

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА
В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ**

И.С.Петухов, канд.техн.наук

Институт электродинамики НАН Украины,

пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина,

e-mail: igor_petu@mail.ru

Разработана математическая модель поверхностного эффекта в ферромагнитной среде, основанная на методе конечных элементов с представлением временных зависимостей гармоническим рядом. Приведено решение задачи при синусоидальном магнитном потоке и выполнено сравнение полученного решения с аналогичным, получаемым при возбуждении электромагнитного поля синусоидальным током. Показано, что даже при условии синусоидального магнитного потока индукция магнитного поля на поверхности и в толще ферромагнетика является несинусоидальной, а потери от вихревых токов имеют более высокие значения. Библ. 9, рис. 5.

Ключевые слова: метод конечных элементов, временные гармоники, поверхностный эффект, ферромагнитная среда.

Введение. Развитие методов моделирования поверхностного эффекта в ферромагнитной среде является важной задачей электротехники. Обусловлено это как возрастающими требованиями к точности расчетов, ростом вычислительных возможностей исследователей, так и многообразием практических случаев, в которых необходимо учитывать явление поверхностного эффекта в среде, обладающей нелинейными свойствами. В современных программных средствах при моделировании периодических электромагнитных полей зачастую определяется только первая временная гармоника. То есть, зависимость от времени искомой функции, как правило, векторного потенциала, представляется синусоидальной. Соответственно, временная зависимость магнитной индукции также является синусоидальной. Как подчеркивается в справочной системе пакета программ ANSYS (версия 7) – одного из лидеров на рынке программного обеспечения, специализирующегося на расчете физических полей, – "такая форма не является истинной формой волны, а скорее представляет приближение (аппроксимацию) к основной временной гармонике истинной формы волны магнитной индукции". Там же отмечено, что результирующие сила, момент и потери, определенные из аппроксимированной основной гармоники поля, соответственно, являются приближением к истинным значениям. В получившем широкое распространение пакете программ FemLab (Comsol) моделирование переменного электромагнитного поля проводится методом комплексных амплитуд, в результате чего определяется эквивалентная амплитуда основной гармоники каждой из величин, характеризующих поле [9]. При этом нелинейность характеристики намагничивания ферромагнитного материала так же, как и в вышеприведенном примере, может быть учтена лишь приближенно, поскольку в процессе расчета определяется амплитуда магнитной индукции, которой по основной кривой намагничивания ставится в соответствие амплитуда синусоидальной напряженности магнитного поля. Такое приближенное решение не может учесть уплощение формы временной зависимости магнитной индукции и пикообразную форму напряженности поля, обусловленные насыщением ферромагнетика. Это порождает погрешности в определении характеристик поля и, в итоге, ошибки в определении интегральных величин, потерь, электромагнитных сил, импеданса.

Часто квазистационарные уравнения поля с помощью метода конечных элементов (МКЭ) преобразуются к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1,9], которая интегрируется во временной области. Однако расчет переходного процесса до полного установления может потребовать неоправданно больших вычислительных затрат. Поэтому в [5] разработана методика внедрения в МКЭ временных зависимостей векторов поля, представленных тригонометрическим полиномом (несколькими членами ряда Фурье). В результате порядок системы уравнений МКЭ возрастает и составляет $2n_g N$ раз, где n_g – число учитываемых гармоник, N – число сеточных переменных (в данном исследовании – это узловые значения неизвестной функции). Тем не менее, система сохраняет свою ленточную структуру, характерную для МКЭ и обуславливающую его вычислительную эффективность. Заметим, что в случае использования временных гармоник (далее – метод временных гармоник – (МВГ)) для аппроксимации решения (по сравнению с магнитоэлектростатической задачей) вместо каждого элемента в матрице системы линейных алгебраических уравнений МКЭ присутствует полностью заполненный квадратный блок порядка $2n_g$. С другой стороны, при использовании во временной области какой-либо дискретной (сеточной) модели для обеспечения удовлетворительной точнос-

ти интегрирования требуется некоторое количество узлов, тем большее, чем выше требуемая точность. Совершенно очевидно, что в случае синусоидального процесса достаточно одной гармоники (одной комплексной переменной или двух действительных) для получения точного решения. В то же время при поиске дискретного решения число узлов на полупериоде будет существенно больше двух. В общем случае справедлив следующий вывод: чем более гладким является периодический процесс, тем использование МВГ имеет большее преимущество по сравнению с методом, использующим дискретный вид решения. А поскольку индуктивные элементы, содержащие ферромагнитные магнитопроводы, обладают хорошими фильтрующими свойствами, доля высших гармоник в энергетическом балансе, как правило, невелика. Поэтому моделирование полей в таких элементах при помощи МВГ может быть достаточно эффективным.

