

УДК 621.314

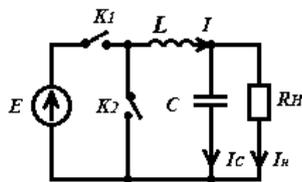
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ  
В ИМПУЛЬСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ НАПРЯЖЕНИЯ

Н.А.Шидловская, чл.-корр. НАН Украины, Ю.В.Руденко, канд.техн.наук  
Институт электродинамики НАН Украины,  
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина. e-mail: [rudenko@ied.org.ua](mailto:rudenko@ied.org.ua)

На примере импульсного преобразователя понижающего типа показана возможность применения теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием для анализа электромагнитных процессов. Получены рекуррентные формулы для постоянных интегрирования, позволяющие определять их значения для интервалов постоянства структуры преобразователя (накопления и отдачи энергии дросселем) в зависимости от номера переключения. Данные формулы легли в основу удобных аналитических выражений, позволяющих исследовать процессы в преобразователе как в переходных, так и в установившихся режимах. Библ. 4, рис. 1.

**Ключевые слова:** полупроводниковые преобразователи, импульсные системы, переходные и установившиеся режимы.

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием используются как математические модели процессов, подверженных «мгновенному» изменению состояния. Такие явления присутствуют в механических и электронных системах. Их изучают в теории автоматического регулирования, задачах оптимального управления и в других областях [1,3]. Теория уравнений с импульсным воздействием во многом аналогична классической теории дифференциальных уравнений, но имеет специфические отличия. Особенность задач с импульсным воздействием состоит в том, что в промежутках между импульсами (изменениями состояния) система является неизменной. Это означает, что динамику дифференциальной системы в промежутках между изменениями можно проанализировать аналитически. В рамках этой теории информацию о динамике системы, описываемой дифференциальными уравнениями, получают, последовательно определяя значения переменных в дискретные моменты времени, отвечающие пересечению траекторий в фазовом пространстве с некоторой секущей поверхностью. В качестве секущей поверхности для систем с периодическим импульсным воздействием можно выбрать, например, плоскости координата-время, расположенные через период внешнего воздействия. Данная теория, однако, не избавляет от необходимости решать само дифференциальное уравнение. Это можно сделать аналитически, применяя те или иные методы решения дифференциальных уравнений на интервалах постоянства состояния системы. Используя значения переменных в моменты изменения состояния системы, начиная с нулевых начальных условий (нулевого переключения), а также определяя значения постоянных интегрирования для решений на интервалах постоянства состояния системы, можно определить рекуррентные аналитические выражения для постоянных интегрирования в зависимости от номера интервала переключения системы. Особенность метода теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (в отличие от традиционного кусочно-припасовочного метода) состоит в том, что предлагаемый метод позволяет определить мгновенные значения переменных состояния системы в любой момент времени как в переходном режиме, так и в установившемся, не производя решения уравнений на всех интервалах до рассматриваемого момента времени.



Целью данной работы является получение соотношений, описывающих состояние преобразователя понижающего типа при помощи теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

В качестве характерного примера импульсной системы рассмотрим импульсный преобразователь напряжения понижающего типа, широко используемый в преобразовательной технике (рисунок). Известной особенностью работы такого преобразователя в режиме непрерывного тока дросселя является наличие двух интервалов за период работы схемы: накопления и отдачи энергии дросселем. Режиму накопления энергии соответствует замкнутое состояние ключа  $K_1$  и разомкнутое состояние ключа  $K_2$ . Противоположное состояние ключей соответствует интервалу отдачи дросселем энергии.

Допускаем, что ключи  $K_1, K_2$  являются идеальными, а моменты их срабатывания – одно-временными и мгновенными. Общая система дифференциальных уравнений, описывающих процессы в преобразователе, имеет вид

$$di/dt + u_C/L = E\gamma/L, \quad du_C/dt + u_C/(CR_H) = I/C, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – кусочно-линейная функция, приобретающая единичные значения на интервалах накопления энергии и нулевые значения – на интервалах отдачи энергии в нагрузку.

