

А.В.Басова, В.Ф.Іванков, канд. техн. наук (ВАТ «Запоріжтрансформатор», Запоріжжя)

РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРИ В ПЕРЕРІЗІ СТРИЖНІВ МАГНЕТНИХ СИСТЕМ ТРАНСФОРМАТОРІВ ТА РЕАКТОРІВ

Розглянуто розрахунок температури в перерізі стрижня трансформатора по групах пакетів, які відокремлені один від одного охолоджувальними каналами. Для еквівалентного групи пакетів прямокутника з анізотропною теплопровідністю та змішаними граничними умовами представлено розв'язки крайової задачі методами скінченних інтегральних перетворень і розділення змінних. Надані результати чисельного моделювання для пакетів з реальною східчастою формою зовнішньої межі, зокрема, з ізоляцією, а також розрахунку тривимірного розподілу втрат і нагрівів у вставках стрижня електричного реактора.

Рассмотрен расчет температуры в сечении стержня трансформатора по группам пакетов, которые отделены друг от друга охлаждающими каналами. Для эквивалентного группе пакетов прямоугольника с анизотропной теплопроводностью и со смешанными граничными условиями представлены решения краевой задачи методами конечных интегральных преобразований и разделения переменных. Даны результаты численного моделирования для пакетов с реальной ступенчатой формой внешней границы, в том числе, с изоляцией, а также расчета трехмерного распределения потерь и нагревов во вставках стержня электрического реактора.

Постановка проблеми. Значні нагріву в магнетних системах (МС) силових трансформаторів і електричних реакторів недопустимі, оскільки теплове руйнування ізоляції призводить до замикань пластин електротехнічної сталі (ЕТС) і до розвитку так званих внутрішніх пожеж. Тому в перерізі стрижнів застосовують поздовжні (уздовж планарної шихтовки пластин) і поперечні охолоджувальні канали. Також повинен контролюватися нагрів МС шунтувальних електричних реакторів, зокрема, через значні випинання магнетних потоків в повітряних проміжках по висоті стрижнів.

У загальному випадку проблема вимагає розгляду задачі теплообміну в тривимірній області МС трансформаторів і реакторів з анізотропною теплопровідністю, з неоднорідними і нелінійними умовами теплообміну на межах підобластей і з нерівномірним розподілом внутрішніх джерел нагріву.

Аналіз відомих робіт. При аналітичних розв'язках [2, 4–10] задача про розподіл температури в МС трансформатора зводиться до розгляду нагріву в перерізах стрижня. Відокремлені охолоджувальними каналами групи пакетів із східчастим контуром зовнішньої поверхні стрижня замінюються прямокутником з еквівалентною площею та розмірами \tilde{X} і \tilde{Y} (рис. 1).

На сторонах $i=1-4$ прямокутника вважаються відомими коефіцієнти тепловіддачі α_i та перевищення температур Θ_i масла над температурою зовнішнього середовища. Теплопровідність прямокутника анізотропна ($\lambda_x \neq \lambda_y$) і визначається [5] параметрами шихтованої ЕТС.

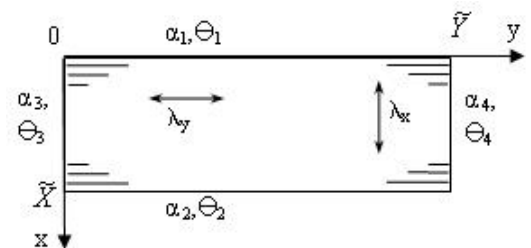


Рис. 1

Об'ємна щільність q_v втрат від основного магнетного потоку в МС розподілена в перерізі пакету рівномірно. Крайні пакети МС не розглядаються через іншу природу втрат – від полів розсіяння обвиток.

В роботі [6] розв'язок задачі для прямокутника отримано у вигляді ряду по тригонометричних і гіперболічних косинусах при спрощених граничних умовах: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$ і $\Theta_i = \text{const}$. Таке спрощення приймається і в інших роботах [2,7,8,10].

Аналіз нагріву стрижня в [7] також зведено до розв'язку задачі про розподіл температури в анізотропному прямокутнику з граничними умовами, які не залежать від температури зовнішнього масла, що охолоджує.

Окремий випадок кругового перерізу стрижня трансформатора без каналів з ортотропними тепловими властивостями розглянуто в [10]. Спрощений розв'язок представлено у вигляді суми розв'язків двох одновимірних задач у ортогональних напрямках.

Аналізуючи загальну проблему охолодження стрижня, в [8] для двовимірної задачі рівняння Пуассона усередині стрижня перетворене до рівняння Лапласа. Показана можливість дослідження температури в стрижні з використанням методу аналогій між електричними і тепловими задачами.

