

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ МАГНИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ

М.М.Резинкина<sup>1</sup>, докт.техн.наук, О.Л.Резинкин<sup>2</sup>, докт.техн.наук, Е.В.Сосина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> – Институт технических проблем магнетизма НАН Украины,  
ул. Индустриальная, 19, Харьков, 61106, Украина,  
e-mail: [marinar2@mail.ru](mailto:marinar2@mail.ru)

<sup>2</sup> – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,  
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина.

*Предложены методики расчета распределения магнитного поля (МП) в окрестности одиночных, а также нескольких рядом стоящих магнитных стержней. Для нахождения распределения магнитного поля вблизи одиночного магнитного стержня использована информация о спаде МП в окрестности вытянутого магнитного эллипсоида. В случае нескольких рядом стоящих стержней предложено использовать конформальную схему, что позволяет заменить их одним эквивалентным стержнем, наличие которого вызывает те же изменения уровней напряженности МП, что и реальная конструкция. При расчетах использован метод конечных объемов. Выполнены примеры расчета распределений магнитного поля при различных параметрах стержней. Библ. 10, рис. 4.*

**Ключевые слова:** магнитное поле, магнитные стержни, конформальная схема, метод конечных объемов.

**Введение.** При решении ряда практически важных задач возникает необходимость расчета магнитного поля (МП) в окрестности магнитных стержней, находящихся во внешнем электромагнитном поле. В последнее время интерес вызывает использование магнитных наностержней применительно к различным приложениям [10] и, в частности, при создании метаматериалов [8]. При этом расстояния между стержнями обычно соизмеримы с их длиной или превышают ее.

Расчет МП в системах с магнитными стержнями требуется также при определении степени снижения уровней напряженности геомагнитного поля (ГМП) в окрестности стальных конструкций зданий [5]. При этом эффективным подходом к расчету МП представляется замена нескольких рядом стоящих магнитных стержней, например, армирующих проволок железобетонных конструкций, одним эквивалентным магнитным стержнем, вызывающем те же изменения уровней напряженности МП, что и реальная конструкция. Таким образом, имеет место два основных типа задач расчета МП при наличии магнитных стержней, решению которых посвящена данная статья.

**Принципы эквивалентной замены при расчете МП нескольких параллельных близко расположенных магнитных стержней одним эквивалентным.** При нахождении распределения электромагнитного поля в случае наличия неоднородных сред с несколькими границами раздела может быть использована так называемая конформальная схема [9]. Применим этот подход для эквивалентной замены нескольких параллельных тонких вытянутых магнитных стержней длиной  $L_R$  и радиусом поперечного сечения  $r_R$ , имеющих относительную магнитную проницаемость  $\mu_m$ , одним эквивалентным стержнем длиной  $L_{ef}$  и радиусом поперечного сечения  $r_{ef}$ , имеющим относительную магнитную проницаемость  $\mu_{ef}$ .

Рассмотрим случай, когда в объеме  $V_\Sigma$  расположено несколько тонких магнитных стержней, причем, расстояния между осями стержней намного больше радиусов их поперечных сечений, но существенно меньше их длины. Для замены таких стержней эквивалентным, используем так называемую эффективную относительную магнитную проницаемость  $\mu_{ef}$  [9]

$$\mu_{ef} = [V_m \cdot \mu_m + (V_\Sigma - V_m)] V_\Sigma^{-1}, \quad (1)$$

где  $V_m$  – объем магнитных стержней в рассматриваемой зоне.

Для того чтобы определить величину погрешности при использовании описанного подхода в зависимости от конфигурации стержней, а также найти оптимальный радиус поперечного сечения эквивалентного стержня, необходимо провести расчеты магнитного поля в исследуемых системах.

**Формулировка задачи расчета магнитного поля в системах, содержащих магнитные стержни.** Рассмотрим задачу численного расчета квазистатического МП при наличии магнитных стержней. Запишем уравнение Максвелла, описывающее распределение МП в этом случае

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{B}$  – магнитная индукция.

