

УДК 621.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ  
НА ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

В.М. Михайлов, докт. техн. наук

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт",  
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина, e-mail: valerymikhailov@rambler.ru

Доказана непрерывность касательной проекции эффективной напряженности электрического поля при переходе через границу раздела "движущийся с нерелятивистской скоростью проводник – неподвижная непроводящая среда". Преобразовано граничное условие для обычной напряженности электрического поля. Приведены примеры и показано, что использование различных граничных условий для напряженности электрического поля приводит к одинаковым граничным условиям для напряженности магнитного поля на поверхности движущегося проводника в неподвижных координатах. Библ. 8, рис. 2.

**Ключевые слова:** напряженность электрического поля, движущийся проводник, граничное условие.

**Введение.** В электрофизических технологиях используют устройства, одним из элементов которых являются движущиеся или деформируемые проводники [2, 3]. В основе математических моделей таких устройств [1, 5] лежит закон электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла. Несмотря на то, что особенности этого закона в случае проводящих контуров и тел, движущихся в электромагнитном поле, были рассмотрены [4 – 6, 8], его применение требует дальнейших исследований. Последнее относится, в частности, к граничным условиям для напряженности электрического поля на границе раздела неподвижной непроводящей среды и движущегося проводника.

**Исходные уравнения и основные допущения.** Используя трактовку Лагранжа [7], закон электромагнитной индукции представляем в таком виде [4]:

$$\oint_{l_0} \vec{E}^{\circ} dl_0 = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

где  $\vec{E}^{\circ}$  – эффективная напряженность электрического поля в точках движущегося контура  $l_0$  ( $dl_0$  – элемент этого контура),  $d\Phi/dt$  – полная (субстанциональная) производная по времени магнитного потока, пронизывающего контур  $l_0$ .

Эффективная напряженность электрического поля определяется соотношением

$$\vec{E}^{\circ} = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}], \quad (2)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{V}$  – скорость точек контура  $l_0$ ,  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля.

Полная производная магнитного потока представляется в виде [4]

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \oint_{l_0} [\vec{V}, \vec{B}] dl_0. \quad (3)$$

В первом слагаемом правой части (3) не учитывается движение контура  $l_0$ . Заметим также, что  $\vec{E}$ ,  $\vec{V}$  и  $\vec{B}$  в формулах (2), (3) определены в неподвижных координатах.

Закон электромагнитной индукции при использовании трактовки Эйлера [7]

$$\oint_l \vec{E} dl = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $l$ ,  $dl$  – неподвижный пространственный контур, с которым в некоторый момент времени совпадает движущийся контур  $l_0$ , и его элемент;  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий контур  $l$ .

Примем следующие основные допущения: 1) в проводниках и окружающей их непроводящей неподвижной среде соблюдаются условия квазистационарности; 2) электрофизические характеристики проводников постоянны; 3) скорость движения проводников значительно меньше скорости света, поэтому напряженность магнитного поля в движущихся проводниках инвариантна относительно системы отсчета.

**Граничное условие для эффективной напряженности электрического поля.** Пусть проводящее тело (в дальнейшем – проводник) движется в среде 1 или 2 с электромагнитным полем (рис. 1). В первом случае проводник удаляется от некоторой фиксированной точки  $A_1$  среды 1 (рис. 1, а), во втором – приближается к точке  $A_2$  среды 2 (рис. 1, б). Приняты обозначения:  $\vec{E}^{\circ}$ ,  $\vec{E}_{1,2}^{\circ}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{B}_{1,2}$  – эффективная напряженность электрического поля, а также индукция магнитного поля соответственно на внутренней (в проводнике) и внешней (в среде 1 или 2) сторонах поверхности раздела;  $\vec{\tau}$  – орт касательной.

В произвольной точке движущейся границы (среда 1 или 2 – проводник) возведем орт нормали  $\vec{n}$ , направленный внутрь проводника. В плоскости, содержащей вектор  $\vec{n}$ , построим прямоугольный контур достаточно малых размеров с центром в выбранной точке так, чтобы его средняя линия лежала на поверхности границы. Применим к этому движущемуся вместе с проводником контуру уравнение (1) с учетом формулы (3). Положительное направление обхода показано стрелкой. Устремляя высоту контура к нулю, получаем

$$\left(\vec{E}^\circ - \vec{E}_{1,2}^\circ, \vec{\tau}\right) = \left(\left[\vec{V}, \vec{B} - \vec{B}_{1,2}\right], \vec{\tau}\right). \quad (5)$$

Проанализируем правую часть (5). Учитывая непрерывность нормальной проекции индукции магнитного поля при переходе через границу раздела и правило циклической перестановки для смешанного произведения трех векторов, имеем

$$\left(\left[\vec{V}, \vec{B} - \vec{B}_{1,2}\right], \vec{\tau}\right) = \left(\vec{V}, \left[B_\tau - B_{1,2\tau}\right] \vec{\tau}, \vec{\tau}\right), \quad (6)$$

где  $B_\tau$ ,  $B_{1,2\tau}$  – касательные проекции векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{B}_{1,2}$  на границе раздела.