В работе [5] приведены результаты моделирования с помощью МВГ процесса проникновения периодического поля в ферромагнитную среду при возбуждении поля синусоидальным током. Но на практике более частым является случай, когда синусоидальным является напряжение, а ток из-за влияния нелинейности является несинусоидальным. Исследование особенностей этого случая и является целью настоящей статьи.

Математическая модель. Для моделирования электромагнитного поля примем следующие допущения. Электромагнитное поле является двухмерным, частота изменения поля достаточно низка, чтобы пренебречь токами смещения, а гистерезис в ферромагнитной среде отсутствует. В качестве независимой переменной традиционно будем использовать векторный магнитный потенциал, который в случае плоскопараллельного или осесимметричного полей имеет одну пространственную составляющую A_z . Если пренебречь активным сопротивлением и индуктивностью рассеяния обмотки устройства с ферромагнитным сердечником, синусоидальность приложенного к этой обмотке напряжения обуславливает синусоидальность ее потокосцепления. Воспользовавшись теоремой Стокса [3], можно связать величину магнитного потока через некоторую поверхность S с векторным потенциалом вдоль контура l , охватывающего эту поверхность,

$$\int_S \text{rot}_n A dS = \oint_l A dl, \quad (1)$$

где индекс n – обозначает проекцию на нормаль к поверхности. Учитывая связь векторного потенциала с вектором магнитной индукции B [2]

$$B = \text{rot} A, \quad (2)$$

можно определить магнитный поток Φ через данную поверхность и переменное напряжение u , которое наводится в контуре l этим магнитным потоком

$$\Phi = \int_S B_n dS = \oint_l A dl, \quad u = \frac{d}{dt} \oint_l A dl. \quad (3,4)$$

Исходным уравнением электромагнитного поля, использующим в качестве неизвестной функции векторный магнитный потенциал, является уравнение Максвелла (теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля) [2], которое, будучи выражено через потенциалы, с учетом определения (2) может быть переписано в виде

$$\text{rot} H = -\gamma \partial A / \partial t - \gamma \text{grad} \varphi + J_w, \quad (5)$$

где γ – электропроводность среды, φ – скалярный электрический потенциал, J_w – известная плотность тока сторонних источников. Если в случае плоскопараллельного поля в проводящих областях отсутствуют источники тока и напряжения (физически это соответствует случаю, когда однородная проводящая область замкнута сама на себя в бесконечности), уравнение (5) трансформируется в следующее:

$$\partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y + \gamma \partial A_z / \partial t = 0, \quad (6)$$

где H_y, H_x – пространственные составляющие напряженности магнитного поля в системе декартовых координат (x, y) . В свою очередь, составляющие напряженности поля выражаются через векторный потенциал с помощью нелинейных векторных соотношений [8]

$$(H_x, H_y) = f(B_x, B_y), \quad (B_x, B_y) = (\partial A_z / \partial y - \partial A_z / \partial x). \quad (7,8)$$

Уравнения (6)–(8), дополненные граничными условиями первого и второго рода векторного потенциала

$$A_z|_{\Gamma_1}, \quad \partial A_z / \partial n|_{\Gamma_2}, \quad (9)$$

составляют краевую задачу, имеющую единственное решение [3]. Здесь Γ_1, Γ_2 – соответствующие участки границы, n – направление внешней нормали к границе расчетной области. Конкретные вы-

ражения для граничных условий будут приведены ниже при формулировании численного решения, которое накладывает свою специфику на получение этих выражений [1].