Рассмотрим систему, состоящую из нескольких тонких магнитных стержней, радиус поперечного сечения которых гораздо меньше их длины ( $r_R \ll L_R$ ), расположенных в зоне действия однородного МП, направленного вдоль их осей. Разобьем рассматриваемую область на ячейки-параллелепипеды. Данное разбиение произведено так, что узлы расчетной сетки  $(i, j, k)$  лежат на границах раздела сред (рис. 1). Под  $(i, j, k)$ -ой ячейкой подразумевается параллелепипед, вершинами которого являются следующие узлы:  $(i, j, k)$ ,  $(i+1, j, k)$ ,  $(i, j+1, k)$ ,  $(i, j, k+1)$ ,  $(i+1, j+1, k)$ ,  $(i, j+1, k+1)$ ,  $(i+1, j, k+1)$ ,  $(i+1, j+1, k+1)$ . Выберем направление осей так, чтобы ось  $OY$  была параллельна осям стержней, а оси  $OX$  и  $OZ$  – перпендикулярны ей. Для получения решения использовался метод конечных объемов [1], заключающийся в интегрировании уравнений Максвелла по объемам элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область. Возьмем интеграл по объему  $V$  каждой такой ячейки от уравнения (2) и, используя теорему Гаусса, заменим интегрирование дивергенции искомой функции по объему интегрированием нормальной компоненты данной функции по поверхности  $S$ , охватывающей объем

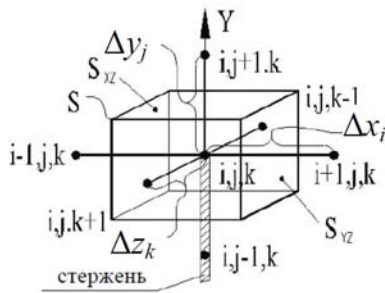


Рис. 1

Для получения решения использовался метод конечных объемов [1], заключающийся в интегрировании уравнений Максвелла по объемам элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область. Возьмем интеграл по объему  $V$  каждой такой ячейки от уравнения (2) и, используя теорему Гаусса, заменим интегрирование дивергенции искомой функции по объему интегрированием нормальной компоненты данной функции по поверхности  $S$ , охватывающей объем

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dv = \oint_S B_n \cdot ds = 0.$$

Выразим магнитную индукцию через напряженность МП  $\vec{H}$  ( $\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м). Тогда для каждого узла расчетной сетки запишем решаемое уравнение, перейдя от  $\vec{H}$  к скалярному магнитному потенциалу  $\varphi$  ( $\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi$ )

$$\oint_S \mu_{i,j,k} \cdot \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \cdot ds = 0, \quad (3)$$

где  $\mu_{i,j,k}$  – относительная магнитная проницаемость  $(i, j, k)$ -й ячейки.

При численной реализации данной задачи уравнения вида (3) записывались для каждого узла расчетной сетки в результате замены производных их разностными аналогами (подробнее см. [4]). Рассматривается случай, когда магнитные стержни находятся во внешнем однородном вертикальном магнитном поле напряженностью  $\vec{H}_0$ . Тогда магнитный потенциал на границах расчетной области может быть задан из условия равенства напряженности магнитного поля величине  $\vec{H}_0$  при достаточном удалении от магнитных объектов:  $\partial \varphi / \partial x = -H_{0x}$ ,  $\partial \varphi / \partial y = -H_{0y}$ ,  $\partial \varphi / \partial z = -H_{0z}$  (где  $H_{0x}$ ,  $H_{0y}$ ,  $H_{0z}$  –  $x$ ,  $y$ ,  $z$  компоненты вектора напряженности  $\vec{H}_0$  соответственно). Для решения полученной системы уравнений был использован итерационный метод переменных направлений [6], модифицированный применительно к решению системы трехмерных эллиптических уравнений [2]. Для уменьшения габаритов расчетной области при расчете использованы так называемые поглощающие граничные условия [9] (подробнее см. [4]).

**Результаты численного расчета магнитного поля при эквивалентной замене нескольких параллельных магнитных стержней одним эквивалентным.** С помощью описанного подхода были рассчитаны распределения МП для ряда систем, состоящих из четырех или пяти магнитных стержней, а также одного эквивалентного им стержня. Расчетным путем проанализирована степень влияния геометрии стержней на максимальные уровни снижения напряженности МП, которые наблюдаются в проходящем через середину стержней сечении, перпендикулярном их осям, при замене нескольких стержней одним эквивалентным. При расчете исследовались величины относительной напряженности МП:  $H^* = H / H_0$  (где  $H_0$  – модуль напряженности ГМП).