У [2] оцінка нагріву стрижня дана з використанням розв'язку одновимірної задачі уздовж листів сталі, нехтуючи теплопередачею упоперек листів пакету. Також, при допущенні про розділення теплового потоку по ортогональних напрямках розглянуто покращення наближеного методу [10]. Найбільш детально розподіл температури у перерізі стрижня аналізується із застосуванням розв'язку [6].

За спрощених граничних умов $\alpha_i = \text{const}$ і $\Theta_i = \text{const}$ розподіл температури в прямокутнику у роботі [9] описано у вигляді багаточлена другого степеня.

Наближений метод розрахунку двовимірного стаціонарного температурного поля шихтованого пакету прямокутного перерізу при несиметричних умовах охолодження $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, але при спрощеній граничній умові $\Theta_i = 0$ наведено у [4]. Розв'язок задачі отримано методом скінченних інтегральних перетворень (МСІП). Проте за результатами аналізу відзначено, що цей розв'язок у вигляді ряду по власних числах відповідного трансцендентного рівняння, яке зв'язує коефіцієнти тепловіддачі і теплопровідності, «має недостатню збіжність ряду».

МСІП застосовано і в галузевій методиці [5] розрахунку нагріву МС трансформатора. На відміну від [4], методика [5] враховує неоднорідні величини температур масла $\Theta_i = \text{var}$. Значення коефіцієнтів тепловіддачі α_i на поверхнях прямокутника отримано на підставі експериментальних даних. Значення Θ_i у досліджуваних перерізах по висоті стрижня МС визначаються з урахуванням розподілу температури масла у баці трансформатора залежно від виду системи охолодження. На жаль, саме виведення повного розв'язку задачі в [5] не представлено. Програмна реалізація наведеного алгоритму також показала порівняно слабку збіжність обчислень.

Завдання досліджень. Проведений аналіз вказує на необхідність подальшого вдосконалення методів розрахунку розподілу температури в перерізах стрижнів МС трансформаторів і реакторів.

Доцільно детально розглянути розв'язання крайової задачі для шихтованого пакету прямокутного перерізу по МСІП, отримати альтернативний аналітичний розв'язок методом розділення змінних (МРЗ), порівняти збіжність обчислень.

Для дослідження розподілу температур у шихтованих пакетах стрижнів МС трансформаторів з реальною східчастою формою зовнішньої межі та з можливою додатковою ізоляцією необхідно застосувати чисельні методи, наприклад, метод скінченних елементів (МСЕ). Методи чисельного аналізу також потрібно застосувати і для розрахунку температурного поля в шихтованих кругових вставках стрижня реактора, для яких характерна як анізотропія властивостей, так і значна нерівномірність виділення втрат в об'ємі.

Постановка задачі для прямокутної області. Задачу про розподіл перевищення температури над температурою навколишнього середовища для прямокутної області (рис. 1) формуємо у вигляді рівняння Пуассона з об'ємною щільністю q_v тепловиділення та із змішаними граничними умовами

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + q_v = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = h_1 (\theta - \Theta_1) \text{ при } x = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -h_2 (\theta - \Theta_2) \text{ при } x = \tilde{X}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = h_3 (\theta - \Theta_3) \text{ при } y = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -h_4 (\theta - \Theta_4) \text{ при } y = \tilde{Y}, \quad (3)$$

де $h_1 = \alpha_1 / \lambda_x$, $h_2 = \alpha_2 / \lambda_x$, $h_3 = \alpha_3 / \lambda_y$, $h_4 = \alpha_4 / \lambda_y$.

Розв'язання методом скінченних інтегральних перетворень. Для виключення диференціювання по змінній x із задачі (1)–(3) введемо скінченне інтегральне перетворення функції згідно з МСПІ [3]

$$\bar{\theta}(k, y) = \int_0^{\tilde{x}} \theta(x, y) \bar{K}(x, k) dx, \quad (4)$$

де ядро перетворення $\bar{K}(x, k)$ є неперервна з першою та другою похідною функція.

На ядро перетворення накладаються умови, що витікають з (1) і (2):

$$\partial^2 \bar{K} / \partial x^2 + \mu^2 \bar{K} = 0, \quad (5)$$

$$\partial \bar{K} / \partial x = h_1 \bar{K} \text{ при } x=0, \quad \partial \bar{K} / \partial x = -h_2 \bar{K} \text{ при } x=\tilde{X}. \quad (6)$$

Розв'язком задачі (5), (6) є повна система функцій, що побудована на послідовності додатних власних чисел μ_k . Тому, приймаючи $\bar{K}(x, k) = \bar{K}_k(x)$, отримуємо

$$\bar{K}_k(x) = \cos \mu_k x + (h_1 / \mu_k) \sin \mu_k x, \quad (7)$$

де μ_k – корені трансцендентного рівняння, яке одержуємо при підстановці виразу (7) в крайові умови (6)

$$\text{ctg} \mu_k \tilde{X} = \frac{\mu_k^2 - h_1 h_2}{(h_1 + h_2) \mu_k}. \quad (8)$$

