

И. П. Стадник, докт. техн. наук, Д. М. Филиппов (Таврический нац. ун-т, Симферополь)

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ДВИЖУЩИХСЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПРОВОДНИКАХ С ИЛЛЮСТРАЦИЕЙ НА ЛИНЕЙНОМ АСИНХРОННОМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕ

Приведен вывод системы интегральных уравнений относительно плотностей вихревых токов и микротоков в случае расположения протяженных ферромагнитных проводников, некоторые из которых совершают прямолинейное и равномерное движение, в синусоидальном плоскопараллельном магнитном поле. Метод проиллюстрирован на примере линейного асинхронного электродвигателя.

Наведено виведення системи інтегральних рівнянь відносно щільностей вихрових струмів і мікрострумів у випадку розташування протяжних феромагнітних провідників, деякі з яких здійснюють прямолінійний і рівномірний рух, в синусоїдальному плоскопаралельному магнітному полі. Метод проілюстровано на прикладі лінійного асинхронного електродвигуна.

Оптимизация геометрических параметров линейных асинхронных электродвигателей является важным этапом проектирования таких двигателей. Обычно применяют приближенные методы расчета электромагнитного поля и тягового усилия линейного асинхронного электродвигателя [6]. В

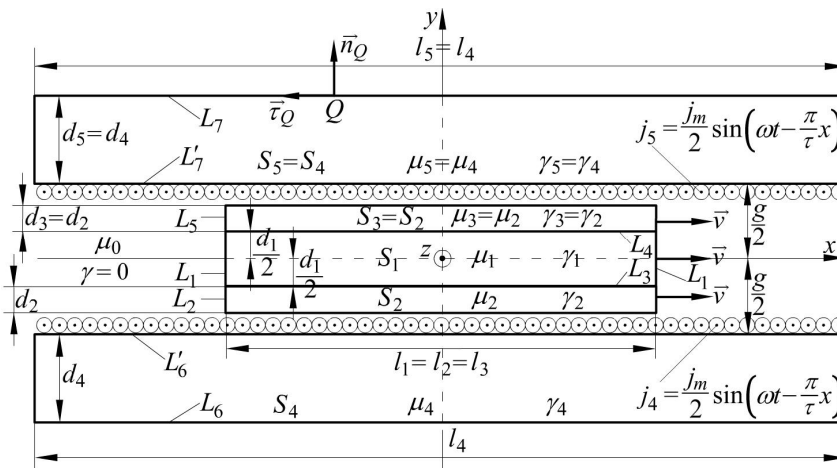


Рис. 1

данной статье для решения этой задачи предлагается метод интегральных уравнений. При этом используется одно существенное допущение: ширина двигателя (размер в направлении протекания рабочего тока в обмотке, то есть в направлении оси z (рис. 1)) существенно больше других размеров.

В [2,3] такая задача (при всех неподвижных проводниках) решалась методом собственных функций, который в плане временных затрат на вычисления не является оптимальным. В [4] рассматривался случай ферромаг-

нитных неподвижных проводников.

Вывод системы интегральных уравнений относительно плотности тока и линейной плотности микротока. Метод расчета вихревых токов в протяженных ферромагнитных проводниках проиллюстрируем на примере модели линейного асинхронного электродвигателя (сечение плоскостью xOy показано на рис. 1), то есть рассмотрим систему n протяженных ферромагнитных проводников, расположенных в заданном синусоидальном во времени плоскопараллельном магнитном поле. На рис. 1 $n = 5$. Несколько проводников (например, три проводника, для определенности первый, второй и третий) соединены жестко друг с другом и совершают равномерное и прямолинейное движение вдоль оси x со скоростью v (рис. 1). Как будет показано в следующей статье, конструирование подвижной части из разнородных проводников позволяет увеличить тяговое усилие и жесткость подвижной части. Так как предполагается, что размер каждого проводника вдоль оси z бесконечен и первичное магнитное поле плоскопараллельное (зависит только от x и y), то отсюда следует, что плотность тока во всех проводниках имеет только z -овую компоненту ($\vec{\delta} = \vec{e}_z \delta$). Также только z -овую компоненту имеет линейная плотность микротока на границах ферромагнитных проводников