На рис. 2 показаны результаты численного расчета линий равной напряженности МП  $H^*$  в сечении, перпендикулярном осям стержней, проходящем через их середины. Данные распределения получены для стержней с относительной длиной  $b=0,5 \cdot L_R / r_R = 10$ , максимальные расстояния между осями стержней в горизонтальном направлении –  $D_R = 20 \cdot r_R$ . Распределения построены для сечения, проходящего через ось симметрии центрального стержня, совпадающей с осью симметрии конструкции. Распределения, показанные сплошными линиями, соответствуют случаю наличия в зоне прило-

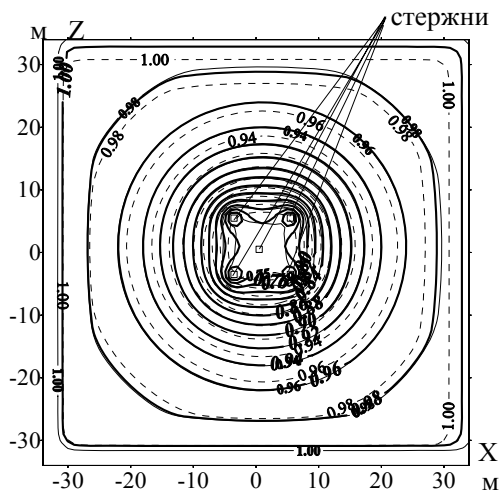


Рис. 2

четырёх ( $\mu_m=125$ ) и пяти ( $\mu_m=100$ ) стержней (сравни сплошные тонкие и жирные кривые на рис. 2).

Для случаев, когда в МП находятся магнитные стержни, диаметр поперечного сечения которых существенно (в 30 раз и более) меньше, чем их длина, а расстояния между ними в горизонтальном направлении в 10 и более раз больше их диаметра, может быть использовано допущение о том, что влиянием слабой неоднородности внешнего МП на напряженность МП внутри стержней можно пренебречь, по крайней мере, в их средней части. Тогда для исследования влияния относительной длины стержней  $b$  на уровни максимального снижения МП в сечении, проходящем перпендикулярно осям стержней через их середины, может быть использовано аналитическое решение для магнитного вытянутого эллипсоида, расположенного во внешнем МП, напряженность которого параллельна его оси (см. например, [7]). Такая возможность подтверждается также совпадением распределений, полученных в результате численного решения и с помощью аналитических зависимостей.

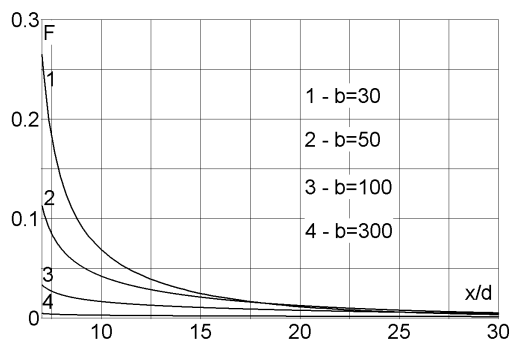


Рис. 3

Исходные данные при расчете были следующими: четыре стержня с  $\mu_m=125$ , диаметром  $d=2 \cdot r_R$ , фиксированной в каждом из 4-х вариантов длиной  $L_R$ , максимальным расстоянием между осями стержней в горизонтальном направлении  $D_R=20 \cdot r_R$ ; один стержень с  $\mu_{ef}=5$ , радиусом  $r_{ef}=0,5 \cdot D_R=10 \cdot r_R$ , длиной  $L_{ef}=L_R$ . Как видно из рис. 3, погрешность при определении максимальных уровней снижения внешнего МП в случае замены при расчете четырех стержней одним эквивалентным не превышает 5 %, если их относительная длина  $b$  больше 100.

**Численный расчет МП в окрестности одиночных магнитных стержней.** Если расстояния между стержнями больше их длины, а их диаметры на несколько порядков меньше их длины, метод, основанный на описанной выше конформальной схеме, использован быть не может. Для решения таких задач предлагается применять подход, являющийся развитием описанного в [3,9].