Враховуючи отриману систему функцій (4), перетворення (4) записується у вигляді

$$\bar{\theta}_k(y) = \int_0^{\tilde{x}} \theta(x, y) \bar{K}_k(x) dx. \quad (9)$$

Застосовуючи перетворення (9) для задачі (1) – (3) та виконуючи інтегрування рівняння (1) по частинах і враховуючи властивість (5), отримуємо задачу для функції $\bar{\theta}_k(y)$ у вигляді рівнянь

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_k}{\partial y^2} - \varepsilon_k^2 \bar{\theta}_k + D_k = 0, \quad \left(\varepsilon_k^2 = \mu_k^2 \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right) \quad (10)$$

та граничних умов

$$\frac{\partial \bar{\theta}_k}{\partial y} = h_3 (\bar{\theta}_k - \bar{\Theta}_3) \text{ при } y=0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_k}{\partial y} = -h_4 (\bar{\theta}_k - \bar{\Theta}_4) \text{ при } y=\tilde{Y}. \quad (11)$$

Для визначення постійного члена D_k у рівнянні (10) використовуємо умови (6) для ядра перетворення

$$D_k = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \left(\bar{K}(x, k) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} - \theta(x, y) \frac{\partial \bar{K}(x, k)}{\partial x} \right) \Big|_0^{\tilde{x}} + \frac{\bar{q}_v}{\lambda_y} = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \left(\bar{K}_k(\tilde{X}) \Theta_2 h_2 + \Theta_1 h_1 \right) + \frac{q_v I_k}{\lambda_y}. \quad (12)$$

Величини перетворених функцій-констант визначаються за формулами

$$\bar{q}_v = \int_0^{\tilde{x}} q_v \bar{K}(x, k) dx = q_v I_k, \quad \bar{\Theta}_3 = \Theta_3 I_k, \quad \bar{\Theta}_4 = \Theta_4 I_k, \quad (13)$$

$$\text{де } I_k = \int_0^{\tilde{x}} \bar{K}(x, k) dx = \frac{1}{\mu_k} \sin \mu_k \tilde{X} + \frac{h_1}{\mu_k^2} (1 - \cos \mu_k \tilde{X}). \quad (14)$$

Розв'язком (10) є сімейство функцій:

$$\bar{\theta}_k = C_{1k} ch \varepsilon_k y + C_{2k} sh \varepsilon_k y + \frac{D_k}{\varepsilon_k^2}. \quad (15)$$

Невідомі C_{1k} , C_{2k} визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримуємо підстановкою (14) в граничні умови (11)

$$\begin{cases} h_3 C_{1k} - \varepsilon_k C_{2k} = -h_3 \left(\frac{D_k}{\varepsilon_k^2} - \bar{\Theta}_3 \right) \\ \left(\varepsilon_k sh \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 ch \varepsilon_k \tilde{Y} \right) C_{1k} + \left(\varepsilon_k ch \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 sh \varepsilon_k \tilde{Y} \right) C_{2k} = -h_4 \left(\frac{D_k}{\varepsilon_k^2} - \bar{\Theta}_4 \right) \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язок основного рівняння (1) має вигляд ряду

$$\theta(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\theta}_k K_k(x), \quad (17)$$

де $K_k(x)$ – ядро зворотного перетворення, що відрізняється від ядра прямого перетворення нормуючим множником

$$K_k(x) = \frac{\bar{K}_k(x)}{N_k}, \quad N_k = \int_0^{\tilde{x}} \bar{K}_k^2(x) dx. \quad (18)$$

Остаточний розв'язок задачі (1) – (3) згідно з МСПП отримуємо у вигляді

$$\theta(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\theta}_k(y) \bar{K}_k(x) / N_k, \quad (19)$$

де

$$\bar{\theta}_k(y) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}} sh \varepsilon_k y + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}} ch \varepsilon_k y + \frac{D_k}{\varepsilon_k^2}; \quad (20)$$

$$N_k = \frac{X}{2} \left(1 + \frac{h_1^2}{\mu_k^2} \right) + \left(1 - \frac{h_1^2}{\mu_k^2} \right) \frac{\sin 2\mu_k \tilde{X}}{4\mu_k} + \frac{h_1}{\mu_k^2} \sin^2 \mu_k \tilde{X}; \quad (21)$$

$$\Delta_{0k} = h_3 A_{2k} + \varepsilon_k A_{1k}; \quad \Delta_{1k} = B_{1k} A_{2k} + \varepsilon_k B_{2k}; \quad \Delta_{2k} = h_3 B_{2k} - A_{1k} B_{1k}; \quad (22)$$

$$A_{1k} = \varepsilon_k sh \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 ch \varepsilon_k \tilde{Y}; \quad A_{2k} = \varepsilon_k ch \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 sh \varepsilon_k \tilde{Y}; \quad (23)$$

$$B_{1k} = -h_3 (D_k / \varepsilon_k^2 - \Theta_3 I_k); \quad B_{2k} = -h_4 (D_k / \varepsilon_k^2 - \Theta_4 I_k); \quad (24)$$