Рассмотрим способы задания возбуждающей поле обмотки. Если обмотка с числом витков w имеет поперечное сечение S_w , то выражение (4), связывающее напряжение с векторным потенциалом, может быть преобразовано к виду (l – длина контура в направлении координаты z)

$$u = w \frac{l}{S_w} \frac{d}{dt} \int_{S_w} A_z dS. \quad (10)$$

Еще один способ моделирования поперечного сечения обмотки – это размещение бесконечно тонкого слоя тока в расчетной области или на ее границе. В этом случае аналогом соотношения (10) будет

$$u = w \frac{l}{L_w} \frac{d}{dt} \int_{L_w} A_z dL, \quad (11)$$

где L_w – длина контура, на котором расположен бесконечно тонкий слой обмотки.

Рассмотрим наиболее простую расчетную область Ω для краевой задачи (6)–(9), которая, тем не менее, сохраняет все черты, присущие исследуемому явлению – нелинейному поверхностному эффекту (рис. 1). Символом H_τ обозначена касательная составляющая напряженности поля, а символом J_s – поверхностная плотность тока, моделирующая бесконечно тонкую обмотку, расположенную на поверхности и показанную жирной линией (точки над переменными обозначают синусоидальную зависимость от времени). Граничные условия на рис. 1 приводят к одномерному характеру магнитного поля, зависящему теперь только от вертикальной координаты. Это упрощение, тем не менее, не устраняет влияние нелинейности на несинусоидальный характер поля, подлежащий исследованию.

На рис. 1, а источником поля является заданный на верхней грани векторный магнитный потенциал A_τ , который в соответствии с формулой (11) может быть определен по заданному напряжению, приложенному к бесконечно тонкой обмотке, расположенной на этой грани. В случае, изображенном на рис. 1, б, источник поля задается касательной составляющей напряженности поля H_τ . Если положить, что за пределами области поле отсутствует ($H=0$), тангенциальная составляющая равна плотности поверхностного тока J_s [7]. Это граничное условие фактически является неоднородным граничным условием 2-го рода, поскольку

$$\partial A / \partial n_\tau = B_\tau = H_\tau / \mu, \quad (12)$$

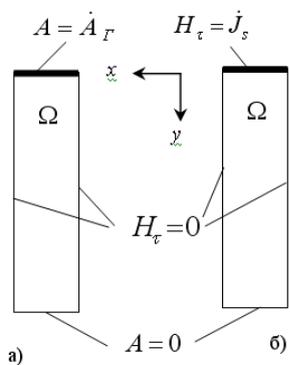


Рис. 1

где μ – магнитная проницаемость среды. Значение магнитной проницаемости для нелинейной задачи, вообще говоря, является также неизвестным. Однако, как будет показано далее, при задании граничных условий это значение не понадобится, т.е. выражение (12) приведено только для подтверждения факта строгости формулировки краевой задачи.

Два варианта данной задачи являются крайними частными случаями. Если мы потребуем синусоидальности магнитного потока, пронизывающего расчетную область вдоль горизонтальной координаты x , то есть зададим векторный потенциал на верхней грани, то получим несинусоидальную напряженность поля на поверхности, равную линейной плотности тока обмотки, расположенной там же. И, наоборот, если зададим на поверхности синусоидальную плотность тока, а следовательно и напряженность поля на поверхности, мы получим несинусоидальное значение индукции, а следовательно и несинусоидальный поток. Последний случай детально изучен в работе [5], где были определены погрешности, получаемые в результате пренебрежения несинусоидальным во времени характером электромагнитного поля. Однако первый случай с практической точки зрения более интересен, поскольку синусоидальным как раз чаще бывает магнитный поток, чем ток, протекающий в обмотке. Весьма характерным примером служит пик-трансформатор, ток в котором из-за насыщения ферромагнетика принимает пикообразную форму [2]. В связи с появлением высших гармоник в токе следует ожидать увеличения потерь.