Учитывая, что отношение длины к диаметру для рассматриваемых проводников может превышать  $10^3$ , использование для расчета МП в данном случае метода интегральных уравнений или конечных элементов приводит к существенному усложнению задачи. Для решения подобных задач часто применяются конечно-разностные методы. Однако при этом возникает проблема выбора шага расчетной сетки  $\Delta$ . Поскольку длина стержня на несколько порядков превышает его радиус ( $L_R \gg r_R$ ),

женного МП пяти магнитных стержней с  $\mu_m=100$ ; сплошными жирными линиями - четырех магнитных стержней с  $\mu_m=125$  (соответствует предыдущей геометрии, но при отсутствии центрального стержня); пунктирными линиями - одного эквивалентного магнитного стержня с  $\mu_{ef}=5$ . Причем, длина эквивалентного стержня та же, что и реальных стержней:  $L_{ef}=L_R$ , а его радиус равен половине максимального расстояния между осями одиночных стержней в горизонтальном направлении:  $r_{ef}=0,5 \cdot D_R=10 \cdot r_R$ , а его ось совпадает с осью симметрии исходной системы стержней.

Как показали проведенные расчеты для рассматриваемого сечения, распределения, рассчитанные с помощью численного метода и с использованием аналитического выражения для вытянутого эллипсоида [7], совпадают в пределах погрешности расчетов (относительные отличия не превышают 3 %). Практически совпадают также в области вне железобетонной конструкции распределения напряженности МП для

распределения максимальных уровней относительных отличий напряженности МП в системе из четырех стержней ( $H_4$ ) и одного эквивалентного стержня ( $H_1$ ):  $F=(H_1-H_4)/H_4$  в зависимости от расстояния до оси системы в радиальном направлении ( $x$ ) в сечении, которое проходит через середины стержней перпендикулярно их осям (где  $d=2r_R$  - диаметр исходных стержней). Распределения получены для четырех значений длины стержней. Величина  $F$  характеризует отличия уровней наибольшего снижения напряженности МП при замене четырех стержней одним эквивалентным.

На рис. 3 показаны рассчитанные таким образом распределения максимальных уровней относительных отличий напряженности МП в системе из четырех стержней ( $H_4$ ) и одного эквивалентного стержня ( $H_1$ ):  $F=(H_1-H_4)/H_4$  в зависимости от расстояния до оси системы в радиальном направлении ( $x$ ) в сечении, которое проходит через середины стержней перпендикулярно их осям (где  $d=2r_R$  - диаметр исходных стержней). Распределения получены для четырех значений длины стержней. Величина  $F$  характеризует отличия уровней наибольшего снижения напряженности МП при замене четырех стержней одним эквивалентным.

выбор шага сетки  $\Delta$  из условия  $\Delta < r_R$  привел бы к резкому увеличению количества неизвестных в решаемой при расчете поля системы уравнений. Поэтому шаг по пространству приходится выбирать гораздо большим, чем  $r_R$ . В [9] описан подход, позволяющий с помощью конечно-разностных методов рассчитать распределение электромагнитного поля в системах, содержащих идеально проводящие бесконечные проволоки - цилиндры с круглым поперечным сечением, диаметр которых намного меньше поперечных размеров ячейки расчетной сетки. При этом полагается, что в направлениях, перпендикулярных оси цилиндра, напряженность электрического поля убывает по логарифмическому закону. Используем подход, подобный этому, а также описанному в [3], для расчета МП в окрестности магнитных стержней, находящихся в зоне внешнего МП. Разобьем рассматриваемую область на ячейки-параллелепипеды так, что узлы расчетной сетки  $(i, j, k)$  лежат на границах раздела сред и на оси стержня (рис. 1). Будем полагать, что свойства среды однородны в пределах каждой из ячеек за исключением тех, что примыкают к стержню. Тогда в решаемом уравнении (3) относительная магнитная проницаемость может быть условно представлена в виде тензора

$$\hat{\mu}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \mu k_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu k_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Такое представление магнитной проницаемости позволяет учесть особенности распределения МП в окрестности магнитных стержней, задавая коэффициенты  $k_x, k_y, k_z$  отличными от 1 для узлов, окружающих стержень или расположенных на нем, и  $k_x=k_y=k_z=1$  - для остальных узлов.

Для нахождения распределения МП с помощью конечно-разностных методов решаемые уравнения записываются для каждой ячейки расчетной сетки, на которую разбита расчетная область, в разностном виде. В нашем случае это происходит в результате замены производных от скалярного потенциала отношением разности значений потенциалов в соседних узлах к шагу сетки  $\Delta$ . При этом полагается, что распределение потенциалов между узлами вдоль осей является кусочно-линейным. Однако такая замена для узлов, расположенных вдоль осей стержней и на расстоянии от них шага  $\Delta$ , такого, что  $\Delta \gg r_R$ , связана с большой погрешностью. Для решения этой проблемы без существенного уменьшения шага расчетной сетки, будем полагать, как и в [3,9], что МП в непосредственной близости от оси стержня изменяется в соответствии с аналитической формулой для одиночного стержня. В нашем случае, в отличие от [3,9], представим потенциал вблизи оси стержня в виде известного аналитического решения для диэлектрического эллипсоида, находящегося во внешнем параллельном электрическом поле (см. например [7, с. 191] и далее), переписанного с учетом аналогии выражений для электростатических и магнитостатических явлений в виде

$$\varphi = H_0 y \left[ 1 + 0,5 L_R r_R^2 \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_e} \int_s^\infty \frac{ds}{(s + L_R^2) R_s} \right]^{-1}, \quad (5)$$