Розв'язання методом розділення змінних. Шукана функція представляється [3] у вигляді суми декількох функцій, що є розв'язком задач виду (1)–(3) з приведенням частини умов до однорідних

$$\theta(x, y) = \theta_x(x, y) + \theta_y(x, y) + \theta_o(x, y). \quad (25)$$

Так функція $\theta_x(x, y)$ є розв'язком задачі (1) – (3) при $\theta_1 = \theta_2 = 0$ і $q_v = 0$

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = h_1 \theta_x \quad \text{при } x=0, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -h_2 \theta_x \quad \text{при } x=\tilde{X}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = h_3 (\theta_x - \Theta_3) \quad \text{при } y=0, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -h_4 (\theta_x - \Theta_4) \quad \text{при } y=\tilde{Y}. \quad (28)$$

Функція $\theta_y(x, y)$ є розв'язком задачі (1) – (3) при $\theta_3 = \theta_4 = 0$ і також при $q_v = 0$

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = h_1 (\theta_y - \Theta_1) \quad \text{при } x=0, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -h_2 (\theta_y - \Theta_2) \quad \text{при } x=\tilde{X}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = h_3 \theta_y \quad \text{при } y=0, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -h_4 \theta_y \quad \text{при } y = \tilde{Y}. \quad (31)$$

Функція $\theta_o(x, y)$ є розв'язком задачі (1) – (3) при однорідних умовах $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$, але при $q_v \neq 0$

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial y^2} + q_v = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \theta_o}{\partial x} = h_1 \theta_o \quad \text{при } x=0, \quad \frac{\partial \theta_o}{\partial x} = -h_2 \theta_o \quad \text{при } x = \tilde{X}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \theta_o}{\partial y} = h_3 \theta_o \quad \text{при } y=0, \quad \frac{\partial \theta_o}{\partial y} = -h_4 \theta_o \quad \text{при } y = \tilde{Y}. \quad (34)$$

МРЗ полягає в представленні шуканої функції у вигляді добутку функцій по кожній змінній

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y). \quad (35)$$

Так підстановка (35) в рівняння (26) дає

$$\lambda_x X''Y + \lambda_y XY'' = 0, \quad (36)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\lambda_y Y''}{\lambda_x Y} = -\mu^2, \quad (37)$$

де μ – число, що не залежить від змінних x, y .

З подвійної рівності (36) отримуємо рівняння (38) і (40)

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = h_1 X \quad \text{при } x=0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = -h_2 X \quad \text{при } x = \tilde{X}, \quad (39)$$

$$Y_k'' - \varepsilon_k^2 Y_k = 0, \quad (\varepsilon_k^2 = \mu_k^2 \lambda_x / \lambda_y). \quad (40)$$

Розв'язком задачі (38)–(39) є система функцій

$$X_k(x) = \cos \mu_k x + (h_1 / \mu_k) \sin \mu_k x, \quad (41)$$

де μ_k – корені рівняння (8).

Розв'язком рівняння (40) є сімейство функцій

$$Y_k(y) = C_{1k} ch \varepsilon_k y + C_{2k} sh \varepsilon_k y. \quad (42)$$

Тому загальний розв'язок рівняння (26) має вигляд:

$$\theta_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)(C_{1k} ch \varepsilon_k y + C_{2k} sh \varepsilon_k y). \quad (43)$$

Підстановка в граничні умови (28) розвинення функції (43) дає систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)(h_3 C_{1k} - \varepsilon_k C_{2k}) = h_3 \Theta_3 \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)(A_{1k} C_{1k} + A_{2k} C_{2k}) = h_4 \Theta_4 \end{cases}, \quad (44)$$

$$\text{де } A_{1k} = \varepsilon_k sh \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 ch \varepsilon_k \tilde{Y}, \quad A_{2k} = \varepsilon_k ch \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 sh \varepsilon_k \tilde{Y}. \quad (45)$$

У лівій частині рівнянь системи (44) представлено ряди Фур'є по повній системі ортогональних функцій $X_k(x)$ на відріжку. Отже, вирази в дужках є коефіцієнтами розвинення в ряд Фур'є. Таким чином, для визначення невідомих C_{1k}, C_{2k} отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} h_3 C_{1k} - \varepsilon_k C_{2k} = h_3 \Theta_3 I_k / N_k \\ A_{1k} C_{1k} + A_{2k} C_{2k} = h_4 \Theta_4 I_k / N_k \end{cases}, \quad (46)$$

$$\text{де коефіцієнти нормування } I_k = \int_0^{\bar{x}} X_k(x) dx, \quad N_k = \int_0^{\bar{x}} X_k^2(x) dx. \quad (47)$$

Розв'язок задачі (29) – (31) для $\theta_y(x, y)$ здійснюється подібним чином з побудовою системи функцій по змінній y .

