УДК 621.3.011

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ ИНДУЦИРОВАННЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ТЕЛЕ

Ю.М.Васецкий, докт.техн.наук, **И.Л.Мазуренко,** канд.техн.наук, **К.К.Дзюба**
Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина,
e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

Предложен асимптотический метод расчета импульсного электромагнитного поля, который позволяет учитывать индуцированные токи в электропроводных телах. Получены выражения для расчета электромагнитного поля единичного импульса тока в произвольном пространственном контуре, расположенном вблизи электропроводного тела с плоской поверхностью. Библ. 4, рис. 1.

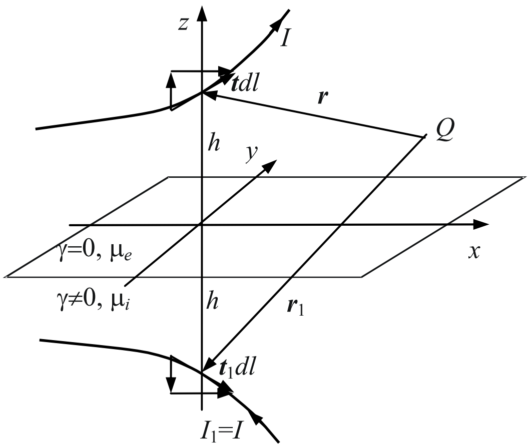
Ключевые слова: электромагнитное поле, контур с током, асимптотический метод, вихревой ток.

При разработке и усовершенствовании ряда электротехнических устройств, в частности устройств термической обработки металлов, устройств левитации, электроимпульсных систем, возникает задача расчета переменного электромагнитного поля, которое возбуждается токонесущим контуром, с учетом наведенных в проводящих телах вихревых токов.

Разнообразие геометрических форм электротехнических устройств с трехмерной структурой электромагнитного поля выдвигает необходимость разработки в каждом конкретном случае специальных методов расчета с учетом всех основных факторов, определяющих электромагнитный процесс, и позволяющих учитывать основные электрофизические особенности и геометрические параметры устройств.

Целью представленной работы является разработка способа расчета электромагнитного поля импульсного тока, протекающего по контуру пространственной конфигурации над электропроводной средой, основанного на использовании асимптотического метода, при котором малый параметр определяется отношением глубины проникновения поля к характерному геометрическому расстоянию системы.

В [2] показано, что в квазистационарной постановке решение задачи о поле синусоидального тока, протекающего вблизи электропроводного тела, может быть основано на использовании известного точного решения для поля диполя над плоской границей раздела сред [1]. Решение не ограничивается приложением к изучению только волновых процессов. Задачи исследования квазистационарных электромагнитных полей, созданных импульсными токами, с учетом вихревых токов в окружающих проводящих телах также могут решаться на основе указанной математической модели. В этих случаях необходимо рассчитывать поля при достаточно общих предположениях: контур с током может иметь произвольную пространственную конфигурацию, различной может быть зависимость тока от времени, кроме того, должны учитываться электрофизические характеристики материалов. Методы, которые позволяют достаточно быстро и с приемлемой точностью определять электромагнитные поля, параметры устройств и их оптимизацию, могут быть основаны на ряде упрощающих предположений, учитывающих наиболее существенные особенности электромагнитного процесса. В данной работе такое предположение сделано относительно глубины проникновения поля в проводящую среду по сравнению с характерными размерами электромагнитной системы.



Выражения для частотного спектра (преобразования Лапласа) векторного потенциала и индукции квазистационарного электромагнитного поля в области, где расположен замкнутый контур с током произвольной пространственной конфигурации (рисунок), могут быть записаны следующим образом:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0\mu_e I}{4\pi}\int_l \left(\frac{\boldsymbol{t}}{r} - \frac{\boldsymbol{t}_1}{r_1} - \boldsymbol{\lambda}\times \mathrm{grad}\, G\right)dl\,, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\mu_e I}{4\pi}\int_l \left(\frac{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{t}_1\times\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} - (\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla)\mathrm{grad} G\right)dl\,. \qquad (1,2)$$

Здесь функция G есть

$$G = 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-(z+h)\upsilon}}{\upsilon + \nu\sqrt{\upsilon^2 + p\mu_0\mu_i\gamma_i}} \cdot J_0(\upsilon\rho)d\upsilon, \quad (3)$$

где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; z и ρ – локальные цилиндрические координаты точки Q; μ_i, μ_e – относительные магнитные проницаемости сред, $\nu = \mu_e/\mu_i$; γ_i – электропроводность среды; r, r_1 – расстояние от элемента тока и его зеркального отражения до точки наблюдения, соответственно; $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{t}$; $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}_1$ – касательная к контуру и зеркально отраженному контуру, соответственно; для Фурье-преобразования $p = i\omega$.