где  $H_0$  - напряженность внешнего вертикального МП ( $H_0 \parallel OY$ , где ось  $OY$  направлена вдоль оси стержня - рис. 1);  $\mu_m$  - относительная магнитная проницаемость материала стержня;  $\mu_e$  - относительная магнитная проницаемость окружающей его среды;  $R_s = (s + r_R^2) \cdot \sqrt{(s + L_R^2)}$  - функция, связанная с использованием эллипсоидальных координат;  $s$  - переменная интегрирования.

Для того чтобы найти напряженности МП в непосредственной близости от стержня, выразим потенциал  $\varphi$  и модуль напряженности МП  $|\vec{H}|$  в виде зависимости от  $H_{y0}$  - параллельной оси стержня составляющей напряженности МП в непосредственной близости от его поверхности, следующим образом:

$$\varphi = H_{y0} \cdot f_\varphi, \quad |\vec{H}| = H_{y0} \cdot f_H. \quad (6,7)$$

Используя (6), запишем  $\Delta\varphi(r_R, y)/\Delta x$  -  $x$ -й градиент потенциала в точке с координатой  $y$  в окрестности оси эллипсоида через разность потенциалов в точке на оси -  $\varphi(r_R)$  и в точке, отстоящей от нее на расстоянии шага расчетной сетки -  $\varphi(r_R + \Delta x)$  в виде

$$\Delta\varphi(r_R, y)/\Delta x = [\varphi(r_R, y) - \varphi(r_R + \Delta x, y)]/\Delta x = H_{y0}(y) \cdot [f_\varphi(r_R, y) - f_\varphi(r_R + \Delta x, y)]/\Delta x. \quad (8)$$

Выразим  $H_{y0}$  из (8)

$$H_{y0}(y) = \frac{\Delta\varphi(r_R, y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{f_\varphi(r_R, y) - f_\varphi(r_R + \Delta x, y)}. \quad (9)$$

Выражения для  $f_\varphi(r_R, y)$  и  $f_\varphi(r_R + \Delta x, y)$  получим из аналитического решения (5), преобразованного для случая, когда центр эллипсоида имеет координаты  $x_0, y_0, z_0$  и длина его большой полуоси ( $a$ ) существенно превосходит  $b=c$  - длину его малых полуосей ( $L_R = a \gg b=c=r_R$ )

$$\varphi = H_0 \cdot f_\varphi, \quad (10)$$

где  $f_\varphi = y \cdot \left[ \left(1 - \frac{a_{1\mu}}{K_{zn}}\right) + \frac{y_0}{y} \cdot \frac{a_{1\mu}}{K_{zn}} \right]$ ;  $a_{1\mu} = k_\mu \cdot a_1$ ;  $a_{2\mu} = k_\mu \cdot a_2$ ;  $k_\mu = 0,5 \cdot L_R \cdot r_R^2 \cdot \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_e}$ ;  $K_{zn} = 1 + a_{2\mu}$ ;

$$a_1 = -\frac{1}{(L_R^2 - r_R^2)^{3/2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{s + L_R^2} + \sqrt{L_R^2 - r_R^2}}{\sqrt{s + L_R^2} - \sqrt{L_R^2 - r_R^2}} + \frac{2}{(L_R^2 - r_R^2) \cdot \sqrt{s + L_R^2}};$$

$$a_2 = -\frac{1}{(L_R^2 - r_R^2)^{3/2}} \cdot \ln \frac{L_R + \sqrt{L_R^2 - r_R^2}}{L_R - \sqrt{L_R^2 - r_R^2}} + \frac{2}{(L_R^2 - r_R^2) \cdot L_R};$$

$$f_1 = -\frac{(L_R^2 + r_R^2) - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}{2};$$

$$f_2 = L_R^2 \cdot r_R^2 - r_R^2 \cdot [(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2] - L_R^2 \cdot (y - y_0)^2; \quad s = -f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - f_2} \quad [7, \text{с. 61}].$$

С учетом того, что на поверхности эллипсоида  $a_{1\mu} = a_{2\mu}$  ( $s=0, s > -r_R^2$  [7, с. 61]), получим из (10) выражение для потенциала на поверхности стержня

$$\varphi_R = H_0 \cdot f_R, \quad (11)$$

где  $f_R = y(1 + a_{2\mu} \cdot y_0 / y)(1 + a_{2\mu})^{-1}$ .