Розв'язок задачі (32) – (34) для $\theta_o(x, y)$ використовує розвинення в ряд за системою функцій, які задовольняють умовам (33)

$$\theta_o(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) V_k(y). \quad (48)$$

Підставляючи даний вираз в (32) і визначаючи коефіцієнти ряду Фур'є, отримуємо рівняння для $V_k(y)$

$$V_k''(y) - \varepsilon_k^2 V_k(y) = -\frac{q_v}{\lambda_y} \frac{I_k}{N_k}. \quad (49)$$

Розв'язком (49) є сімейство функцій

$$V_k(y) = C_{1k} \operatorname{ch}(\varepsilon_k y) + C_{2k} \operatorname{sh}(\varepsilon_k y) + \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k}. \quad (50)$$

Повний розв'язок рівняння (32) має вигляд

$$\theta_o(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(C_{1k} \operatorname{ch} \varepsilon_k y + C_{2k} \operatorname{sh} \varepsilon_k y + \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k} \right). \quad (51)$$

Підстановка розвинення функції (51) в граничні умови (34) дає з використанням коефіцієнтів (47) систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(h_3 C_{1k} - \varepsilon_k C_{2k} + h_3 \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k} \right) = 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(A_{1k} C_{1k} + A_{2k} C_{2k} - h_4 \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k} \right) = 0 \end{cases}. \quad (52)$$

На її основі отримуємо наступну систему для визначення коефіцієнтів C_{1k}, C_{2k}

$$\begin{cases} h_3 C_{1k} - \varepsilon_k C_{2k} = h_3 \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k} \\ A_{1k} C_{1k} + A_{2k} C_{2k} = -h_4 \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k} \end{cases}. \quad (53)$$

Остаточний розв'язок задачі (1)–(3) методом розділення змінних має вигляд

$$\theta(x, y) = \theta_x(x, y) + \theta_y(x, y) + \theta_o(x, y); \quad (54)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(\frac{\Lambda_{1k}}{\Lambda_{0k}} \operatorname{sh} \varepsilon_k y + \frac{\Lambda_{2k}}{\Lambda_{0k}} \operatorname{ch} \varepsilon_k y \right) \frac{I_k}{N_k}; \quad (55)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X'_k(y) \left(\frac{\Lambda'_{1k}}{\Lambda'_{0k}} \operatorname{sh} \varepsilon'_k x + \frac{\Lambda'_{2k}}{\Lambda'_{0k}} \operatorname{ch} \varepsilon'_k x \right) \frac{I'_k}{N'_k}; \quad (56)$$

$$\theta_o(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(\frac{\Omega_{1k}}{\Omega_{0k}} \operatorname{sh} \varepsilon_k y + \frac{\Omega_{2k}}{\Omega_{0k}} \operatorname{ch} \varepsilon_k y + 1 \right) \frac{q_v}{\lambda_y \varepsilon_k^2} \frac{I_k}{N_k}, \quad (57)$$

де

$$\Omega_{0k} = h_3 A_{2k} + \varepsilon_k A_{1k}; \quad \Omega_{1k} = h_3 (A_{1k} - h_4); \quad \Omega_{2k} = -(\varepsilon_k h_4 + h_3 A_{2k}); \quad (58)$$

$$\Lambda_{0k} = h_3 A_{2k} + \varepsilon_k A_{1k}; \quad \Lambda_{1k} = h_3 \Theta_3 A_{2k} + h_4 \Theta_4 \varepsilon_k; \quad \Lambda_{2k} = h_3 h_4 \Theta_4 - h_3 \Theta_3 A_{1k}; \quad (59)$$

$$A_{1k} = \varepsilon_k \operatorname{sh} \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 \operatorname{ch} \varepsilon_k \tilde{Y}; \quad A_{2k} = \varepsilon_k \operatorname{ch} \varepsilon_k \tilde{Y} + h_4 \operatorname{sh} \varepsilon_k \tilde{Y}; \quad (60)$$

$$N_k = \frac{\tilde{X}}{2} \left(1 + \frac{h_1^2}{\mu_k^2} \right) + \left(1 - \frac{h_1^2}{\mu_k^2} \right) \frac{\sin 2\mu_k \tilde{X}}{4\mu_k} + \frac{h_1}{\mu_k^2} \sin^2 \mu_k \tilde{X}; \quad (61)$$

$$I_k = \frac{\sin \mu_k \tilde{X}}{\mu_k} + \frac{h_1}{\mu_k^2} (1 - \cos \mu_k \tilde{X}). \quad (62)$$

