

УДК 621.3.011

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

Ю.М.Васецкий, докт.техн.наук, Д.И.Власов,
Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина.

На основе сформулированной краевой задачи расчета магнитного поля представлено решение в виде поля исходного контура с током и его зеркального отражения относительно границы раздела сред. Показано, что при корректной постановке задачи, когда исходный контур является замкнутым, выполняется необходимое условие непрерывности поверхностной плотности тока. Библ. 2, рис. 1.

Ключевые слова: контур с током, идеально проводящее тело, магнитное поле, поверхностная плотность тока.

Введение. Электромагнитные системы с массивными электропроводными телами, в которых источником переменного магнитного поля являются токопроводы в общем случае с произвольной пространственной конфигурацией, имеют широкое распространение на практике. К ним относятся, например, электрогидроимпульсные установки, устройства магнитно-импульсной обработки металлов и др. В случае быстропротекающих процессов в электропроводных телах проявляется сильно выраженный поверхностный эффект ($\delta \rightarrow 0$). В расчетах электромагнитного поля процесс можно считать квазистационарным, а материал тел – идеально проводящим. Тогда в линейной постановке для заданного распределения плотности тока источников \mathbf{j} задача расчета поля вне проводящего тела сводится к решению уравнений Максвелла для напряженности магнитного поля \mathbf{H} и условию отсутствия нормальной составляющей поля на поверхности

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – единичная внешняя нормаль к поверхности.

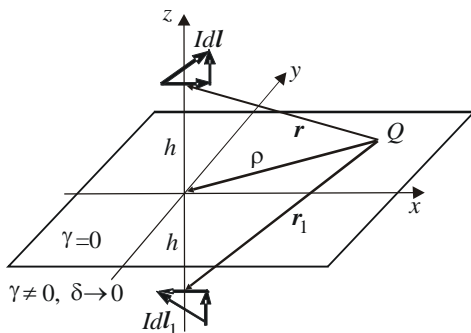
Для расчета электромагнитного поля внутри проводящего тела обычно справедливой является модель проводящего полупространства с плоской границей раздела сред, причем, локальное значение тангенциальной составляющей напряженности поля на границе находится из решения внешней задачи (1). Поверхностная плотность тока \mathbf{j}_s удовлетворяет условию непрерывности и определяется величиной тангенциальной составляющей магнитного поля на границе

$$\text{div}\mathbf{j}_s = 0, \quad \mathbf{j}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (2)$$

Цель работы состоит в том, чтобы на примере тела с плоской границей и источниками исходного поля в виде контура с током показать, что при расчете распределения поля, поверхностной плотности тока, джоулевых тепловыделений и магнитного давления корректное решение получается при учете тока всего замкнутого контура. Так как используется простое аналитическое решение, то оно может служить тестовой задачей при построении более сложных математических моделей.

Решением задачи (1) для плоской границы раздела сред будет магнитное поле над поверхностью, созданное током I исходного контура и зеркально отраженным контуром, направление тока в одном из элементов которого соответствует направлению элемента $I d\mathbf{l}_1$ на рисунке [1,2].

Напряженность поля \mathbf{H} в точке Q на плоской поверхности с учетом направления токов



$$\mathbf{H}(z=0) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}\mathbf{A} = -\frac{I}{4\pi} \int_l \left(\frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl = \frac{I}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \int_l \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{t} \times \mathbf{r})}{r^3} dl, \quad (3)$$

где $\mathbf{r} = \rho + h\mathbf{e}_z$, $\mathbf{r}_1 = \rho - h\mathbf{e}_z$; \mathbf{A} – векторный потенциал ($\text{div}\mathbf{A} = 0$); единичные касательные векторы, выраженные через параллельную и перпендикулярную к поверхности составляющие, есть $\mathbf{t} = t_{\parallel} + t_{\perp}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{t}_1 = t_{\parallel} - t_{\perp}\mathbf{e}_z$.

Из (3) находим поверхностную плотность тока

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{e}_z \times \mathbf{H}(z=0) = \mathbf{e}_z \times \left[-\frac{I}{2\pi} \int_l \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \right] = \frac{2}{\mu_0} \mathbf{e}_z \times \text{rot}\mathbf{A}_0, \quad (4)$$

где \mathbf{A}_0 – векторный потенциал поля исходного тока.

