода требуется включить в вычислительный алгоритм некоторую модель векторного гистерезиса для определения зависимости напряженности поля H от индукции B .

Среди математических моделей гистерезиса можно выделить следующие основные модели: Прейсаха (Preisach) [14] и ее многочисленные модификации [13], Стонера-Вольфарта (Stoner-

Wohlfarth) [15] и модель Джайлса-Атертона (Jiles-Atherton) [11]. Модель Прейсаха является стохастической моделью и при численной реализации требует вычисления многомерных интегралов от нелинейных функций [13]. Вторая из упомянутых моделей, хотя и построена на основе физических аналогий, с точки зрения вычислительных затрат обладает тем же недостатком ввиду необходимости интегрирования нелинейных функций. В основе модели Джайлса-Атертона лежит нелинейное дифференциальное уравнение относительно вектора намагниченности M и вектора напряженности поля H , которое решается итерационным методом. Этот факт также является неблагоприятным для построения производительного алгоритма, поскольку сам алгоритм решения уравнений МКЭ предусматривает итерационный процесс. Кроме того, имеется еще трудность перехода от вектора намагниченности к вектору магнитной индукции. В этих случаях задача формулируется в терминах векторного магнитного потенциала. Вышесказанное свидетельствует о необходимости построения математической модели гистерезиса, лишенной отмеченных недостатков и пригодной для внедрения в алгоритм МВГ, что и является целью настоящей работы.

Математическая модель. В методе временных гармоник при формировании системы нелинейных уравнений на сетке конечных элементов производится интегрирование по временному периоду вектора невязки [6]. Требуется, чтобы математическая модель локального процесса перемагничивания обладала следующими свойствами:

1. Давала явную зависимость напряженности поля от индукции.
2. Обеспечивала достаточное приближение закономерностей изменения векторов в случае знакопеременного и вращающегося полей.
3. Правильно отражала интегральные характеристики реальных ферромагнетиков – зависимости потерь от интенсивности поля в предельных и промежуточных случаях.

Одна из простейших моделей, удовлетворяющих первым двум требованиям, была предложена еще в 1913 году Аркадьевым [1]. Она основывалась на введенном понятии комплексной магнитной проницаемости. Это нововведение позволяло просто задать отставание вектора магнитной индукции от вектора напряженности магнитного поля. Пусть в ферромагнетике возбуждается синусоидальное магнитное поле $B_m \sin(\omega t)$. Тогда, обозначив активную (вызывающую потери) и реактивную составляющие удельного магнитного сопротивления (величина обратная магнитной проницаемости μ) соответственно ν_R , ν_X , получим следующее выражение для напряженности поля H

$$H = \nu_R B_m \cos \omega t + \nu_X B_m \sin \omega t \quad (1)$$

или в комплексном виде [1]

$$\dot{H} = \dot{B} / \dot{\mu}. \quad (2)$$

Хотя выражение (2) и более компактно, чем (1), в дальнейшем, тем не менее, будем пользоваться действительным представлением вида (1) и для представления зависимостей векторов поля от времени. Рассмотрим годограф вектора H в координатах (H, B) , показанный на рис. 1. Как видно, активная составляющая ν_R равна половине отрезка b_a , охватываемого эллипсом на оси абсцисс,

$$b_a = 2 \nu_R B_m. \quad (2)$$

Реактивная составляющая удельного магнитного сопротивления ν_X определяет угол наклона кривой намагничивания α_m к вертикальной оси