Величини із штрихом в формулі (56) визначаються виразами (8), (10), (41), (58)–(62) взаємною заміною x та y , \tilde{X} та \tilde{Y} , λ_x та λ_y , h_3 та h_1 , h_4 та h_2 , Θ_3 і Θ_1 , Θ_4 і Θ_2 :

$$X'_k(y) = \cos \mu'_k y + \frac{h_3}{\mu'_k} \sin \mu'_k y; \quad (63)$$

$$\Lambda'_{0k} = h_1 A'_{2k} + \varepsilon'_k A'_{1k}; \quad \Lambda'_{1k} = h_1 \Theta_1 A'_{2k} + h_2 \Theta_2 \varepsilon'_k; \quad \Lambda'_{2k} = h_1 h_2 \Theta_2 - h_1 \Theta_1 A'_{1k}; \quad (64)$$

$$A'_{1k} = \varepsilon'_k sh \varepsilon'_k \tilde{X} + h_2 ch \varepsilon'_k \tilde{X}; \quad A'_{2k} = \varepsilon'_k ch \varepsilon'_k \tilde{X} + h_2 sh \varepsilon'_k \tilde{X}; \quad (65)$$

$$N'_k = \frac{\tilde{Y}}{2} \left(1 + \frac{h_3^2}{(\mu'_k)^2} \right) + \left(1 - \frac{h_3^2}{(\mu'_k)^2} \right) \frac{\sin 2\mu'_k \tilde{Y}}{4\mu'_k} + \frac{h_3}{(\mu'_k)^2} \sin^2 \mu'_k \tilde{Y}; \quad (66)$$

$$I'_k = \frac{\sin \mu'_k \tilde{Y}}{\mu'_k} + \frac{h_3}{(\mu'_k)^2} (1 - \cos \mu'_k \tilde{Y}). \quad (67)$$

$$\operatorname{ctg} \mu'_k \tilde{Y} = \frac{(\mu'_k)^2 - h_3 h_4}{(h_3 + h_4) \mu'_k}; \quad (\varepsilon'_k)^2 = (\mu'_k)^2 \frac{\lambda_y}{\lambda_x}. \quad (68)$$

Отримані розв'язки МСП та МРЗ є повними розв'язками задачі (1) – (3). Перший розв'язок МСП є простішим, вимагаючи визначення коренів тільки одного трансцендентного рівняння і підсумовування по одному ряду. Проте, як показали відповідні обчислення, розв'язок МСП має гіршу збіжність обчислень, що відповідає висновку роботи [4]. Так, для наведеного нижче прикладу для досягнення збіжності в третій значущій цифрі МСП вимагає 25 членів розвинення, МРЗ – 5.

Метод скінченних елементів. У даній статті представлено застосування МСЕ, реалізованого в програмному забезпеченні ANSYS [11].

На рис. 2 показано розподіл перевищень температур для прямокутної моделі групи пакетів, отриманий із застосуванням МСЕ з метою взаємної перевірки розробленої засобами ANSYS процедури чисельного моделювання та розрахунків, виконаних на основі викладених в статті аналітичних розв'язків задачі (1)–(3). Характер розподілу, абсолютні значення температур в тестовому прямокутнику на рис. 2, які отримані як чисельним моделюванням МСЕ, так і на основі розв'язку МРЗ, співпадають. Такі ж результати отримано з використанням аналітичного розв'язку МСП, однак, як вказано вище, із більшими обчислювальними затратами порівняно з МРЗ.

На рис. 3 показано результат моделювання МСЕ для реальної східчної геометрії групи пакетів, який не може бути отриманий аналітичними методами.

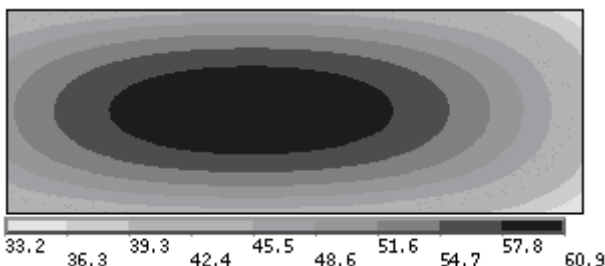


Рис. 2

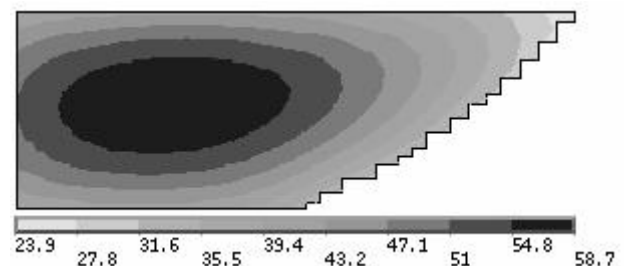


Рис. 3

Для східчастої моделі значення температур на зовнішній поверхні зменшилися в порівнянні з моделлю прямокутника. Область найбільших температур змістилася, максимальне значення зменшилося.

Як показано в таблиці, отримані найбільші (MAX) значення температур на сторонах і в середині прямокутної моделі по МРЗ і МСЕ відрізняються в третьому знаку.