Из (9) и (10) запишем выражение для  $H_{y0}(y)$  в виде

$$H_{y0}(y) = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{y} \cdot \frac{1}{f_R / y - f_\varphi / y}. \quad (12)$$

Продифференцировав (10) по  $x$ , получим выражение для  $x$ -ой компоненты напряженности электрического поля вблизи эллипсоида через значения потенциалов в узлах расчетной сетки на оси стержня и на расстоянии  $x - x_0 = \Delta x$  от нее

$$H_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -H_{y0}(y) \cdot \left[ \frac{\partial f_\varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \right], \quad (13)$$

где  $\frac{\partial f_\varphi}{\partial s} = y \cdot \left[ -\frac{1}{K_{zn}} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \left[ 1 - \frac{a_{1\mu}(s=0)}{K_{zn}} \right] + y_0 \cdot \frac{1}{K_{zn}} \cdot \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial s} \right] = (y_0 - y) \cdot \frac{1}{K_{zn}} \cdot \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial s}$ ;  $\frac{\partial s}{\partial x} = x \cdot \left[ 1 - \frac{f_1 - L_R^2}{\sqrt{f_1^2 - f_2}} \right]$ .

Выражения для коэффициентов  $k_x$  в (4) для узлов, расположенных на расстоянии шага расчетной сетки  $\Delta x$  от оси стержня, пропорциональны интегралу от напряженности МП по элементарным площадкам  $S_{yz}$  (рис. 1). Получим данные выражения, проинтегрировав (13) по поверхности  $S_{yz}$  габаритами  $\Delta \times \Delta$ , расположенной в плоскости  $X = \text{const}$  на расстоянии  $\Delta x / 2$  от оси стержня

$$K_x = \frac{1}{\Delta^2} \int_{S_{yz}} H_x ds = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cdot \frac{H_{y0}(y)}{\Delta^2} \int_{y-\Delta/2}^{y+\Delta/2} \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} \frac{\partial f_\varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} dz dy = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cdot k_x, \quad (14)$$

где  $k_x = \frac{H_{y0}(y)}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{a_{2\mu}} \int_{y-\Delta/2}^{y+\Delta/2} \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} \frac{\partial a_{1\mu}(s)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} dz dy$ ;  $\frac{\partial a_{1\mu}(s)}{\partial s} = \frac{1}{(s + L_R^2)^{3/2} \cdot (s + r_R^2)}$ .

Выражения для коэффициентов  $k_y$  (4) для узлов, расположенных вблизи оси стержня и на расстоянии шага расчетной сетки  $\Delta y$  от его острия, пропорциональны интегралу от напряженности МП по площадкам  $S_{xz}$  (рис. 1). Получим данное выражение, проинтегрировав (13) по поверхности  $S_{xz}$  габаритами  $\Delta \times \Delta$ , расположенной в плоскости  $Y = \text{const}$

$$K_y = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \int_{S_{xz}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \cdot \frac{H_{y0}(y)}{\Delta^2} \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} \int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} \frac{\partial f_\varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} dx dz = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \cdot k_y, \quad (15)$$

где  $k_y = \frac{H_{y0}(y)}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{a_{2\mu}} \cdot \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} \int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} \frac{\partial a_{1\mu}(s)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} dx dz$ ;  $\partial a_{1\mu}(s)/\partial s$  - см. (14);  $\frac{\partial s}{\partial y} = y \cdot [1 - \frac{f_1 - r_R^2}{\sqrt{f_1^2 - f_2}}]$ .

Интегралы в (14) и (15) могут быть рассчитаны численно с помощью стандартной подпрограммы (например, TWODQ Fortran Microsoft). Разностное представление и граничные условия аналогичны описанным выше.