($\vec{j} = \vec{e}_z j$). Будем считать кусочно-постоянными магнитную проницаемость и удельную проводимость каждого проводника μ_k и γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Выразим суммарную плотность тока в сечении проводника (плотность тока проводимости плюс плотность микротоков, $\vec{\delta} + \vec{\delta}_{\text{микро}}$) через плотность тока проводимости $\vec{\delta}$. Заметим, что приведенный ниже вывод справедлив и в общем случае трехмерных электромагнитных систем с кусочно-постоянной магнитной проницаемостью. Внутри проводника:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{\delta} + \mu_0 \vec{\delta}_{\text{микро}}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (1)$$

Подставляя третье из этих выражений в первое и учитывая, что $\mu = \text{const}$, находим

$$\text{rot} \vec{H} = \mu_0 \mu^{-1} \vec{\delta} + \mu_0 \mu^{-1} \vec{\delta}_{\text{микро}}.$$

Из последнего выражения и второго выражения (1) находим

$$\vec{\delta} = \mu_0 \mu^{-1} \vec{\delta} + \mu_0 \mu^{-1} \vec{\delta}_{\text{микро}}.$$

Отсюда

$$\vec{\delta} + \vec{\delta}_{\text{микро}} = \mu \mu_0^{-1} \vec{\delta}. \quad (2)$$

Так как в рассматриваемом случае плотность тока имеет только z -овую компоненту, то и векторный потенциал будет иметь только z -овую компоненту.

Далее будем записывать выражения для комплексных амплитуд величин, не обозначая их точкой сверху. Так, для комплексной амплитуды проекции на ось z векторного потенциала на сечении r -го проводника S_r ($r, k = 1, 2, \dots, n$) получаем выражение [2]

$$A_r(M) = A_0(M) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \ln \frac{1}{r_{MN}} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi L} \int_L j(Q) \ln \frac{1}{r_{MQ}} dL_Q + C_r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь $M \in S_r$, $N \in S_k$, $Q \in L$ (L — границы ферромагнетиков, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_q$, q — число таких границ; на рис. 1. $q = 7$, линия L_1 состоит из двух частей), $A_0(M)$ — комплексная амплитуда проекции на ось z векторного потенциала первичного магнитного поля, r_{MN} и r_{MQ} — расстояния между точками M и N и точками M и Q соответственно, $\delta_k(N)$ — комплексная амплитуда проекции на ось z плотности тока проводимости на сечении k -го проводника S_k , $j(Q)$ — комплексная амплитуда проекции на ось z линейной плотности микротока на границе раздела L между ферромагнетиками, μ_k — магнитная проницаемость материала k -го проводника, C_r — константы, зависящие от режима работы системы.

Для комплексной амплитуды проекции на ось z напряженности электрического поля \vec{E} внутри проводника можно записать выражение

$$E = -i\omega A - \partial\varphi/\partial z.$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$, ω — круговая частота, φ — комплексная амплитуда скалярного потенциала.

Так как, в силу плоскопараллельности магнитного поля, зависимость от z отсутствует, то

$$E = -i\omega A. \quad (4)$$

Поскольку первый, второй и третий проводники движутся, то закон Ома в дифференциальной форме для внутренних точек этих проводников для мгновенных значений будет выглядеть так:

$$\vec{\delta}_r = \gamma_r (\vec{E}_r + [\vec{v}, \vec{B}_r]), \quad r = 1, 2, 3.$$

Здесь $\vec{\delta}_r$, \vec{E}_r и \vec{B}_r — соответственно плотность тока, напряженность электрического поля и индукция магнитного поля на сечении r -го проводника; S_r , γ_r — удельная проводимость материала r -го проводника.

Учитывая плоскопараллельность магнитного поля и то, что $\vec{v} = \vec{e}_x v$, получим выражения для комплексных амплитуд проекций на ось z плотности тока:

$$\delta_r = \gamma_r E_r + \gamma_r v B_{ry}, \quad r = 1, 2, 3.$$

Для плоскопараллельного магнитного поля $B_{ry} = -\partial A_r / \partial x$ ($r = 1, 2, 3$), поэтому с учетом (4) получим

$$\delta_r = -i\omega\gamma_r A_r - \gamma_r v \partial A_r / \partial x, \quad r = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Для четвертого, пятого и т.д. проводников

$$\delta_r = -i\omega\gamma_r A_r, \quad r = 4, 5, \dots, n. \quad (6)$$

Выражение (6) можно получить из (5), полагая в последнем $v = 0$.