Даним розрахунком проведена взаємна перевірка отриманих аналітичних розв'язків і реалізованої засобами ANSYS крайової задачі (1) – (3).

Точка області	Прямокутна модель		Східчата модель
	МРЗ	МСЕ	МСЕ
MAX на $y = \tilde{Y}$	41.6	41.6	35.5
MAX на $y = 0$	51.0	51.0	51.1
MAX на $x = 0$	44.0	44.1	42.9
MAX на $x = \tilde{X}$	43.8	43.9	41.4
MAX в області	60.6	60.9	58.7

На рис. 4 показано отриманий за МСЕ розподіл перевищень температур при умові, що зовнішня поверхня стрижня ізолювана склобандажами. Наявність ізоляції призводить до зміщення зони найбільших температур до зовнішньої поверхні пакету одночасно із збільшенням абсолютних значень.

На рис. 5 представлено розподіл температур у половині перерізу стрижня з поздовжніми та поперечними каналами. Найбільші значення температур спостерігаються в групах пакетів, які віддалені від центральних і наближені до крайніх.

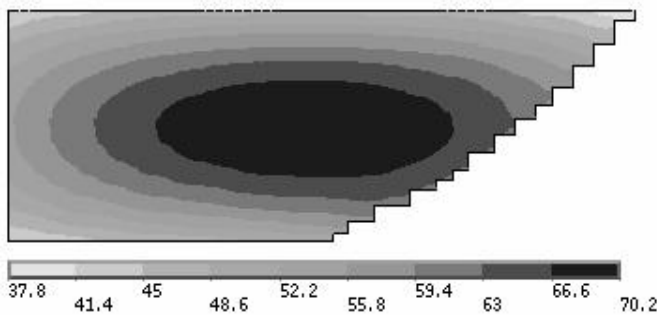


Рис. 4

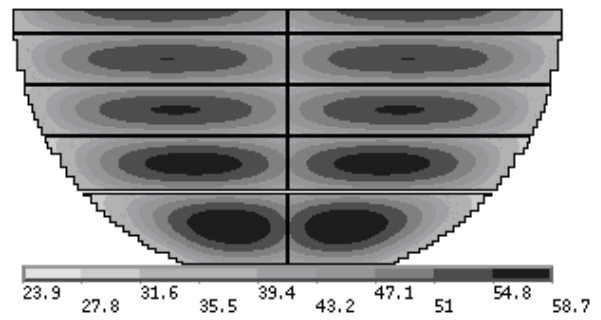


Рис. 5

Розрахунок нагріву стрижня реактора методом скінченних елементів. Застосування чисельних методів дозволяє проводити комплексний аналіз електромагнетних, механічних процесів в силових трансформаторах та реакторах. Так, в роботі [1] показано моделювання магнетного поля в області обмоток, в МС, в деталях пресування активних частин (у ярмових балках, пресувальних пластинах, в металевих пресувальних кільцях), в баці однофазних та трифазних силових трансформаторів і шунтувальних реакторів з повітряними проміжками в стрижні МС, що є основою для подальшого визначення втрат та нагрівів у вказаних частинах конструкції реактора. Для прикладу, на рис. 6 представлені геометрія МС і розрахований розподіл об'ємних втрат q_v (Вт/м³) в ярах та у вставках МС однострижневого шунтувального реактора. Кругові вставки прямокутного перерізу в стрижні МС набираються радіально шихтованими вертикальними пластинами е.т.с. Тому тепло-