$$\nu_X = \operatorname{tg} \alpha_m. \quad (3)$$

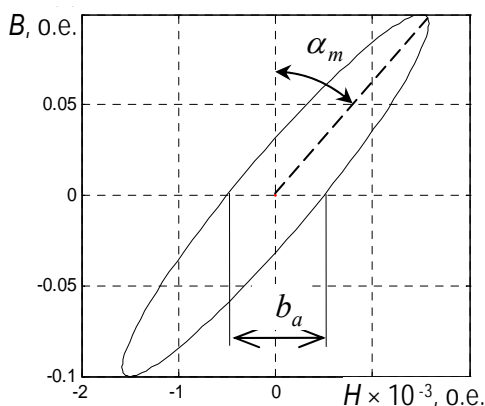


Рис. 1

Рассмотренное представление процесса перемагничивания в соответствии с выражениями (1) или (2) давно используется для замены петли гистерезиса эквивалентным эллипсом при расчете потерь, вызываемых этим явлением [5]. Эта модель может быть также использована при задании временной зависимости магнитной индукции в виде тригонометрического полинома, что требуется в МВГ. В соответствии с этим методом [6] изображение (приближенное значение) всех переменных величин представляется тригонометрическим полиномом. В частности величина вектора магнитной индукции \tilde{B} определяется выражением

$$\tilde{B} = \sum_k B_{ck} \cos k\omega t + B_{sk} \sin k\omega t. \quad (4)$$

Тогда зависимость составляющей напряженности магнитного поля по оси x , выраженная через составляющие удельного магнитного сопротивления, аналогично (1) может быть представлена в виде

$$H_x = v_{Rx} \tilde{B}_x - v_{Xx} d\tilde{B}_x / dt. \quad (5)$$

Здесь производная по времени может быть записана явно и употреблена для аналогии с электрической цепью.

Эквивалентный эллипс (рис. 1) хотя и может приближенно отразить наличие потерь на перемагничивание ферромагнетика, но в нем отсутствует учет влияния насыщения ферромагнетика. Кроме того, модель, основанная на понятии комплексной магнитной проницаемости, не учитывает влияние векторного характера процесса перемагничивания из-за влияния явления насыщения ферромагнетика на процессы во взаимно перпендикулярных направлениях.

Ниже предложена феноменологическая модель перемагничивания с использованием идеи, лежащей в основе понятия комплексной магнитной проницаемости, учитывающая влияние насыщения как при знакопеременном, так и при вращающемся характере поля. Модель представлена в относительных единицах. Это сделано с той целью, чтобы коэффициенты, входящие в выражения, имели значения близкие к единице и облегчали понимание сущности рассматриваемого явления. Вопросы идентификации параметров в работе не рассматриваются, и основное внимание будет уделено качественному отражению параметров и характеристик, получаемых в результате моделирования.

Первым, что следует учесть в модели гистерезиса (1), является зависимость удельного магнитного сопротивления ферромагнетика от величины магнитной индукции. При больших индукциях, когда железо насыщено, удельное магнитное сопротивление велико и почти постоянно. При снижении индукции от 2 до 1 Тл магнитное сопротивление многократно уменьшается, но при дальнейшем снижении индукции его значение стабилизируется и остается практически постоянным. При очень малых значениях индукции магнитное сопротивление вновь возрастает, что соответствует, так называемой, «начальной магнитной проницаемости» [5]. Однако этот участок незначительно влияет на процессы при сильных магнитных полях, в связи с чем на данном этапе откажемся от его рассмотрения. Тогда, обозначив удельное магнитное сопротивление в конце рассматриваемого насыщенного участка v_s , а на начальном участке – v_m , для зависимости реактивной составляющей удельного магнитного сопротивления в выражении (1) от мгновенного значения магнитной индукции B можно записать следующее дробно-рациональное выражение:

$$v_X(B) = v_s - \frac{v_s - v_m}{1 + (B/B_s)^m}, \quad (6)$$

где величина B_s соответствует «точке перегиба» кривой намагничивания и, как несложно видеть, соответствует среднему значению удельных магнитных сопротивлений на обоих участках; показатель степени m определяет «крутизну» кривой при переходе от начального участка к насыщенному. Зависимость (6) представлена графически на рис. 2. Следует отметить, что значение удельного магнитного сопротивления на начальном участке v_m практически соответствует наклону кривой намагничивания $H(B)$, в то время как «насыщенное» значение v_s есть отношение H/B и поэтому соответствующий участок кривой (рис. 2), строго говоря, не является прямым. Этой не вполне физической особенностью функции (6) будем пренебрегать, поскольку, как показывают расчеты, влияние рассматриваемого участка невелико в интересующем нас диапазоне величины магнитной индукции. Отметим также, что численные значения максимального и минимального значений функции v_X отличаются в 10 раз и взяты лишь для иллюстрации. В действительности эти значения могут отличаться в 100 и более раз, особенно для магнитомягких материалов.