Подставляя в (5) и (6) выражение для векторного потенциала (3), получим:

$$\begin{aligned} \delta_r = & -\frac{i\omega\gamma_r}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \ln \frac{1}{r_{MN}} dS_N - \frac{i\omega\gamma_r \mu_0}{2\pi} \int_L j(N) \ln \frac{1}{r_{MN}} dL_N - i\omega\gamma_r A_0(M) - \\ & -i\omega\gamma_r C_r - \gamma_r v_r \frac{\partial A_0}{\partial x}(M) + \frac{\gamma_r v_r}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{e}_x)}{r_{NM}^2} dS_N + \frac{\gamma_r v_r \mu_0}{2\pi} \int_L j(N) \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{e}_x)}{r_{NM}^2} dL_N, \\ & M \in S_r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7)

$$v_r = \begin{cases} v, & \text{если } r = 1, 2, 3. \\ 0, & \text{если } r = 4, 5, \dots, n. \end{cases} \quad (8)$$

Постоянные C_r ($r = 1, 2, \dots, n$) находим из условий $\int_{S_r} \delta_r(M) dS_M = 0$ (предполагается, что провод-

ники не подключены к источникам). Интегрируя правую часть (7) по S_r ($r = 1, 2, \dots, n$), приравнявая результат к нулю и выражая отсюда C_r ($r = 1, 2, \dots, n$), получим:

$$\begin{aligned} C_r = & -\frac{1}{2\pi S_r} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) f_r(N) dS_N - \frac{\mu_0}{2\pi S_r} \int_L j(N) f_r(N) dL_N - \frac{1}{S_r} \int_{S_r} A_0(M) dS_M + \\ & + \frac{iv_r}{\omega S_r} \int_{S_r} \frac{\partial A_0}{\partial x}(M) dS_M - \frac{iv_r}{2\pi\omega S_r} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) g_r(N) dS_N - \frac{iv_r \mu_0}{2\pi\omega S_r} \int_L j(N) g_r(N) dL_N. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь v_r определяется формулой (8)

$$f_r(N) = \int_{S_r} \ln \frac{1}{r_{MN}} dS_M, \quad N \in S_k \quad \text{или} \quad L, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$g_r(N) = \int_{S_r} \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{e}_x)}{r_{NM}^2} dS_M, \quad N \in S_k \quad \text{или} \quad L, \quad r = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Подставляя (9) в (7), получим

$$\delta_r(M) = \frac{\gamma_r}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) F(M, N) dS_N + \frac{\gamma_r \mu_0}{2\pi} \int_L j(N) F(M, N) dL_N + G(M), \quad M \in S_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где

$$G(M) = -i\omega\gamma_r A_0(M) - \gamma_r v_r \frac{\partial A_0}{\partial x}(M) + \frac{i\omega\gamma_r}{S_r} \int_{S_r} A_0(M) dS_M + \frac{\gamma_r v_r}{S_r} \int_{S_r} \frac{\partial A_0}{\partial x}(M) dS_M, \quad (13)$$

$$F(M, N) = -i\omega \ln \frac{1}{r_{MN}} + v_r \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{e}_x)}{r_{NM}^2} + \frac{i\omega}{S_m} f_r(N) - \frac{v_r}{S_r} g_r(N). \quad (14)$$

В формулах (13), (14) $M \in S_r$, $r = 1, 2, \dots, n$, v_r находится по формуле (8).

Таким образом, получено первое интегральное уравнение (12) относительно неизвестных δ и j . Второе интегральное уравнение выводим из граничного условия

$$H_{\tau}^{+}(Q) = H_{\tau}^{-}(Q), \quad Q \in L. \quad (15)$$

Здесь знаком «+» обозначена область, из которой выходит единичная нормаль \bar{n}_Q к границе L , а знаком «-» — область, в которую входит нормаль. Единичный касательный вектор $\bar{\tau}_Q$ в точке Q направлен так, что векторы $\bar{\tau}_Q$, \bar{e}_z и \bar{n}_Q составляют правую тройку векторов.