Из (6) следует равенство нулю правой части (5) и непрерывность касательной проекции вектора эффективной напряженности электрического поля

$$\left(\vec{E}^\circ - \vec{E}_{1,2}^\circ, \vec{\tau}\right) = 0. \quad (7)$$

**Преобразование граничного условия для напряженности электрического поля.** Используя уравнение (4) к неподвижному прямоугольному контуру достаточно малых размеров, со средней линией которого в некоторый момент времени совпадает участок границы движущегося проводника (трактовку Эйлера на движение [7, 5]), приходим к обычному условию непрерывности касательных проекций напряженности электрического поля

$$\left(\vec{E} - \vec{E}_{1,2}, \vec{\tau}\right) = 0. \quad (8)$$

Граничное условие (8) не содержит в явном виде информацию о движении проводника в электромагнитном поле. Поэтому заменяем в нем  $\vec{E}$  при помощи формулы (2) и получаем преобразованное граничное условие

$$\left(\vec{E}^\circ - \vec{E}_{1,2}^\circ, \vec{\tau}\right) = \left(\left[\vec{V}, \vec{B}_{1,2}\right], \vec{\tau}\right), \quad (9)$$

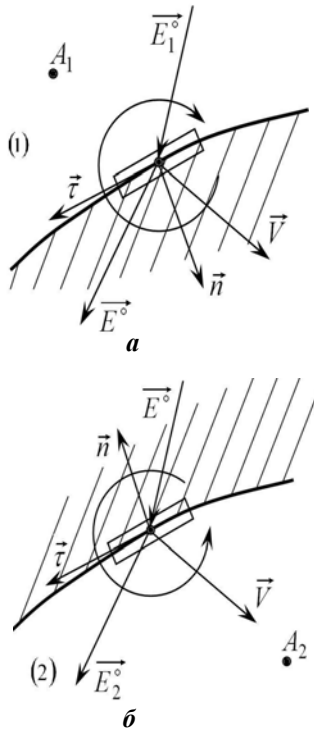


Рис. 1

которое описывает скачок касательной проекции  $\vec{E}^\circ$  по отношению к касательным проекциям  $\vec{E}_{1,2}$  при переходе через границу движущегося проводника. Граничные условия (8) и (9) могут быть получены из соотношения (5) с учетом (2).

**Примеры.** В проводящем пространстве с постоянной удельной электропроводностью  $\gamma$  имеется цилиндрическая воздушная полость радиуса  $r_1$  неограниченной длины с осевым однородным магнитным полем  $\vec{B}_2$  (рис. 2). Полость сжимается со скоростью  $\vec{V}$  так, что форма ее сохраняется. Требуется составить граничное условие на поверхности полости к задаче проникновения магнитного поля в полупространство в неподвижных координатах.

**Способ 1.** В цилиндрических координатах  $r, \psi, z$ , ось  $z$  которых совпадает с осью полости, векторы  $\vec{B}$ ,  $\vec{B}_2$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{H}_2$  и  $\vec{E}^\circ$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{E}_2$  имеют по одной ненулевой соответственно  $z$ - и  $\psi$ - проекции. Граничное условие (9) принимает вид (индексы проекций векторов опускаем)

$$E^\circ(r_1, t) - E_2(r_1, t) = -V_{r_1} B_2, \quad (10)$$

где  $V_{r_1}$  – радиальная проекция  $\vec{V}$ ,  $B_2 = \mu_0 H_2$ ,  $H_2$  – напряженность магнитного поля в воздушной полости,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Напряженность  $E_2(r_1, t)$  находим, применяя (4) к граничной поверхности со стороны полости. Получим

$$E_2(r_1, t) = -\frac{\mu_0 r_1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial t} \Big|_{r=r_1}. \quad (11)$$

Из закона полного тока в дифференциальной форме имеем

$$E^\circ(r_1, t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_1}, \quad (12)$$

где  $H$  – напряженность магнитного поля в проводящем пространстве.

После подстановки (11), (12) в (10) с учетом равенства на границе раздела  $H$  и  $H_2$  получаем искомое граничное условие

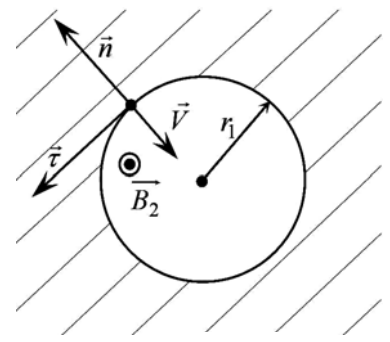


Рис. 2

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_1} - \mu_0 \gamma \left( \frac{r_1}{2} \frac{dH(r_1, t)}{dt} + V_{r1} H(r_1, t) \right) = 0. \quad (13)$$

**Способ 2.** Исходим из граничного условия (7), которое принимает вид

$$E^\circ(r_1, t) = E_2^\circ(r_1, t). \quad (14)$$

Напряженность  $E_2^\circ(r_1, t)$  находим при помощи уравнения (1). Получим

$$E_2^\circ(r_1, t) = -\frac{\mu_0}{2r_1} \frac{\partial}{\partial t} (r_1^2 H_2(r_1, t)). \quad (15)$$

Подстановка (15) и (12) в (14) приводит к тому же граничному условию (13).