Так же, как это сделано в [5], приближенное решение для векторного потенциала \tilde{A} ищется на сетке треугольных конечных элементов в виде тригонометрического полинома

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^3 \sum_{g=1}^{n_g} A_{jg} \zeta_g(\alpha) N_j(x, y), \quad (13)$$

где n_e – число конечных элементов сетки; j – номер узла сетки; n_g – число гармонических составляющих в решении; $\zeta_g(\alpha) = \begin{cases} \cos v\alpha & \text{– при } g \text{ – нечетном} \\ \sin v\alpha & \text{– при } g \text{ – четном} \end{cases}$; $v = 1, 2, 3, \dots$ – базисные функции, зависящие от времени; $\alpha = \omega t$ – безразмерное время; ω – круговая частота основной гармоники поля; N_j – пространственная базисная функция j -го узла. Отметим, что поскольку основная кривая намагничивания является нечетной функцией, то в полиноме (13) присутствуют только нечетные гармоники. Алгоритм, реализующий описываемую модель, был внедрен в пакет программ GE2D [5], в котором используются пространственные базисные функции первого порядка

$$N_j(x, y) = a_j + \beta_j x + \gamma_j y. \quad (14)$$

Для нахождения вектора неизвестных – амплитуд узловых значений векторного потенциала A_{ij} , входящих в (13), к краевой задаче (6)–(9) применяется метод Галёркина [1]. Результатом применения этого метода к уравнению (6) будет следующее интегральное соотношение в ослабленной формулировке:

$$-\frac{2}{\pi} \iint_{\Omega} \left[\tilde{H}_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - \tilde{H}_x \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \zeta_g(\alpha) d\Omega d\alpha + \frac{2}{\pi} \iint_{\Gamma} H_\tau N_i \zeta_g(\alpha) d\Omega d\alpha - \frac{2}{\pi} \iint_{\Omega} \gamma \omega \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} N_i \zeta_g(\alpha) d\Omega d\alpha = 0. \quad (15)$$

Во втором слагаемом соотношения (15) присутствует касательная составляющая напряженности поля на границе, которая входит в граничное условие (12). Это обстоятельство, как указывалось ранее, исключает необходимость вычислять магнитную проницаемость среды на поверхности.

Возвращаясь к двум вариантам краевой задачи в области (рис. 1), отметим следующее. В варианте на рис. 1, б второе слагаемое в (15) включает известный источник поля – поверхностный ток ($J_s = H_\tau$). А в варианте на рис. 1, а известной величиной является граничное значение векторного потенциала, а второе слагаемое является дополнительным вкладом в невязку от вектора неизвестных.

Обсуждение результатов. Опуская выкладки, касающиеся преобразования интегрального соотношения (15) в систему нелинейных уравнений и метода ее решения, которые детально изложены в [5], проведем сравнительный анализ результатов моделирования характеристик поверхностного эффекта при синусоидальном потоке в ферромагнетике и рассмотренного ранее [5] случая синусоидального тока источника поля. Для преемственности результатов в качестве ферромагнитной среды расчеты проведем для конструкционной стали (Ст.3) [6]. В работе [5] обнаружено существенное отличие потерь от вихревых токов в среде при учете несинусоидального характера поля по сравнению с гармоническим процессом. Поэтому в качестве основного количественного показателя выберем удельные потери в стальном листе толщиной 20 мм (в соответствии с симметричной постановкой задачи на рис. 1 будем рассчитывать поле только в половине листа). Начало координат совместим с поверхностью ферромагнетика (там же) и величину переменных на поверхности будем обозначать индексом "о".

На рис. 2 показаны временные зависимости магнитной индукции в листе при синусоидальном заданном токе на поверхности и аппроксимации процесса тремя нечетными гармониками ($v=1,3,5$). График индукции на поверхности $B_o(t)$ обозначен треугольными метками, а временные зависимости индукции B_i , вычисленные в толще ферромагнетика в десяти слоях на равных расстояниях, показаны сплошными линиями без меток. Графики поверхностного тока $J_s(t)$ и его первой гармоники $J_{s1}(t)$ здесь и в дальнейшем обозначены соответственно затусшеванными кружками и квадратиками (ввиду синусоидальности тока в данном случае на рис. 2 эти кривые совпадают). Отметим, что максимальное значение поверхностной