Граничное условие (15) можно переписать так:

$$\frac{B_{\tau}^{+}(Q)}{\mu^{+}(Q)} = \frac{B_{\tau}^{-}(Q)}{\mu^{-}(Q)}, \quad Q \in L. \quad (16)$$

Здесь $\mu^{+}(Q)$ и $\mu^{-}(Q)$ — кусочно-постоянные функции от Q . Например, если $Q \in L_7$ и нормаль \bar{n}_Q выбрана как показано на рис. 1, то $\mu^{+}(Q) = \mu_5$, а $\mu^{-}(Q) = \mu_0$.

Для предельных значений комплексных амплитуд тангенциальных компонент индукции входящих в (16) можно получить выражения

$$B_{\tau}^{+}(Q) = B_{0\tau}(Q) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \frac{(\bar{r}_{NQ}, \bar{n}_Q)}{r_{NQ}^2} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_L j(P) \frac{(\bar{r}_{PQ}, \bar{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dL_P - \frac{\mu_0 j(Q)}{2}, \quad (17)$$

$$B_{\tau}^{-}(Q) = B_{0\tau}(Q) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \frac{(\bar{r}_{NQ}, \bar{n}_Q)}{r_{NQ}^2} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_L j(P) \frac{(\bar{r}_{PQ}, \bar{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dL_P + \frac{\mu_0 j(Q)}{2}, \quad (18)$$

где $Q, P \in L$.

Подставляя (17) и (18) в (16), получим второе интегральное уравнение относительно δ и j , в котором $Q \in L$, $\lambda(Q) = [\mu^{-}(Q) - \mu^{+}(Q)] / [\mu^{-}(Q) + \mu^{+}(Q)]$,

$$j(Q) = \frac{\lambda(Q)}{\pi \mu_0} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \frac{(\bar{r}_{NQ}, \bar{n}_Q)}{r_{NQ}^2} dS_N + \frac{\lambda(Q)}{\pi} \int_L j(P) \frac{(\bar{r}_{PQ}, \bar{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dL_P + \frac{2\lambda(Q)}{\mu_0} B_{0\tau}(Q). \quad (19)$$

Заметим, что, если пренебречь магнитным полем вихревых токов, то интегральные уравнения (12) и (19) соответственно принимают вид:

$$\delta_r(M) = \frac{\mu_0 \gamma_r}{2\pi} \int_L j(Q) F(M, Q) dL_Q + G(M), \quad M \in S_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

$$j(Q) = \frac{\lambda(Q)}{\pi} \int_L j(P) \frac{(\bar{r}_{PQ}, \bar{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dL_P + \frac{2\lambda(Q)}{\mu_0} B_{0\tau}(Q), \quad Q \in L. \quad (21)$$

В этом случае необходимо решить интегральное уравнение (21), а затем простым интегрированием найти плотность вихревых токов из (20).

Расчет первичного магнитного поля. Первичное магнитное поле в линейном асинхронном электродвигателе создается двумя токовыми слоями, расположенными на двух поверхностях неподвижной части двигателя. Мгновенное значение проекции на ось z линейной плотности свободного тока на каждой поверхности имеет вид (рис. 1):

$$j_4 = j_5 = \frac{j_m}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x_N\right), \quad (22)$$

где $j_m/2$ — амплитуда, ω — круговая частота, τ — полюсное деление.

Выражение (22) эквивалентно тому, что токовый слой движется вдоль оси x с синхронной скоростью

$$v_c = \omega\tau/\pi. \quad (23)$$

Скорость движения первого, второго и третьего проводников: $0 \leq v \leq v_c$.

Комплексная амплитуда каждого токового слоя равна $(j_m/2)e^{-i\frac{\pi}{\tau}x_N}$.

Комплексную амплитуду проекции на ось z векторного потенциала $A_0(M)$ можно найти численным интегрированием:

$$A_0(M) = -\frac{\mu_0 j_m}{8\pi} \int_{-\frac{l_4}{2}}^{\frac{l_4}{2}} e^{-i\frac{\pi}{\tau}x_N} \left\{ \ln \left[(x_N - x)^2 + \left(\frac{g}{2} + y\right)^2 \right] + \ln \left[(x_N - x)^2 + \left(\frac{g}{2} - y\right)^2 \right] \right\} dx_N. \quad (24)$$

Здесь x, y — координаты точки M на сечении r -го проводника S_r ($r = 1, 2, \dots, n$), а x_N — x -я координата точки N на поверхности неподвижных элементов, обращенных к подвижному элементу.