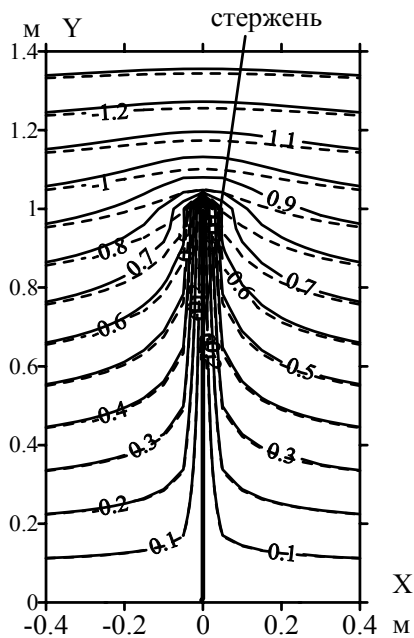


Рис. 4

На рис. 4 показаны рассчитанные таким образом распределения линий равных уровней магнитного потенциала  $\phi$ , выполненные при следующих параметрах стержня:  $\mu_m=10^5$ ,  $L_R=1$  м,  $r_R=1$  мм,  $\Delta=0,05$  м, приложенное поле  $H_0=H_{0y}=1$  А/м (пунктир соответствует аналитическому решению, сплошные линии – численному). Как показали проведенные расчеты, относительные отличия численных и аналитических результатов в зоне, отстоящей от стержня на расстояния, большие, чем шаг по пространству, не превышают 5%.

**Заключение.** 1. Предложены принципы замены нескольких рядом стоящих параллельных магнитных стержней одним эквивалентным стержнем при расчете максимальных уровней снижения постоянного магнитного поля в их окрестности. Такой эквивалентный стержень должен иметь ту же длину, что и исходные стержни, его ось совпадает с осью симметрии исходной системы, его диаметр равняется расстоянию между осями крайних исходных стержней, а его относительная магнитная проницаемость вычисляется как усредненная по объему, который занимает вся конструкция. Показано, что такая замена не приводит к погрешности, большей 5%, для распространенного на практике случая, когда длина стержней в 100 и более раз превышает их диаметр.

2. Приведена постановка и численная реализация задачи расчета распределения напряженности МП с помощью метода конечных объемов, которая позволяет рассчитать распределение МП в окрестности одиночных тонких протяженных магнитных стержней, расположенных в зоне действия МП, при использовании расчетной сетки, шаг которой существенно (на порядок и более) превышает размеры поперечного сечения стержней.

3. Выполнены примеры расчета распределения индукции МП в системах, которые состоят из одного или нескольких магнитных стержней разной длины и размера поперечного сечения. При этом использованы численные и аналитические методы.

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 150 с.

2. Резинкина М.М. Расчет проникновения низкочастотного трехмерного электрического поля в неоднородные слабопроводящие объекты // Электричество. – 2003. - № 8. - С. 50-55.

3. Резинкина М.М. Расчет трехмерных электрических полей в системах, содержащих тонкие проволоки // Электричество. - 2005. - № 1. - С. 44-49.

4. Резинкина М.М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной пространственной конфигурации // Журнал технической физики. – 2009. - Т. 79. - № 8. - С. 8-17.

5. Розов В.Ю., Резинкина М.М., Думанский Ю.Д., Гвозденко Л.А. Исследование техногенных искажений геомагнитного поля в жилых и производственных помещениях и определение путей их снижения до безопасного уровня // Технічна електродинаміка. Темат. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". - 2008. – Ч. 2. – С. 3-8.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.

7. Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма. - М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. - 539 с.

8. Sousa C.T., Leitao D.C., Ventural J., Tavares P.B., Araujo J.P. A versatile synthesis method of dendrites-free segmented nanowires with a precise size control // Nanoscale Research Letters. – 2012. - № 7. – Pp. 1-7.

9. Taflove A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. - Boston - London: Artech House, 2000. - 852 p.

10. Toal B., McMillen M., Murphy A., Atkinson W.H.R., Pollard R. Tuneable magneto-optical metamaterials based on photonic resonances in nickel nanorod arrays // Materials Research Express. – 2014. - № 1. – Pp. 1-11.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ В ОКОЛИЦІ МАГНІТНИХ СТЕРЖНІВ

М.М.Резинкіна<sup>1</sup>, докт.техн.наук, О.Л.Резинкін<sup>2</sup>, докт.техн.наук, О.В.Сосіна<sup>2</sup>

<sup>1</sup>—Інститут технічних проблем магнетизму Національної академії наук України,  
вул. Індустріальна, 19, Харків, 61106, Україна,  
e-mail: marinar2@mail.ru

<sup>2</sup>—Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут",  
вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, Україна.