Рассмотрим последовательность чередующихся интервалов накопления и отдачи энергии дросселем данного преобразователя, начиная с начального включения в момент времени  $t=0$  (нулевое включение). На интервале накопления энергии дросселем (первый и последующие нечетные интервалы) дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции напряжения на конденсаторе  $u_C$  имеет вид

$$d^2u_C/dt^2 + (CR_H)^{-1}du_C/dt + (LC)^{-1}u_C = E(LC)^{-1}. \quad (2)$$

Решение системы (1) в случае апериодического или колебательного режима запишем так [4]:

$$u_C = A_{10}e^{\lambda_1 t} + A_{20}e^{\lambda_2 t} + E, \quad (3)$$

где  $\lambda_{1,2}$  – корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -(2CR_H)^{-1} \pm \sqrt{(4C^2R_H^2)^{-1} - (LC)^{-1}}. \quad (4)$$

Соответственно запишем выражение для тока дросселя

$$i = (C\lambda_1 + R_H^{-1})A_{10}e^{\lambda_1 t} + (C\lambda_2 + R_H^{-1})A_{20}e^{\lambda_2 t} + ER_H^{-1}. \quad (5)$$

Считаем, что в начальный момент времени при нулевом переключении ключей ( $t_0 = 0$ ) ток в индуктивности и напряжение на конденсаторе в преобразователе равны нулю. Следовательно, постоянные интегрирования для уравнений (3), (5) принимают вид

$$A_{10} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}, \quad A_{20} = -E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}. \quad (6)$$

На интервале отдачи энергии дросселем в нагрузку (второй и последующие четные интервалы) общее дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции напряжения на конденсаторе  $u_C$  будет иметь вид

$$u_C d^2u_C/dt^2 + (CR_H)^{-1}du_C/dt + (LC)^{-1}u_C = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) запишем следующим образом:

$$u_C = A_{11}e^{\lambda_1 t} + A_{21}e^{\lambda_2 t}, \quad (8)$$

а выражение для тока дросселя представим в следующей записи:

$$i = A_{11}e^{\lambda_1 t}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + A_{21}e^{\lambda_2 t}(C\lambda_2 + R_H^{-1}). \quad (9)$$

Заметим, что, поскольку вид характеристического уравнения на рассматриваемых интервалах не изменяется, его корни  $\lambda_{1,2}$  будут определяться по формуле (4).

В соответствии с законами коммутации [2] значения тока в дросселе и напряжения на конденсаторе до и после коммутации равны между собой. Поэтому, для определения постоянных интегрирования для решений на втором интервале первого периода работы преобразователя – отдачи энергии в нагрузку – запишем соотношения для функции тока и напряжения в момент переключения  $t_1$  между интервалами

$$\begin{aligned} A_{11}e^{\lambda_1 t_1} + A_{21}e^{\lambda_2 t_1} &= A_{10}e^{\lambda_1 t_1} + A_{20}e^{\lambda_2 t_1} + E, \\ A_{11}e^{\lambda_1 t_1}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + A_{21}e^{\lambda_2 t_1}(C\lambda_2 + R_H^{-1}) &= A_{10}e^{\lambda_1 t_1}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + A_{20}e^{\lambda_2 t_1}(C\lambda_2 + R_H^{-1}) + ER_H^{-1}, \\ e^{\lambda_1 t_1}(A_{11} - A_{10}) + e^{\lambda_2 t_1}(A_{21} - A_{20}) &= E, \\ e^{\lambda_1 t_1}(C\lambda_1 + R_H^{-1})(A_{11} - A_{10}) + e^{\lambda_2 t_1}(C\lambda_2 + R_H^{-1})(A_{21} - A_{20}) &= ER_H^{-1}. \end{aligned}$$

Для упрощения выражений введем обозначения  $B_{11} = (A_{11} - A_{10})e^{\lambda_1 t_1}$ ,  $B_{21} = (A_{21} - A_{20})e^{\lambda_2 t_1}$ . Тогда в сокращенной форме можем записать систему уравнений для поиска постоянных интегрирования на искомом интервале

$$\begin{aligned} B_{11} + B_{21} &= E, \quad B_{21} = E - B_{11}, \quad B_{11}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + B_{21}(C\lambda_2 + R_H^{-1}) = ER_H^{-1}, \\ B_{11}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) - B_{11}(C\lambda_2 + R_H^{-1}) &= ER_H^{-1} - E(C\lambda_2 + R_H^{-1}), \quad \text{откуда получим} \quad B_{11} = -E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}, \\ B_{21} &= E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Соответственно, переходя к первоначальным обозначениям постоянных интегрирования, можем записать

$$A_{11} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(e^{-\lambda_1 t_0} - e^{-\lambda_1 t_1}), \quad A_{21} = -E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(e^{-\lambda_2 t_0} - e^{-\lambda_2 t_1}). \quad (10)$$