Производную $\frac{\partial A_0}{\partial x}(M)$, входящую в интегральное уравнение (12), можно найти из (24)

$$\frac{\partial A_0}{\partial x}(M) = \frac{\mu_0 j_m}{4\pi} \int_{-\frac{l_4}{2}}^{\frac{l_4}{2}} \frac{(x_N - x)e^{-i\frac{\pi}{\tau}x_N}}{(x_N - x)^2 + \left(\frac{g}{2} + y\right)^2} dx_N + \frac{\mu_0 j_m}{4\pi} \int_{-\frac{l_4}{2}}^{\frac{l_4}{2}} \frac{(x_N - x)e^{-i\frac{\pi}{\tau}x_N}}{(x_N - x)^2 + \left(\frac{g}{2} - y\right)^2} dx_N. \quad (25)$$

Приближенное выражение для $A_0(M)$ можно найти, полагая два токовых слоя бесконечными как в положительном направлении x , так и в отрицательном.

Решая краевую задачу для комплексной амплитуды A_0 , получим

$$A_{0I} = C_I \left(e^{\frac{\pi}{\tau}y} + e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \right) e^{-i\frac{\pi}{\tau}x}, \quad A_{0II} = C_{II} e^{\frac{\pi}{\tau}y} e^{-i\frac{\pi}{\tau}x},$$

$$A_{0III} = C_{III} e^{-\frac{\pi}{\tau}y} e^{-i\frac{\pi}{\tau}x}, \quad (26)$$

где $A_{0I}, A_{0II}, A_{0III}$ — комплексные амплитуды проекции векторного потенциала на ось z соответственно в областях I, II, III (рис. 2),

$$C_I = \frac{\mu_0 j_m \tau}{4\pi} e^{-\frac{\pi}{\tau} \frac{g}{2}}, \quad C_{II} = C_{III} = \frac{\mu_0 j_m \tau}{4\pi} \left(e^{\frac{\pi}{\tau} \frac{g}{2}} + e^{-\frac{\pi}{\tau} \frac{g}{2}} \right).$$

Выражения (26) подставим в (13) и найдем интегралы, входящие в (13)

$$\int_{S_1} A_0(M) dS_M = \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} C_I \left(e^{\frac{\pi}{\tau}y} + e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \right) e^{-i\frac{\pi}{\tau}x} dx dy = \frac{4C_I \tau^2}{\pi^2} \left(e^{\frac{\pi}{\tau} \frac{d_1}{2}} - e^{-\frac{\pi}{\tau} \frac{d_1}{2}} \right) \sin \frac{\pi l_1}{2\tau}, \quad (27)$$

$$\int_{S_2} A_0(M) dS_M = \int_{S_3} A_0(M) dS_M = \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} C_I \left(e^{\frac{\pi}{\tau}y} + e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \right) e^{-i\frac{\pi}{\tau}x} dx dy =$$

$$= \frac{4C_I \tau^2}{\pi^2} e^{-\frac{\pi}{\tau} \frac{d_1}{2}} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\tau} d_2} - e^{\frac{\pi}{\tau} d_1} + e^{\frac{\pi}{\tau} (d_1 + d_2)} \right) \sin \frac{\pi l_1}{2\tau}, \quad (28)$$

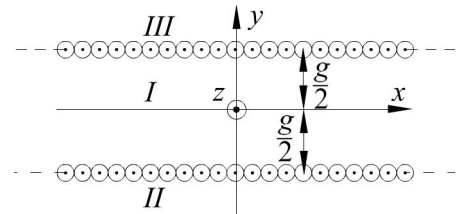


Рис. 2

$$\int_{S_4} A_0(M) dS_M = \int_{S_5} A_0(M) dS_M = \int_{-\frac{g}{2}-d_4}^{\frac{l_4}{2}} \int_{-\frac{l_4}{2}}^{\frac{l_4}{2}} C_{II} e^{\frac{\pi}{\tau} y} e^{-i\frac{\pi}{\tau} x} dx dy = \frac{2C_{II}\tau^2}{\pi^2} e^{-\frac{\pi g}{\tau^2}} \left(1 - e^{-\frac{\pi d_4}{\tau}}\right) \sin \frac{\pi l_4}{2\tau}. \quad (29)$$

Производная по x от первого выражения (26), входящая в (13), будет отличаться от этого выражения множителем $(-i\pi/\tau)$, поэтому и соответствующие интегралы от этой производной, входящие также в (13), будут отличаться от выражений (27) и (28) множителем $(-i\pi/\tau)$.