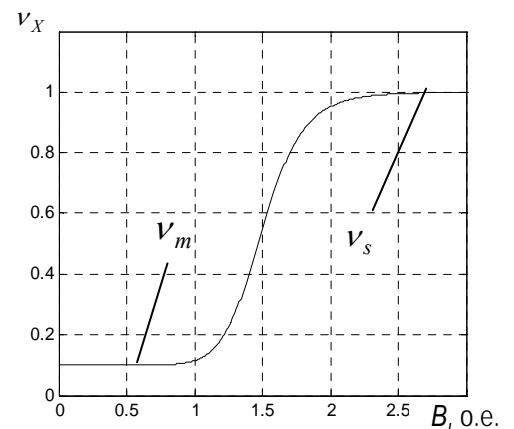


Рис. 2

Введение функции (6) в выражение (1) или (5) позволяет исказить эллипс перемагничивания (рис. 1) и придать ему вид петли с начальным участком и участком насыщения. Однако этого недостаточно и требуется также задать зависимость активной составляющей удельного магнитного сопро-

тивления ν_R от магнитной индукции. При низких мгновенных значениях индукции на пересечении с осью абсцисс ширина петли растет, что видно из формул (1), (2) и рис. 1. Однако при возрастании индукции ширина петли стабилизируется [2,5]. То есть, аппроксимирующая функция должна компенсировать влияние роста индукции, пропорционально уменьшая при этом активную составляющую удельного магнитного сопротивления. Оставаясь в множестве дробно-рациональных функций, можно выразить эту зависимость формулой, аналогичной (6)

$$\nu_R = \nu_{R0} \left[1 + (B_{mx} / B_s)^m \right]^{-1}, \quad (7)$$

где ν_{R0} – значение активной составляющей удельного магнитного сопротивления при малых индукциях.

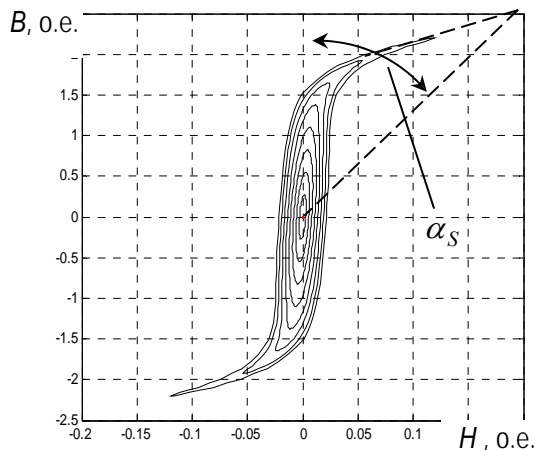


Рис. 3

Дальнейшее усложнение предлагаемой модели гистерезиса связано со взаимодействием двух ортогональных полей, имеющих различные фазы и образующих, вследствие этого, вращающееся магнитное поле. Гистерезис при таком характере поля принято называть векторным [13]. В этом направлении, как указано во введении, проводится большое число исследований и в настоящее время. В первую очередь, представляют интерес работы, в которых приведены результаты исследования пространственного поведения векторов поля и сравнительная характеристика потерь от гистерезиса при вращающемся и знакопеременном полях. Анализ теоретических и экспериментальных результатов в работах [7,8,13] позволяет получить представление об интересующих особенностях процесса векторного гистерезиса. В частности, одной из важнейших особенностей гистерезиса при вращающемся магнитном поле является зависимость потерь от амплитуды магнитной индукции. На основании результатов вышеупомянутых работ можно сформулировать особенности математической модели, отвечающей за учет влияния двух ортогональных полей при наличии насыщения ферромагнетика. А именно: при низких значениях индукции потери от вращательного перемагничивания больше потерь от знакопеременного перемагничивания, однако с ростом амплитуды магнитной индукции потери от вращательного перемагничивания достигают максимума и при индукциях близких к 2 Тл и более снижаются весьма значительно. В то же время потери от знакопеременного перемагничивания монотонно возрастают с ростом амплитуды индукции. Таким образом, требуется, чтобы функция, аппроксимирующая активную часть удельного магнитного сопротивления, начиная с некоторого значения модуля вектора индукции, обеспечивала сужение петли. Что касается реактивной составляющей, то влияние насыщения должно приводить к увеличению удельного магнитного сопротивления, то есть к уменьшению наклона всех участков петли. Поэтому, для учета влияния насыщения по каждой из осей в отдельности и взаимного влияния полей в аппроксимирующей функции должны присутствовать две компоненты. Обычно такие функции представляют суммой либо произведением их компонент. Проведенные численные эксперименты показали, что более благоприятной явилась аддитивная форма записи по сравнению с мультипликативной.