Второй период работы преобразователя также начинается с интервала накопления энергии. Используя закон коммутации для определения начальных условий искомым переменных, запишем выражения для тока дросселя и напряжения на конденсаторе для момента коммутации  $t_2$

$$A_{12}e^{\lambda_1 t_2} + A_{22}e^{\lambda_2 t_2} + E = A_{11}e^{\lambda_1 t_2} + A_{21}e^{\lambda_1 t_2},$$

$$A_{21}e^{\lambda_1 t_2}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + A_{22}e^{\lambda_2 t_2}(C\lambda_2 + R_H^{-1}) + ER_H^{-1} = A_{11}e^{\lambda_1 t_2}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + A_{21}e^{\lambda_2 t_2}(C\lambda_2 + R_H^{-1}).$$

Применяя обозначения, аналогичные предыдущему интервалу работы преобразователя, запишем следующие соотношения:  $B_{11} + B_{22} = -E$ ,  $B_{21}(C\lambda_1 + R_H^{-1}) + B_{22}(C\lambda_2 + R_H^{-1}) = -ER_H^{-1}$ , откуда получим  $B_{21} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ ,  $B_{22} = -E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ . Постоянные интегрирования на данном интервале работы преобразователя приобретают вид

$$A_{12} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(e^{-\lambda_1 t_0} - e^{-\lambda_1 t_1} + e^{-\lambda_1 t_2}), \quad A_{22} = -E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(e^{-\lambda_2 t_0} - e^{-\lambda_2 t_1} + e^{-\lambda_2 t_2}). \quad (11)$$

Сравнивая выражения для постоянных интегрирования (6), (10), (11) на первых трех интервалах работы регулятора, а также полагая работу преобразователя в неуправляемом режиме с неизменными интервалами работы и вводя обозначения  $t_1 - t_0 = \Delta t_1$ ,  $t_2 - t_1 = \Delta t_2$ ,  $\Delta t_1 + \Delta t_2 = T$ , где  $T$  – период работы схемы, можем записать рекуррентные формулы для постоянных интегрирования после  $n$ -го переключения (для  $n$ -го интервала работы) преобразователя. Для интервалов накопления энергии (когда  $n$  – четное число) постоянные интегрирования имеют вид

$$A_{1n} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\left(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t_1} + e^{-\lambda_1 T} + \dots + (-1)^n e^{-\lambda_1 Tn/2}\right), \quad (12)$$

$$A_{2n} = -E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\left(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1} + e^{-\lambda_2 T} + \dots + (-1)^n e^{-\lambda_2 Tn/2}\right), \quad (13)$$

а для интервалов отдачи энергии (когда  $n$  – нечетное число) постоянные интегрирования равны

$$A_{1n} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\left(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t_1} + e^{-\lambda_1 T} + \dots + (-1)^n e^{-\lambda_1((n-1)T/2 + \Delta t_1)}\right), \quad (14)$$

$$A_{2n} = E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\left(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1} + e^{-\lambda_2 T} + \dots + (-1)^n e^{-\lambda_2((n-1)T/2 + \Delta t_1)}\right). \quad (15)$$

Выражения (12)–(15) представляют собой знакпеременные ряды. Для перехода к ряду с положительными членами сгруппируем попарно члены с отрицательным и положительным знаками.

Например,  

$$e^{-\lambda_2 0(\Delta t_1 + \Delta t_2)} - e^{-\lambda_2(1 \cdot \Delta t_1 + 0 \cdot \Delta t_2)} = e^{-\lambda_2 0(\Delta t_1 + \Delta t_2)}(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}),$$

$$e^{-\lambda_2(\Delta t_1 + \Delta t_2)} - e^{-\lambda_2(2 \cdot \Delta t_1 + 1 \cdot \Delta t_2)} = e^{-\lambda_2(\Delta t_1 + \Delta t_2)}(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}).$$

Выделим постоянный множитель  $(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1})$  и введем обозначение:  $\Delta t_2 = k\Delta t_1$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Перепишем общий член ряда в виде:

– на интервалах накопления энергии

$$(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_2 m T} + e^{-\lambda_2(m+1)T}, \quad (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_2 m(k+1)\Delta t_1} + e^{-\lambda_2(m+1)(k+1)\Delta t_1};$$

– на интервалах отдачи энергии

$$(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_2 m T}, \quad (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m(k+1)\Delta t_1 \lambda_2},$$

где  $m$  – количество периодов работы преобразователя.

Проверка сходимости полученных рядов с помощью интегрального признака Коши [4]

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 x} dx = \lim_{D \rightarrow \infty} \int_0^D e^{-\lambda_2 x} dx = \lim_{D \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2} \right) = \infty$$

показала, что ряды являются расходящимися, т.к.  $\lambda_2$  – отрицательно.