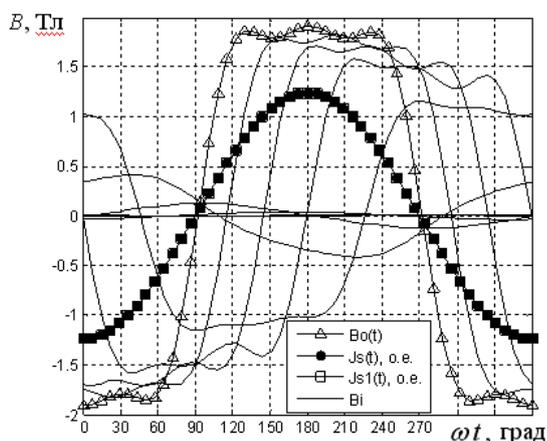


Рис. 2

плотности тока для данного примера и последующих составляло приблизительно 29000 А/м. Эта величина близка к нижней границе линейной нагрузки асинхронных машин средней и большой мощности [6].

Теперь рассмотрим процессы в ферромагнетике при синусоидальном потоке в нем, которые получены при тех же уровнях электромагнитных нагрузок (их первой гармоники) на поверхности, что и в предыдущем случае. Временные зависимости, соответствующие этому случаю, показаны на рис. 3 с теми же обозначениями, что и на рис. 2. Сравнение показывает, что поток в обоих случаях практически протекает в половине рассматриваемой области (так как только в пяти слоях максимальные значения индукции B_i превышают половину максимума индукции на поверхно-

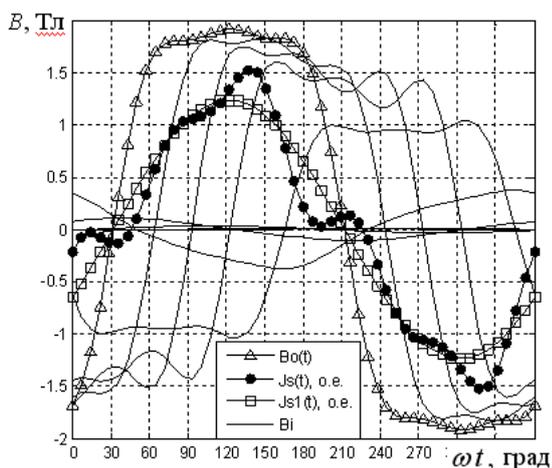


Рис. 3

потока. Для качественного рассмотрения процессов в ферромагнетике нельзя обойти вниманием появление пикообразного тока при существенном насыщении. Ведь форма поверхностного тока на рис. 3 не очень напоминает пикообразный ток, приведенный, например, в работе [4]. Для освещения этого противоречия рассмотрим процесс, аналогичный предыдущему, но при низкой электропроводности среды, исключающей явление поверхностного эффекта. Временные зависимости исследуемых величин для данного случая показаны на рис. 4. Естественно, на этом рисунке отсутствуют графики магнитной индукции в слоях, так как она постоянна по всей толщине листа, а также не показан график первой гармоники эквивалентного поверхностного тока. Но дополнительно приведен график напряженности поля на поверхности, определенный по кривой намагничивания и значению индукции, который обозначен точками. Обозначения остальных кривых – аналогичны таковым на рис. 2, 3. Значения кривых напряженности поля на поверхности $H_s(B_0)$ и поверхностной плотности тока J_s для наглядности масштабированы и приведены к максимальному значению магнитной индукции. Цель графиков на рис. 4 – показать образование пикообразной формы тока при синусоидальном магнитном потоке, которая наиболее выражена в нелинейной среде без вихревых токов и несколько "осаживается" из-за влияния вихревых токов (рис. 3). С физической точки зрения напряженность поля на поверхности H_s и поверхностный ток J_s – это одно и то же. Но с вычислительной точки зрения в рассмотренной математической модели поверхностный ток определяется в виде тригонометрического полинома из решения системы уравнений. Поэтому при использовании в решении гармоник до 5-го порядка мы получаем решение, отличающееся от истинного (помеченного точками). Тем не менее с точки зрения расчета потерь в ферромагнитной среде от вихревых токов или ее импеданса, как показано в работе [5], вполне достаточно учета пяти высших временных гармоник поля. Однако ключевым вопросом остается сравнение потерь от вихревых токов в обоих рассмотренных случаях. Результаты расчетов при различных уровнях электромагнитных нагрузок для рассматриваемой среды проливают свет на поставленный вопрос. Показательными явились зависимости удельных потерь (на метр длины) в расчетной области толщиной 10 мм (половина стального листа) от амплитуды первой гармоники магнитной индукции на поверхности ферромагнетика B_m (рис. 5). Анализ их показывает, что, хотя разница между кривыми невелика, но все же заметна. В данном случае, кривая соответствующая синусоидальному потоку в области насыщения (при индукциях более 2 Тл), проходит на 15...19% выше кривой для случая возбуждения