Итак, для обеспечения вращающегося магнитного поля вдоль оси y должна существовать периодическая магнитная индукция вида (4), но с фазой, смещенной на четверть периода, то есть $B_m \cos(\omega t)$. Тогда напряженность поля по этой оси будет иметь вид

$$H_y = -\nu_{Ry} \tilde{B}_y(t) + \nu_{Xy} d\tilde{B}_y / dt. \quad (9)$$

В соответствии с принятой аддитивной формой записи функции, учитывающие влияние насыщения на активную и реактивную составляющие v_R и v_X по каждой из осей и взаимное влияние полей по обеим осям (x, y), представим в виде суммы двух дробно-рациональных выражений, а именно для оси x

$$v_{Rx} = 0,5v_{R0} \left[1 + (B_{mx} / B_s)^m \right]^{-1} + 0,5v_{R0} \left[1 + k_{xy} \left(\|\tilde{B}\| / (B_s / 2) \right)^m \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$v_{Xx} = v_s - \frac{v_s - v_m}{2} \left\{ \left[1 + (B_{mx} / B_s)^m \right]^{-1} + \left[1 + k_{xy} \left(\|\tilde{B}\| / (B_s / 2) \right)^m \right]^{-1} \right\} \quad (11)$$

и аналогично для оси y . В формулах (9), (10) используются следующие определения:

$$k_{xy} = \min(B_{mx}, B_{my}) / \max(B_{mx}, B_{my}), \quad \|\tilde{B}\| = \sqrt{B_{mx1}^2 + B_{my1}^2} \quad (12,13)$$

Первое слагаемое в (10) и (11) вызывает уменьшение активной составляющей удельного магнитного сопротивления с ростом индукции по соответствующей оси, а второе слагаемое вызывает аналогичное уменьшение вследствие влияния поля по ортогональной оси. Коэффициент k_{xy} служит для оценки взаимного влияния полей по осям x и y . Очевидно, что при отсутствии поля по одной из осей этот коэффициент равен нулю. Также следует указать на неодинаковое положение коэффициента "2" в знаменателе второго слагаемого этих двух формул. Вообще говоря, этот коэффициент заметно влияет на форму петли и может быть включен в параметры предлагаемой в данной работе модели, чтобы идентифицировать его при описании свойств конкретного материала.

Отметим, что в выражение (13) для нормы индукции входят амплитуды лишь первых гармоник. Это связано с тем, что при небольшом числе гармоник в зависимости индукции от времени (10) она становится существенно немонотонной на каждой четверти периода. При этом ухудшается сходимость итерационного алгоритма метода Ньютона [6]. Применение в выражении (13) лишь амплитуд первых гармоник сглаживает временную зависимость индукции, устраняя немонотонность, и улучшает сходимость итерационного процесса.