Комплексная амплитуда касательной компоненты индукции первичного магнитного поля на границах ферромагнетиков $B_{0\tau}(Q)$, входящая в интегральное уравнение (19), также может быть найдена численно или аналитически. Для численного отыскания $B_{0\tau}(Q)$ можно получить такую формулу:

$$B_{0\tau}(Q) = \frac{\mu_0 j_m}{4\pi} \int_{-\frac{l_4}{2}}^{\frac{l_4}{2}} e^{-i\frac{\pi}{\tau} x_N} \left[\frac{(x-x_N)n_{Qx} + \left(y - \frac{g}{2}\right)n_{Qy}}{(x-x_N)^2 + \left(y - \frac{g}{2}\right)^2} + \frac{(x-x_N)n_{Qx} + \left(y + \frac{g}{2}\right)n_{Qy}}{(x-x_N)^2 + \left(y + \frac{g}{2}\right)^2} \right] dx_N. \quad (30)$$

Здесь n_{Qx} и n_{Qy} – проекции единичной нормали к границе L в точке Q соответственно на оси x и y .

Аналитическое выражение для комплексной амплитуды $B_{0\tau}(Q)$ можно получить из (26). Из рис. 1 видно, что единичный вектор \vec{r}_Q может быть направлен либо вдоль оси x или против направления x , либо вдоль y или против y (в зависимости от того, на каком отрезке находится точка Q и в каком направлении выбрана нормаль \vec{n}_Q). Так, на линии L_7 вектор \vec{r}_Q направлен против x . Поэтому нам необходимо из выражения (26) найти $B_{0x} = \partial A_0 / \partial y$, а $B_{0y} = -\partial A_0 / \partial x$.

Нахождение выражений для функций $f_r(N)$ и $g_r(N)$. При вычислении интегралов использовались таблицы интегралов [1], а также математическая программа Mathcad 14.

Для всех случаев расположения точки N оказываются справедливыми следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_r(N) = \int_{S_r} \ln \frac{1}{r_{MN}} dS_M = & -\frac{1}{2} \left\{ (a-x)(b-y) \ln \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 \right] + \right. \\ & + (a+x)(b-y) \ln \left[(a+x)^2 + (b-y)^2 \right] + (a-x)(b+y) \ln \left[(a-x)^2 + (b+y)^2 \right] + \\ & + (a+x)(b+y) \ln \left[(a+x)^2 + (b+y)^2 \right] + (b-y)^2 \operatorname{arctg} \frac{a-x}{b-y} + (b+y)^2 \operatorname{arctg} \frac{a-x}{b+y} + \\ & + (b-y)^2 \operatorname{arctg} \frac{a+x}{b-y} + (b+y)^2 \operatorname{arctg} \frac{a+x}{b+y} + (a-x)^2 \operatorname{arctg} \frac{b-y}{a-x} + (a-x)^2 \operatorname{arctg} \frac{b+y}{a-x} \\ & \left. + (a+x)^2 \operatorname{arctg} \frac{b-y}{a+x} + (a+x)^2 \operatorname{arctg} \frac{b+y}{a+x} \right\} + 6ab, \quad r = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} g_r(N) = \int_{S_r} \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{e}_x)}{r_{NM}^2} dS_M = & \frac{1}{2} \left\{ (b-y) \ln \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 \right] - (b-y) \ln \left[(a+x)^2 + (b-y)^2 \right] + \right. \\ & + (b+y) \ln \left[(a-x)^2 + (b+y)^2 \right] - (b+y) \ln \left[(a+x)^2 + (b+y)^2 \right] \left. \right\} + (a-x) \operatorname{arctg} \frac{b-y}{a-x} - \\ & - (a+x) \operatorname{arctg} \frac{b-y}{a+x} + (a-x) \operatorname{arctg} \frac{b+y}{a-x} - (a+x) \operatorname{arctg} \frac{b+y}{a+x}, \quad r = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (32)$$

В формулах (31) и (32) x – координата точки N ($x = x_N$), а координата $y = y_N - y_{ur}$, где y_{ur} — y -координата центра прямоугольника S_r ; $a = l_r/2$, $b = d_r/2$, l_r и d_r указаны на рис. 1.