Отметим, что векторный потенциал, представленный формулой (1), удовлетворяет условию $div\boldsymbol{A} = 0$. Действительно, для первых двух слагаемых это условие выполняется, поскольку они дают векторный потенциал замкнутых линейных токов [3]. Для третьего слагаемого, как видно из (1) и (2), условие также тождественно удовлетворяется. Это означает, что векторный потенциал (1) обусловлен только протекающими в системе токами [3]: током контура и вихревыми токами в проводящем пространстве. Отсюда, в частности, следует, что в общем выражении для напряженности электрического поля $\boldsymbol{E} = -i\omega\boldsymbol{A} - grad\varphi$ первое слагаемое дает напряженность индуцированного вихревого электрического поля, а второе связано с наличием электрических зарядов, которые в рассматриваемой задаче сосредоточены на границе раздела двух сред.

В выражениях (1) и (2) первые слагаемые определяют магнитное поле без учета влияния проводящей среды. Вторые слагаемые учитывают индуцированные токи и определяют магнитное поле от зеркально отраженного элемента тока, направление тока в котором противоположно току в контуре. В третьих слагаемых учитывается влияние свойств проводящей среды на величину индуцированных токов и, соответственно, на создаваемое магнитное поле.

Расчет магнитного поля по (1) и (2) связан с преодолением значительных трудностей, которые обусловлены необходимостью вычислять несобственные интегралы от выражений, содержащих функцию Бесселя. При выполнении условия малости параметра $\varepsilon = \delta/\nu r_1$, где δ – глубина проникновения поля, справедливо функцию G (3) приближенно представить в виде асимптотического ряда

$$G = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{2a_n(\nu)}{\left(\nu\sqrt{p\mu_0\mu_i\gamma_i}\right)^{n+1}} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \int_l \left(\frac{1}{r_1}\right) dl_M = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{p^{(n+1)/2}}. \quad (4)$$

Особенностью (4) является то, что каждый из интегралов дает поле линейного тока контура.

Простой вид частотной зависимости каждого члена ряда позволяет легко перейти к нахождению поля импульсного тока. Если в электрической цепи протекает несинусоидальный ток $i(t)$, то под I в (1) следует понимать частотный спектр протекающего тока. Частотный спектр векторного потенциала магнитного поля отличается от спектра сигнала I и задача состоит в том, чтобы при заданной зависимости тока от времени $i(t)$ найти зависимость магнитного поля от времени $\boldsymbol{A}(t)$. Эту задачу можно разбить на два этапа. Вначале можно найти зависимость от времени при воздействии единичного импульса тока $T(t)$

$$\mathrm{T}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0. \end{cases} \quad (5)$$

Затем для нахождения изменения во времени векторного магнитного потенциала при воздействии произвольного тока $i(t)$ удобно воспользоваться интегралом Дюамеля. В данной работе анализируется магнитное поле при протекании по контуру только единичного импульса тока $T(t)$.

Из (1) и (2) следует, что изменение характера зависимости от времени векторного потенциала по сравнению с $i(t)$ определяется наличием функции G. Поле же самого тока и его зеркального отражения имеет одинаковую с током временную зависимость. Учитывая, что изображение Лапласа для единичного импульса есть $T(t) \div 1/p$, составляющая частотного спектра магнитного поля, связанная с наличием третьего слагаемого в (1), будет определяться произведением

$$\Lambda(p) = T(p) \cdot G(p) = \sum_{n=0}^{N} b_k \frac{1}{p^{(n+3)/2}}. \quad (6)$$

Обратное преобразование Лапласа для каждого члена ряда известно [4]. В результате с учетом (6) зависимость векторного потенциала для единичного импульса тока будет

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0(t) + \boldsymbol{A}_1(t) + \frac{\mu_e\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \boldsymbol{\lambda} \times \mathrm{grad}(b_n), \quad (7)$$