Результаты моделирования. Расчет перемагничивания по формулам (5), (6), (9), (10) при синусоидальном изменении магнитной индукции по обеим осям показал хорошие в качественном отношении результаты. Так годографы вектора H (рис. 4), при малых индукциях представляющие собой окружности, с ростом интенсивности поля постепенно искажаются, превращаясь в "звездообразную" фигуру, а при глубоких насыщениях деформируются до формы ромбовидного четырехугольника. Аналогичные формы этого годографа можно наблюдать в работах [10,13]. Удельные потери в среде от гистерезиса пропорциональны площади петли и вычисляются по формуле [4]

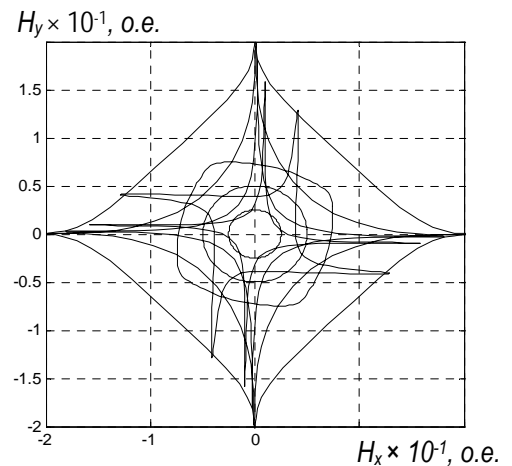


Рис. 4

Удельные потери в среде от гистерезиса пропорциональны площади петли и вычисляются по формуле [4]

$$p = \oint H dB. \quad (14)$$

При вычислении потерь в ортогональных полях интеграл (14) следует определять по каждой из осей в отдельности. Очевидно, что при слабых полях потери при вращательном перемагничивании в два раза больше, чем потери при знакопеременном изменении индукции. Это следует из того факта, что при отсутствии насыщения источники поля (например, ортогональные обмотки) не зависят друг от друга и потери в них, вызванные явлением гистерезиса, суммируются, что дает удвоенное значение этих потерь по сравнению со знакопеременным полем, создаваемым одной обмоткой.

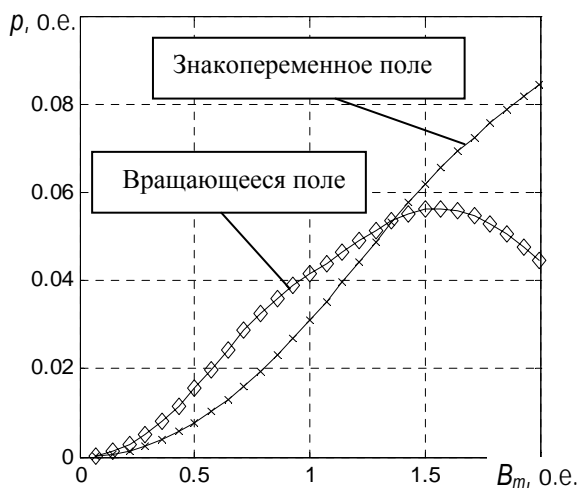


Рис. 5

На рис. 5 показаны зависимости удельных потерь от гистерезиса для двух рассматриваемых режимов намагничивания. Как видно, описанный выше и известный из литературных источников характер зависимости потерь от магнитной индукции [7] качественно отражен расчетными кривыми на рис. 5. Удвоенная величина потерь от вращающегося поля при малых значениях индукции с ростом последней уступает величине потерь от знакопеременного магнитного поля.

Перечислим параметры математической модели симметричного векторного гистерезисного цикла: 1) начальная активная составляющая удельного магнитного сопротивления – v_{R0} ; 2) v_m , v_s – ненасыщенное и насыщенное значения реактивной составляющей удельного магнитного сопротивления; 3) B_s – координата точки перегиба кривой намагничивания; 4) m – показатель "резкости" перегиба кривой намагничивания (крутизны кривой удельного магнитного сопротивления при переходе от ненасыщенного к насыщенному участку); 5) масштабирующие коэффициенты (базисные величины) для магнитной индукции и напряженности поля, которые в модели явно не присутствуют, однако должны определяться при решении задачи идентификации. Определение этих коэффициентов для реальных ферромагнетиков является самостоятельной задачей и выходит за рамки настоящей работы.

Заключение. Предложенная математическая модель гистерезиса хорошо описывает особенности процесса перемагничивания как при знакопеременном, так и вращающемся магнитном поле. Будучи построенной из гладких дробно-рациональных функций, она не вызывает особенностей и неопределенностей при дифференцировании, что благоприятно сказывается при решении нелинейных задач расчета электромагнитного поля. При этом модель дает решение сразу на всем временном периоде изменения поля и поэтому органично внедряется в алгоритм метода временных гармоник для расчета установившегося несинусоидального режима.