Формула (31) допускает упрощение для случая, когда вычисляется функция $f_r(N)$ и точка N принадлежит границе r -го прямоугольника. Аналогично формула (32).

Формула для расчета тягового усилия линейного асинхронного электродвигателя. Используя формулу Ампера для проекции на ось x силы, действующей на подвижную часть двигателя, можно получить следующую формулу:

$$F_x(t) = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{k=1}^3 \mu_k \int_{S_k} \delta_k(P, t) B_y(P, t) dS_P - \int_{L^*} j(P, t) B_y(P, t) dL_P. \quad (33)$$

Здесь $\delta_k(P, t)$ – мгновенное значение проекции на ось z плотности свободного тока на сечении k -го проводника, $j(P, t)$ – мгновенное значение линейной плотности микротока на границах раздела ферромагнитных сред L^* подвижной части ($L^* = L_1 + L_2 + \dots + L_5$), $B_y(P, t)$ – мгновенное значение проекции на ось y индукции магнитного поля, созданной первичными и вторичными источниками, расположенными на неподвижной части электродвигателя.

Мгновенные значения $\delta_k(P, t)$ и $j(P, t)$ находятся путем решения системы интегральных уравнений (12) и (19) (находятся комплексные амплитуды $\delta_k(P)$, $P \in S_k$, $k = 1, 2, 3$ и $j(P)$, $P \in L^*$) и перехода к мгновенным значениям.

Решением системы (12) и (19) находятся также комплексные амплитуды $\delta_k(P)$, $P \in S_k$, $k = 4, 5, \dots, n$ и $j(P)$, $P \in L - L^* = L_6 + L_7 + \dots + L_q$. После этого находятся комплексные амплитуды $B_y(P)$ по формуле

$$B_y(P) = \frac{\mu_0 j_m}{4\pi} \int_{L_6} e^{-i\frac{\pi}{\tau} x_N} \frac{(x_P - x_N)}{r_{NP}^2} dL_N + \frac{\mu_0 j_m}{4\pi} \int_{L_7} e^{-i\frac{\pi}{\tau} x_N} \frac{(x_P - x_N)}{r_{NP}^2} dL_N + \\ + \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{k=4}^n \mu_k \int_{S_k} \delta_k(N) \frac{(x_P - x_N)}{r_{NP}^2} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L-L^*} j(N) \frac{(x_P - x_N)}{r_{NP}^2} dL_N.$$

После расчета комплексной амплитуды $B_y(P)$ производим переход к мгновенным значениям $B_y(P, t)$ и подставляем это выражение в (33).

Выводы. Задача расчета вихревых токов в движущихся ферромагнитных проводниках, например, в асинхронных двигателях, сводится к системе интегральных уравнений второго рода относительно плотности свободного тока и плотности микротока. Для случая линейного асинхронного электродвигателя интегралы, входящие в уравнения системы, берутся аналитически.

1. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.
2. Колесников Э.В. Квазистационарные электромагнитные поля в системах с однонаправленным полем // Электромеханика. – 1970. – №12.
3. Стадник И.П. Переходные процессы в катушках с массивными сердечниками в случае плоскопараллельного магнитного поля // Электромеханика. – 1971. – №10. – С. 1068–1082.
4. Стадник И.П., Горская И.Ю. Расчет вихревых токов в массивных протяженных проводниках при частотах, превышающих первое характеристическое число // Электромеханика. – 1983. – №1. – С.16–24.
5. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. – К.: Техника, 1974. – 352 с.
6. Ямамура С. Теория линейных асинхронных двигателей / Перевод с англ. – Л.: «Энергоатомиздат», 1983.

Надійшла 16.10.09