сти). Этот верхний слой значительно насыщен, о чем свидетельствует уплощенная форма индукции. Величина эквивалентного поверхностного тока J_s явно несинусоидальна (рис. 3).

Однако возникает вопрос, каким образом при таком несинусоидальном характере индукции и эквивалентного поверхностного тока реализуется синусоидальная зависимость магнитного потока, протекающего через всю толщину листа? Тем не менее, это так. Суммирование потоков, имеющих в разных слоях ферромагнитной среды разные фазы (рис. 3), и обеспечивает гармонический характер суммарного потока. Это гарантируется синусоидальной формой векторного потенциала на границе области (рис. 1, а), которая в соответствии с выражением (3) определяет синусоидальность магнитного

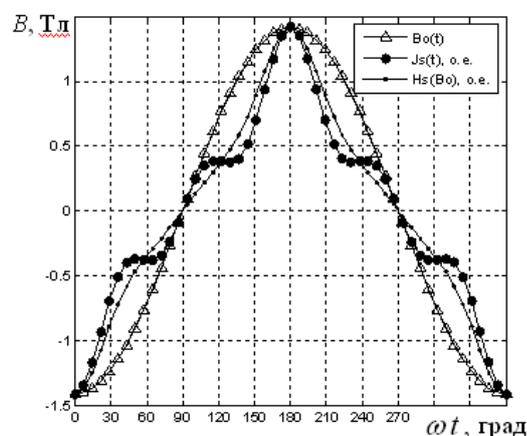


Рис. 4

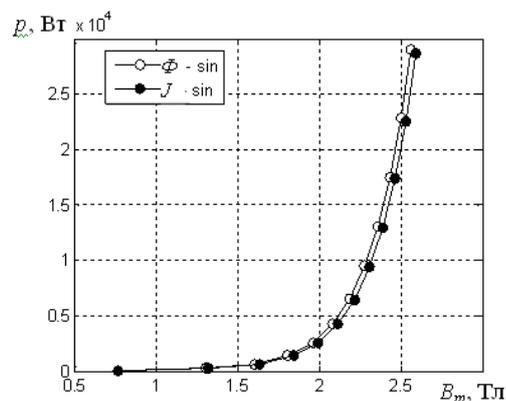


Рис. 5

поля синусоидальним током. Это увеличение потерь было ожидаемо, поскольку амплитуда тока из-за появления в нем высших гармоник возрастает по сравнению с синусоидальной (рис. 3). Как показывают исследования, это возрастание тем больше, чем выше степень нелинейности кривой намагничивания, однако получение количественных оценок не входило в задачи данной работы. Целью было определение необходимости учета характера источника поля (синусоидальный ток или синусоидальное напряжение) и вследствие этого правильное задание свойств этих источников в расчетной модели.

Заключение. При анализе электромагнитных устройств, в ферромагнитных элементах конструкции которых имеет место явление поверхностного эффекта, следует различать случаи, когда питание осуществляется синусоидальным током и когда оно осуществляется с помощью источника синусоидального напряжения. В последнем случае при одном и том же уровне магнитной индукции на поверхности массивного ферромагнетика удельные объемные потери от вихревых токов больше, чем в первом. Для ферромагнитной среды с характеристикой намагничивания близкой к характеристике конструкционной стали эти потери в насыщенном режиме могут превышать потери, рассчитанные для условия возбуждения поля синусоидальным током. В ферромагнетиках с более выраженным перегибом основной кривой намагничивания указанное различие может быть еще большим.

1. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 320 с.
2. *Калантаров П.Л., Нейман Л.Р.* Теоретические основы электротехники. – Л.-М.: Госэнергоиздат, 1951. – 464 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука. – 1978. – 832 с.
4. *Нейман Л.Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1949. – 190 с.
5. *Петухов И.С.* Моделирование переменного электромагнитного поля в ферромагнитной проводящей среде методом конечных элементов // Техн. электродинамика. – 2008. – №4. – С. 18–26.
6. *Сергеев П.С., Виноградов Н.В., Горяинов Ф.А.* Проектирование электрических машин. – М.: Энергия, 1970. – 632 с.
7. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука. – 1976. – 616 с.
8. *Фильц Р.В.* Общий алгоритм определения магнитных параметров нелинейных сред // Математические методы и физико-механические поля. – 1975. – Вып.16. – С. 101–106.
9. *FEMLAB User's Guide and Introduction.* – FEMLAB 2.3. – COMSOL, Inc., 1994–2002. – 436 p.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВОГО ЕФЕКТУ У ФЕРРОМАГНЕТИКУ ЗА УМОВ СИНУСОЇДАЛЬНОГО МАГНІТНОГО ПОТОКУ

І.С.Петухов, канд.техн.наук

**Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна.**

E-mail: igor_petu@mail.ru

Розроблено математичну модель поверхневого ефекту в ферромагнітному середовищі, яка базується на методі скінченних елементів із представленням залежностей від часу гармонічним рядом. Наведено рішення задачі за умов синусоїдального магнітного потоку та виконано порівняння отриманого рішення з аналогічним, що має місце за умов збудження електромагнітного поля синусоїдальним струмом. Показано, що навіть за умов синусоїдального магнітного потоку індукція на поверхні та у товщі ферромагнетика є несинусоїдальною, а втрати від вихрових струмів мають більш високі значення. Бібл. 9, рис. 5.

Ключові слова: метод скінченних елементів, часові гармоніки, поверхневий ефект, ферромагнітне середовище.

NUMERICAL SIMULATION OF SKIN EFFECT IN FERROMAGNETIC FOR SINUSOIDAL MAGNETIC FLUX

I.S.Petukhov

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,

Peremohy pr., 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine,

e-mail: igor_petu@mail.ru

A mathematical model for the skin effect in ferromagnetic medium based both on finite element method and time harmonics method was developed. A solution under condition of sinusoidal magnetic flux was given, and a comparison of the solution to the same, obtained upon excitation of the magnetic field by sinusoidal current, was performed. It is shown that even in the case of a sinusoidal magnetic flux the magnetic flux density on the surface and inside of the ferromagnetic is non-sinusoidal, and eddy current losses have higher values. References 9, figures 6.

Key words: finite element method, time harmonics method, skin effect, ferromagnetic.

1. *Zenkewich O., Morgan K.* Finite Elements and Approximation. – Moskva: Mir, 1986. – 320 p. (Rus)
2. *Kalantarov P.L., Neimann L.R.* Theoretical fundamentals of electrical engineering. – Leningrad-Moskva: Gosenergoizdat, 1951. – 464 p. (Rus)
3. *Korn G., Korn T.* Mathematical handbook. – Moskva: Nauka, 1978. – 832 p. (Rus)
4. *Neimann L.R.* The skin effect in ferromagnetic solids. – Moskva-Leningrad: Gosenergoizdat, 1949. – 190 p. (Rus)
5. *Petukhov I.S.* Finite element modeling of of variable electromagnetic field in ferromagnetic conducting medium // *Tekhnichna elektrodynamika.* – 2008. – №4. – Pp. 18–26. (Rus)
6. *Sergeev P.S., Vinogradov N.V., Goriainov F.A.* Design of electric machines. – Moskva: Energiia, 1970. – 632 p. (Rus)
7. *Tamm I.E.* Fundamentals of the theory of electricity. – Moskva: Nauka, 1976. – 616 p. (Rus)
8. *Filts R.V.* General algorithm to determine the magnetic parameters of nonlinear media // *Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polia.* – 1975. – Vol.16. – Pp. 101–106.
9. *FEMLAB User's Guide and Introduction.* – FEMLAB 2.3. – COMSOL, Inc., 1994–2002. – 436 p.

Надійшла 08.02.2013

Received 08.02.2013