*Запропоновано методику розрахунку розподілу магнітного поля (МП) в околиці одиночних, а також декількох магнітних стержнів, що розташовані поблизу одна до одної. Для знаходження розподілу магнітного поля поблизу одиночного магнітного стержня використано інформацію про спадання МП в околиці витягнутого магнітного еліпсоїда. У випадку декількох стержнів, розташованих поблизу один до одного, запропоновано використовувати конформальну схему, що дозволяє замінити їх одним еквівалентним стержнем, наявність якого викликає ті самі зміни рівнів напруженості МП, що і реальна конструкція. При розрахунках використано метод скінченних об'ємів. Виконано приклади розрахунку розподілів магнітного поля при різних параметрах стержнів. Бібл. 10, рис. 4.*

**Ключові слова:** магнітне поле, магнітні стержні, конформальна схема, метод скінченних об'ємів.

## MATHEMATICAL MODELING OF DISTRIBUTION OF MAGNETIC FIELD IN THE VICINITY OF THE MAGNETIC RODS

M.M.Rezynkina<sup>1</sup>, O.L.Rezynkin<sup>2</sup>, O.V.Sosina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>—Institute of Technical Problems of Magnetism of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Industrialna str., 19, Kharkiv, 61106, Ukraine, e-mail: marinar2@mail.ru

<sup>2</sup>—National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,  
Frunze st., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine.

*The methods of magnetic field (MF) distribution calculation in the vicinity of a single magnetic rod as well as a few nearby standing ones have been proposed. For finding of magnetic field distribution near a single magnetic rod, information about MF decrease in the vicinity of an elongate magnetic ellipsoid has been used. It is suggested to use a conformal scheme for the case of a few nearby standing magnetic rods; it allows replacing them by one equivalent rod, presence of which causes the same changes of MF intensity levels as the real construction does. The method of final volumes was used for numerical calculations. Examples of magnetic field distribution calculation have been performed at different parameters of the rods. References 10, figures 4.*

**Key words:** magnetic field, magnetic rods, conformal scheme, finite volume method.

1. Patankar S. Numerical methods of solution of problems of heat transfer and fluid dynamics. - Moskva: Energoatomizdat, 1984. - 150 p. (Rus)
2. Rezynkina M.M. Calculation of penetration of low-frequency three-dimensional electric field in the low conductive heterogeneous objects // Elektrichestvo. – 2003. - № 8. - Pp. 50 -55. (Rus)
3. Rezynkina M.M. Calculation of electric fields in three-dimensional systems containing a thin wire // Elektrichestvo. - 2005. - № 1. - Pp. 44-49. (Rus)
4. Rezynkina M. Numerical calculation of the magnetic field and magnetic moment of ferromagnetic bodies with a complex spatial configuration // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki. – 2009. - Vol. 79. - No. 8. - Pp. 8–17. (Rus)
5. Rozov V.Yu., Rezynkina M.M., Dumanskii Yu.D., Gvozdenko L.A. Research of environmental distortion of geomagnetic field in residential and industrial buildings and identifying ways of reducing them to the safe level // Tekhnichna elektrodynamika. Tematychnyi vypusk "Problemy suchasnoi elektrotekhniki". - 2008. –Vol. 2.– Pp. 3-8 (Rus)
6. Samarskii A.A. Theory of difference schemes. - Moskva: Nauka, 1989. - 616 p. (Rus)
7. Stratton J.A. The theory of electromagnetism. - Moskva-Leningrad: OGIZ, Gostekhizdat, 1948. - 539 p. (Rus)
8. Sousa I C.T., Leitao D.C., Ventural J., Tavares P.B., Araujo J.P. A versatile synthesis method of dendrites-free segmented nanowires with a precise size control // Nanoscale Research Letters. – 2012. - № 7. – Pp. 1 - 7.
9. Taflove A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. - Boston - London: Artech House, 2000. - 852 p.
10. Toal B., McMillen M., Murphy A., Atkinson W.H.R., Pollard R. Tuneable magneto-optical metamaterials based on photonic resonances in nickel nanorod arrays // Materials Research Express. – 2014. - № 1. – Pp. 1 - 11.

Надійшла 25.03.2014  
Остаточний варіант 30.04.2014