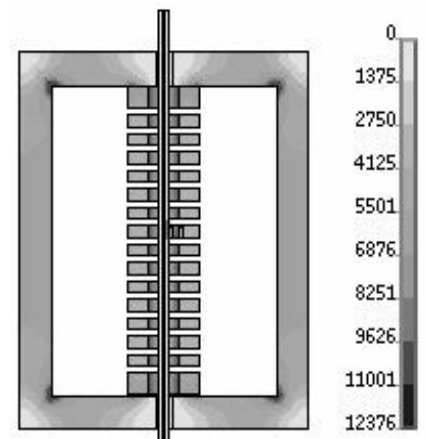


Рис. 6

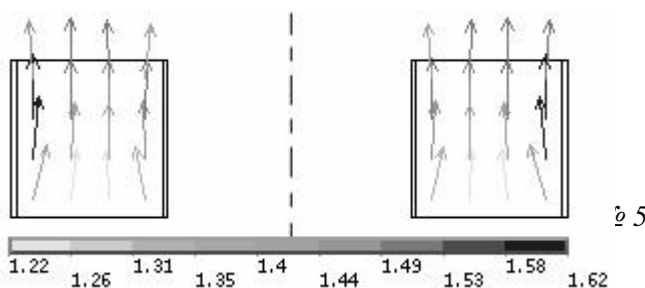


Рис. 7

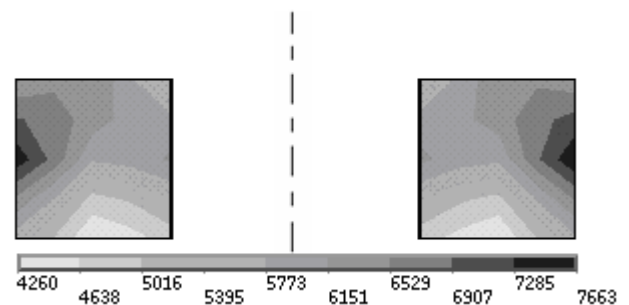


Рис. 8

провідність вставки анізотропна $\lambda_r = \lambda_z \neq \lambda_\phi$. На рис. 7 показано вектори магнетної індукції (Тл), а на рис. 8 – втрат (Вт/м³) в певному азимутному перерізі верхньої кругової вставки МС досліджуваного реактора.

Результати розрахунку тривимірного розподілу перевищення температури над охолоджуючим маслом у верхній вставці показані на рис. 9. Нагрів зовнішньої поверхні вставки мають значні нерівномірності внаслідок складного розподілу магнетної індукції, а отже і втрат, за рахунок тривимірного взаємного положення обвитки, вставок стрижня та торцевого ярма.

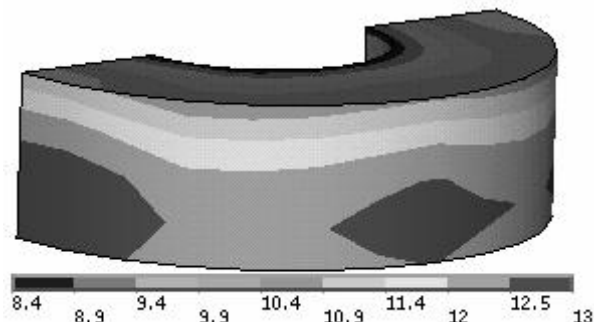


Рис. 9

Висновки. Представлено аналітичні розв'язки крайової задачі для визначення нагрівів пакетів у перерізах МС трансформаторів методом скінченних інтегральних перетворень та методом розділення змінних. Виконано взаємну перевірку розв'язків аналітичними методами і чисельним моделюванням методом скінченних елементів.

Отриманий аналітичний розв'язок методом розділення змінних має перевагу в збіжності обчислень, що може бути використано в програмних комплексах, де задача нагріву стрижнів МС трансформаторів може входити в перелік перевірних розрахунків і не вимагати при цьому значних затрат машинного часу.

Для детального аналізу нагріву частин МС трансформаторів і реакторів як із застосуванням плоских, так і тривимірних числових моделей доцільним є використання розроблених процедур числового моделювання МСЕ з використанням програмного забезпечення ANSYS.

1. Басова А.В., Жук В.В., Иванков В.Ф., Кокошин С.С., Химюк И.В. Анализ электромагнитных и механических процессов в силовых трансформаторах и реакторах методом конечных элементов // Техн. електродинаміка. Тем. вип. «Проблеми сучасної електротехніки». – 2008. – Ч. 3. – С. 9–14.
2. Готтнер Г. Нагревание и охлаждение электрических машин. – М.–Л.:Госэнергоиздат, 1961. – 264 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1962. – 767 с.
4. Логинов В.С. Приближенный метод расчета температурных режимов магнитопроводов трансформаторов и бетатронов // Электричество. – 1986. – № 10. – С. 21–25.
5. Трансформаторы силовые масляные. Остовы. Методика теплового расчета [разработчик Вайсман Н.Г.] – М.: Стандартэлектро. – РД16 415-88 (РТМ16 800.681-79). – 47 с.
6. Buchholz H. Die zweidimensionale Wärmeströmung des Beharrungszustandes im rechteckigen Querschnitt geblätterter Eisenkörper bei flächenhaft, unstetig oder stetig verteilten Wärmequellen // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1934. – Bd. 14. – 285 s.
7. Higgins E.T. Formulas for calculating temperature distribution in transformer cores and other electrical apparatus of rectangular cross section // AIEE Transactions, Electrical Engineering. – 1945. – Vol. 64. – Pp. 190–194.
8. Rele A. and Palmer S. Cooling of large transformer cores // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1972. – Vol. PAS-91. – № 4. – Pp. 1527–1535.
9. Robert M. Del Vecchio, Bertrand Poulin, Pierre T. Feghali, Dilipkumar M. Shah and Rajendra Ahuja. Transformer design principles: with application to core-form transformers – Gordon and Breach Science Publishers, 2001. – 599 p.
10. Weh H. Die zweidimensionale Wärmeströmung im geschichteten Transformatorkern // Arch. Elektrotechn. 41(1953) 2. – S. 122–126.
11. ANSYS/Structural/Emag3D. Лицензионная версия.

Надійшла 24.03.10