где $A_0(t)$ и $A_1(t)$ – составляющие векторного потенциала, созданные током контура и его зеркальным отражением, которые изменяются во времени так же как и ток контура; $\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)$ – гамма-функция [4], причем

$$\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)=\begin{cases}\left(\frac{n+1}{2}\right)! & \text{при } n-\text{нечетном}\\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+2)/2}}n!! & \text{при } n-\text{четном}.\end{cases}$$

Видно, что при воздействии единичного импульса выражение (5) при $t\to\infty$ дает неограниченное возрастание функции магнитного поля $A(t)$. В действительности магнитное поле с течением времени должно стремиться к определенному установившемуся значению. Возникшее противоречие связано с наложенным ранее ограничением о малости параметра $\varepsilon=\mu_i\delta/\mu_e r_1$, который содержит частоту ω. Для низких частот это условие нарушается. Если учесть, что Фурье-преобразование единичного импульса содержит весь спектр частот, то ясно, что для низкочастотной области условие не выполняется. Поэтому из-за наличия низких частот, которые в первую очередь влияют на характер зависимости $A(t)$ при больших t, возникает указанное противоречие. Выражение (7) будет справедливо до некоторого характерного времени $t_c\approx 1/\omega_c$, для которого выполняется условие малости по существу прежнего параметра $\varepsilon=\sqrt{t_c}/\left(r_1\nu\sqrt{\mu_0\mu_i\gamma_i}\right)$.

Таким образом, изложенный подход к расчету электромагнитного поля импульсного тока, основанный на использовании асимптотического метода, позволяет рассчитывать зависимость магнитного поля от времени не во всем диапазоне частот единичного импульса тока. Но, с другой стороны, так как обычно импульс тока изменяется наиболее быстро и достигает максимальных значений в течение относительно малого времени, то именно на этом наиболее важном этапе и определяется $A(t)$.

1. *Тозони О.В.* Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.

2. *Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л.* Аналитический метод расчета электромагнитного поля и плотности потока мощности в системе токовый контур–проводящее полупространство // Технічна електродинаміка. Темат. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2000. – Ч. 2. – С. 16–19.

3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.

4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 720 с.

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ З УРАХУВАННЯМ ІНДУКОВАНИХ СТРУМІВ У ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ ТІЛІ

Ю.М.Васецький, докт.техн.наук, **І.Л.Мазуренко,** канд.техн.наук, **К.К.Дзюба**
Інститут електродинаміки НАН України, пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна,
e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

Запропоновано асимптотичний метод розрахунку імпульсного електромагнітного поля, який дозволяє розраховувати індуковані струми в електропровідних тілах. Отримано вирази для розрахунку електромагнітного поля одиничного імпульсу струму в довільному просторовому контурі, розташованому поблизу електропровідного тіла з плоскою поверхнею. Бібл. 4, рис. 1.

Ключові слова: електромагнітне поле, контур зі струмом, асимптотичний метод, вихровий струм.

ASYMPTOTIC METHOD OF CALCULATION OF IMPULSE ELECTROMAGNETIC FIELD TAKING INTO ACCOUNT EDDY CURRENTS IN CONDUCTING BODY

Yu.Vasetsky, I.Mazurenko, K.Dzyuba
Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine, pr. Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine,
e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

The asymptotic method of calculation of impulse electromagnetic field taking into account eddy currents in conducting body are offered. The calculation expression of electromagnetic field of single impulse in arbitrary spatial contour with current near planar conducting body are obtained. References 4, figure 1.

Key words: electromagnetic field, contour with a current, asymptotic method, eddy current.

1. *Tozoni O.V.* A method of the second sources in the electrical engineering. – Moskva: Energiia, 1975. – 296 p. (Rus)

2. *Vasetsky Yu., Gorodzha L., Mazurenko I.* Analytical method of calculation of electromagnetic field and flux density of power in system current contour – conducting half-space // Tekhnichna elektrodynamika. Tematychnyi vypusk "Problemy suchasnoi elektrotekhniky". – 2000. – Vol. 2. – Pp. 16 – 19. (Rus)

3. *Tamm I.E.* Bases of theory of electricity. – Moskva: Nauka, 1989. – 504 p. (Rus)

4. *Korn G., Korn T.* Mathematical handbook. – Moskva: Nauka, 1978. – 831 p. (Rus)

Надійшла 17.02.2014