1. *Аркадьев В.К.* Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле // Журнал русского физического общества. – 1913. – №45. – С. 312–344.
2. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. – М.: Наука, 1984. – 208 с.
3. *Зирка С.Е., Мороз Ю.И., Мороз Е.Ю.* Инверсная модель магнитного гистерезиса // Техн. электродинамика. – 2010. – №4. – С. 3–7.
4. *Калантаров П.Л., Нейман Л.П.* Теоретические основы электротехники. – Л.-М.: Госэнергоиздат, 1951. – 464 с.
5. *Нейман Л.П.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1949. – 190 с.
6. *Петухов И.С.* Моделирование переменного электромагнитного поля в ферромагнитной проводящей среде методом конечных элементов // Техн. электродинамика. – 2008. – №4. – С. 18–26.
7. *Baily F.G.* The hysteresis of iron and steel in a rotating magnetic field // Phil. Trans. Royal Soc. A. – 1896. – Vol. 187. – Pp. 715–746.
8. *Dlala E., Belahcen A., Fonteyn K., Belkasim M.* Improving loss properties of the Mayergoyz vector hysteresis model / Hysteresis Modeling And Micromagnetics. – 2009. – NIST, Gaithersburg, Maryland, USA. – 101 p.
9. *Enokizono M.* Vector Magnetic Property and Magnetic Characteristic Analysis by Vector Magneto-Hysteretic E&S Model // IEEE Trans. on Magnetics. – 2009. – Vol. 45. – No. 3. – Pp. 1148–1153.
10. *Ivanyi A.* Hysteresis in rotation magnetic field // Physica B-Condensed Matter. – 2000. – Vol. 275. – No.1–3. – Pp. 107–113.
11. *Jiles D.C., Atherton D.L.* Theory of ferromagnetic hysteresis // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 1986. – Vol. 61. – Pp. 48–60.
12. *Matsuo T.* Comparison of Rotational Hysteretic Properties of Isotropic Vector Stop Models // IEEE Trans. on Magnetics. – 2009. – Vol. 45. – No. 3. – Pp. 1194–1197.
13. *Mayergoyz I.D.* Mathematical models of hysteresis. – N.Y.: Springer-Verlag, 1991. – 207 p.
14. *Preisach F.* Uber die magnetische Nachwirkung // Zeitschrift fur Physik. – 1935. – No. 94. – Pp. 277–302.
15. *Stoner E., Wohlfarth E.* A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys // IEEE Trans. On Magn. – 1991. – Vol. 27. – Pp. 3475–3518.
16. *Yanli Zhang, Young Hwan Eum, Wei Li, Dexin Xie, Chang Seop Koh.* An Improved Modeling of Vector Magnetic Properties of Electrical Steel Sheet for FEM Application and Its Experimental Verification // IEEE Trans. On Magnetics. – 2009. – Vol. 45. – No. 3. – Pp. 1162–1165.
17. *Zirka S.E., Moroz Yu.L., Marketos P., Moses A.J., Jiles D.C., Matsuo T.* Generalization of the classical method for calculating dynamic hysteresis loops in grain-oriented electrical steels // IEEE Transactions on Magnetics. – 2008. – Vol. 44. – No. 9. – Pp. 2113–2126.

Запропоновано модель векторного гістерезису для симетричного циклу перемагнічування, яка базується на комбінації дробно-раціональних функцій та явно виражає залежність напруженості магнітного поля від індукції на періоді зміни поля. Модель орієнтована на застосування в методі скінченних елементів та відображає вплив насичення ферромагнетика на величину та характер зміни поля по двох ортогональних напрямках. Характер залежності втрат від величини магнітної індукції при обертовому перемагнічуванні добре погоджується з відомими експериментальними даними. Бібл. 17, рис. 5.

Ключові слова: векторний гістерезис, періодичне електромагнітне поле.