**Выводы. 1.** Касательная проекция эффективной напряженности электрического поля при переходе через границу раздела движущегося проводника и неподвижной непроводящей среды непрерывна. **2.** Касательная проекция эффективной напряженности электрического поля при переходе через указанную в п. 1 границу претерпевает скачок относительно касательной проекции напряженности электрического поля со стороны среды, равный касательной проекции векторного произведения скорости на индукцию магнитного поля в среде. **3.** Граничные условия, содержащие касательные проекции эффективной и обычной напряженности электрического поля, приводят к одинаковым граничным условиям на поверхностях движущихся проводников в краевых задачах проникновения магнитного поля в неподвижных координатах, что подтверждается также нашими результатами в [1, 5].

1. Баткилин Я.М., Михайлов В.М. Одномерные задачи импульсного проникновения электромагнитного поля в движущиеся проводники // Известия вузов. Электромеханика. – 1980. – № 12. – С. 1257–1262.
2. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков : Вища школа, 1977. – 168 с.
3. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. – М.: Мир, 1972. – 392 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 532 с.
5. Михайлов В.М., Руденко Ю.С. О применении точек зрения Эйлера и Лагранжа на движение в расчетах импульсных электромагнитных полей // Известия ВУЗов. Электромеханика. – 1987. – № 10. – С. 5–10.
6. Поливанов К.М. К 100-летию "Трактата об электричестве и магнетизме" Дж.К.Максвелла // Электричество. – 1974. – № 3. – С. 1–8.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – Т.1. – М.: Наука, 1973. – 536 с.
8. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 774 с.

УДК 621.3

**ЩОДО ГРАНИЧНИХ УМОВ ДЛЯ НАПРУЖЕНОСТІ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНІ ПРОВІДНОГО ТІЛА, ЩО РУХАЄТЬСЯ**  
**В.М.Михайлов**, докт.техн.наук

**Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»**,  
**вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, Україна.** e-mail: [valerymikhailov@rambler.ru](mailto:valerymikhailov@rambler.ru)

*Доведено безперервність дотичної проекції ефективної напруженості електричного поля при переході через границю поділу "провідник, що рухається з нерелятивістською швидкістю - нерухоме непровідне середовище". Перетворено граничну умову для звичайної напруженості електричного поля. Наведено приклади і показано, що використання різних граничних умов для напруженості електричного поля призводить до однакових граничних умов для напруженості магнітного поля на поверхні провідника, що рухається, в нерухомих координатах. Бібл. 8, рис. 2.*

**Ключові слова:** ефективна напруженість електричного поля, провідник, що рухається, гранична умова.

**ABOUT BOUNDARY CONDITIONS FOR ELECTRIC FIELD STRENGTH ON SURFACE OF MOVING CONDUCTIVE BODY**  
**V.M.Mikhailov**,

**National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",**  
**Frunze str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine.** e-mail: [valerymikhailov@rambler.ru](mailto:valerymikhailov@rambler.ru)

*Boundary conditions for electric field strength on border of moving conductor and moveless nonconductive continuum are obtained. Examples of using its in the problem of magnetic field penetration into moving conductor are presented. It's shown that using of effective or usual electric field strength has not an influence on form of boundary condition for magnetic field strength in moveless coordinates. References 8, figures 2.*

**Key words:** effective electric field strength, moving conductor, boundary condition.

1. Batkilin Ya.M., Mikhailov V.M. One-dimension problems of pulsed magnetic field penetration into movable conductors // Izvestiia vuzov. Elektromekhanika. – 1980. – № 12. – Pp. 1257–1262. (Rus)
2. Belyi I.V., Fertik S.M., Khimenko L.T. Reference book about magnetic pulsed forming of metals. – Kharkov: Vyshcha shkola, 1977. – 168 p. (Rus)
3. Knopfel H. Pulsed high magnetic fields. – Moskva: Mir, 1972. – 392 p. (Rus)
4. Landau L.D., Lifshits E.M. Electrodynamics of the continuum. – Moskva: GITTL, 1957. – 532 p. (Rus)
5. Mikhailov V.M., Rudenko Yu.S. About using of Euler's and Lagrange's views motion in calculates of pulsed electromagnetic fields // Izvestiia VUZov. Elektromekhanika. – 1987. – № 10. – Pp. 5–10. (Rus)
6. Polivanov K.M. To century of "A treatise on electricity and magnetism" by J.C.Maxwell // Elektrichestvo. – 1974. – № 3. – Pp. 1–8. (Rus)
7. Sedov L.I. Mechanics of continuum. Vol.1. – Moskva: Nauka, 1973 – 536 p. (Rus)
8. Shimoni K. Theoretical electrical engineering. – Moskva: Mir, 1964. – 774 p. (Rus)

Надійшла 30.01.2014