Окончательное выражение для искомого напряжения на конденсаторе на этапе накопления имеет вид

$$u_{C_{M+1}} = E\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \left\{ (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t_1}) \left( \sum_{m=0}^M e^{-\lambda_1 m T} \right) + e^{-\lambda_1 (M+1)T} \right\} e^{\lambda_1 t} - \\ - E\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \left\{ (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}) \left( \sum_{m=0}^M e^{-\lambda_2 m T} \right) + e^{-\lambda_2 (M+1)T} \right\} e^{\lambda_2 t} + E,$$

где  $M$  – количество периодов работы преобразователя, прошедших до текущего момента времени  $t$ .

На этапе отдачи энергии напряжение на конденсаторе изменяется по закону

$$u_{C_{M+1}} = \frac{E\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t_1}) \left( \sum_{m=0}^M e^{-\lambda_1 m T} \right) e^{\lambda_1 t} - \frac{E\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t_1}) \left( \sum_{m=0}^M e^{-\lambda_2 m T} \right) e^{\lambda_2 t}.$$

Заметим, что хотя ряды (12)–(15) являются расходящимися, в окончательных выражениях для искомых переменных они умножаются на экспоненциальные выражения  $e^{\lambda_1 t}$  и  $e^{\lambda_2 t}$ . Таким образом, общие члены ряда для каждого конкретного момента времени  $t_x$  приобретают вид:  $e^{\lambda_1(t_x - MT)}$  и  $e^{\lambda_2(t_x - MT)}$ .

Аналогичным путем могут быть получены выражения для тока дросселя и других характеристик преобразователя. Заметим, что поскольку при переключениях в функциях токов и напряжений не возникают разрывы первого и второго рода, анализ дифференциальных уравнений не требует исследования устойчивости их решений в точках переключения.

Проведенный анализ показал, что применение теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием для импульсных преобразователей напряжения позволяет анализировать как переходные, так и установившиеся режимы преобразователя, а также получать удобные для использования выражения для токов и напряжений в цепи преобразователей, дающие возможность определять их значения в любой момент времени.

1. Анашкин О.В., Митко О.В. Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием // Динамические системы. – 2011. – Том 1(29). – № 1. – С. 5–14.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища школа, 1987. – 288 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II. – М.: Гос.тех.изд-дат, 1953. – 628 с.

УДК 621.314

## ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДО АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ В ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧАХ НАПРУГИ

Н.А.Шидловська, чл.-корр. НАН України, Ю.В.Руденко, канд.техн.наук  
Інститут електродинаміки НАН України,

пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна. e-mail: [rudenko@ied.org.ua](mailto:rudenko@ied.org.ua)

На прикладі імпульсного перетворювача понижуючого типу показано можливість застосування теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією для аналізу електромагнітних процесів. Отримано рекурентні формули для постійних інтегрування, що дозволяють визначати їхні значення для інтервалів постійності структури перетворювача (накопичення та віддачі енергії дроселем) в залежності від номеру переключення. Дані формули лягли в основу зручних аналітичних виразів, що дозволяють досліджувати процеси у перетворювачі як у перехідних, так і в сталих режимах. Бібл. 4, рис. 1.

**Ключові слова:** напівпровідникові перетворювачі, імпульсні системи, аналіз перехідних та сталих режимів.

## APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS THEORY WITH IMPULSE EXCITATION FOR PROCESSES ANALYSIS AT PULSE VOLTAGE CONVERTERS

N.A.Shydlovskaya, Yu.V.Rudenko,  
Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,

Peremohy pr., 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine. e-mail: [rudenko@ied.org.ua](mailto:rudenko@ied.org.ua)

The possibility of application of differential equations theory with impulse excitation for electric magnetic processes analysis is shown on the example of pulse buck converter. Recurrence formulas constants of integration are obtained, which allow to determine its values for intervals of converter structure permanence (choke's energy storage and return) in dependence on switching number. These formulas lied on a basis of handy analytic expressions which allow to investigate the processes at converter with both transient state and steady state. References 4, figure 1.

**Key words:** semiconductor converters, pulse systems, analysis of transient and steady state regimes.

1. Anashkin O.V., Mitko O.V. Sufficient stability conditions for nonlinear systems with impulse excitation // Dinamicheskie sistemy. – 2011. – Vol. 1(29). – No 1. – Pp. 5–14. (Rus)
2. Zeveke G.V., Ionkin P.A., Netushil A.V., Strakhov S.V. Basis of circuits theory. – Moskva: Energoatomizdat, 1989. – 528 p. (Rus)
3. Samoilenko A.M., Perestiuk N.A. Differential equations with impulse excitation. – Kyiv: Vyshcha shkola, 1987. – 288 p. (Rus)
4. Smirnov V.I. Course of higher mathematics. Vol. II. – Moskva: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1953. – 628 p. (Rus)

Надійшла 20.05.2013

Received 20.05.2013