VECTOR HYSTERESIS MODEL AT PERIODIC ELECTROMAGNETIC FIELD

I.S.Petukhov

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,
pr. Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukrainee-mail: igor_petu@mail.ru

A vector hysteresis model for the symmetric magnetization cycle, based on a combination of fractional rational functions was proposed. The model explicitly expresses dependences of field strength from induction. The model is intended to be used with finite element method and represents the influence of the saturation of ferromagnetic on the magnitude of the magnetic field and its wave form in two orthogonal directions. The dependence of losses on the magnetic induction under condition of rotational magnetization is in good agreement with known experimental data. References 17, figures 5.

Key words: vector hysteresis, periodic electromagnetic field.

1. Arkadiev V.K. The theory of electromagnetic field in ferromagnetic metal // Zhurnal russkogo fizicheskogo obshchestva. – 1913. – № 45. – Pp. 312–344. (Rus)
2. Vonsovskiy S.V. The magnetism. – Moskva: Nauka, 1984. – 208 p. (Rus)
3. Zirka S.E., Moroz Yu.I., Moroz E.Yu. An inverse model of magnetic hysteresis // Tekhnichna elektrodynamika. – 2010. – №4. – Pp. 3–7. (Rus)
4. Kalantarov P.L., Neyman L.R. Theoretical fundamentals of electrical engineering. – Leningrad-Moskva: Gosenergoizdat, 1951. – 464 p. (Rus)
5. Neiman L.R. The skin effect in ferromagnetic medium. – Moskva-Leningrad: Gosenergoizdat, 1949. – 190 p. (Rus)
6. Petukhov I.S. Finite element modelling of the alternating electromagnetic field in ferromagnetic conductive medium // Tekhnichna elektrodynamika. – 2008. – № 4. – Pp. 18–26. (Rus)
7. Baily F.G. The hysteresis of iron and steel in a rotating magnetic field // Phil. Trans. Royal Soc. A. – 1896. – Vol. 187. – Pp. 715–746.
8. Dlala E., Belahcen A., Fonteyn K., Belkasim M. Improving loss properties of the Mayergoz vector hysteresis model / Hysteresis Modeling And Micromagnetics. – 2009. – NIST, Gaithersburg, Maryland, USA. – 101 p.
9. Enokizono M. Vector Magnetic Property and Magnetic Characteristic Analysis by Vector Magneto-Hysteretic E&S Model // IEEE Trans. on Magnetics. – 2009. – Vol. 45. – No. 3. – Pp. 1148–1153.
10. Ivanyi A. Hysteresis in rotation magnetic field // Physica B-Condensed Matter. – 2000. – Vol. 275. – No.1–3. – Pp. 107–113.
11. Jiles D.C., Atherton D.L. Theory of ferromagnetic hysteresis // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 1986. – Vol. 61. – Pp. 48–60.
12. Matsuo T. Comparison of Rotational Hysteretic Properties of Isotropic Vector Stop Models // IEEE Trans. on Magnetics. – 2009. – Vol. 45. – No. 3. – Pp. 1194–1197.
13. Mayergoz I.D. Mathematical models of hysteresis. – N.Y.: Springer-Verlag, 1991. – 207 p.
14. Preisach F. Uber die magnetische Nachwirkung // Zeitschrift fur Physik. – 1935. – No. 94. – Pp. 277–302.
15. Stoner E., Wohlfarth E. A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys // IEEE Trans. On Magn. – 1991. – Vol. 27. – Pp. 3475–3518.
16. Yanli Zhang, Young Hwan Eum, Wei Li, Dexin Xie, Chang Seop Koh. An Improved Modeling of Vector Magnetic Properties of Electrical Steel Sheet for FEM Application and Its Experimental Verification // IEEE Trans. On Magnetics. – 2009. – Vol. 45. – No. 3. – Pp. 1162–1165.
17. Zirka S.E., Moroz Yu.L., Marketos P., Moses A.J., Jiles D.C., Matsuo T. Generalization of the classical method for calculating dynamic hysteresis loops in grain-oriented electrical steels // IEEE Transactions on Magnetics. – 2008. – Vol. 44. – No. 9. – Pp. 2113–2126.

Надійшла 21.03.2013

Остаточний варіант 14.05.2013