Определим необходимое условие для выполнения не-

прерывности поверхностной плотности тока (2)

$$\text{div}\mathbf{j}_s = -\frac{2}{\mu_0} \mathbf{e}_z \cdot \text{rot}\text{rot}\mathbf{A}_0 = \frac{2}{\mu_0} \mathbf{e}_z \cdot (\Delta\mathbf{A}_0 - \text{grad}\text{div}\mathbf{A}_0). \quad (5)$$

Первое слагаемое в скобках вне токов равно нулю. Равенство нулю второго слагаемого, а вместе с ним и всего выражения (5), будет выполнено, если равно нулю выражение $\operatorname{div} \mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \mathbf{t} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} dl$. Циркуляция гра-

диента функции равна нулю, если контур замкнутый, это и является условием непрерывности плотности поверхностного тока. Отметим, что в квазистационарном приближении контуры с током должны быть замкнутыми, и нарушение этого условия, как видим, приводит к некорректным результатам.

Определение распределения плотности тока для примеров, где часть контура располагается параллельно поверхности раздела сред, а подводные токопроводы перпендикулярны ей, иллюстрирует необходимость учета поля всего контура как с точки зрения непрерывности поверхностной плотности тока, так и его величины.

Вывод. Представленное решение в виде суперпозиции поля исходного контура с током и его зеркального отражения относительно плоской границы раздела сред обладает наглядностью и легко реализуется в виде аналитических выражений или численного вычисления одномерных контурных интегралов.

Рассмотрение незамкнутых исходных контуров с током является некорректным, это приводит к нарушению условия непрерывности поверхностной плотности тока и неверному определению его величины. Как следствие, неверными оказываются и такие характеристики как магнитное давление и поверхностная плотность джоулевых потерь.

1. *Tozoni O.V.* Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.

2. *Vasetskiy Yu.M., Gorodzha L.V., Mazurenko I.L.* Приближённая модель для расчёта переменного магнитного поля произвольного контура с учётом вихревых токов в проводящем полупространстве // *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск "Силова електроніка та енергоефективність"*. – 1999. – Ч.1. – С. 83–99.

УДК 621.3.011

ДО ВИЗНАЧЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА ЗІ СТРУМОМ НАД ПЛОСКОЮ ПОВЕРХНЕЮ ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНОГО ТІЛА

Ю.М. Васецький, докт.техн.наук, **Д.І. Власов**,

Інститут електродинаміки НАН України,

пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна.

На основі сформульованої крайової задачі розрахунок магнітного поля представлено розв'язок у вигляді поля вихідного контуру зі струмом і його дзеркальним відбиттям відносно границі поділу середовищ. Показано, що при коректній постановці задачі, коли вихідний контур є замкнутим, виконується необхідна умова безперервності поверхневої густини струму. Бібл. 2, рис. 1.

Ключові слова: контур зі струмом, ідеально провідне тіло, магнітне поле, поверхнева густина струму.

ON MAGNETIC FIELD DETERMINATION OF THE CURRENT CONTOUR ABOVE FLAT SURFACE OF PERFECT ELECTRICAL CONDUCTIVITY BODY

Yu.M. Vasetskiy, D.I. Vlasov,

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,

Peremogy pr., 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine.

On the basis of the formulated boundary problem of magnetic field calculation the decision in the form of a field of initial current contour and its mirror medium boundary reflection is presented. It is shown, that at correct formulation of the problem when the initial contour is closed, the necessary condition of continuity of surface density current is satisfied. References 2, figures 1.

Key words: current contour, perfect electrical conductivity body, magnetic field, surface density current.

1. *Tozoni O.V.* Second sources method in electrical engineering. – Moskva: Energiia, 1975. – 296 p. (Rus)

2. *Vasetskiy Yu.M., Gorodzha L.V., Mazurenko I.L.* The approximate model for alternating magnetic field calculation of an arbitrary contour taking into account the eddy current in conducting half-space // *Tekhnichna elektrodynamika. Tematychnyi vypusk "Sylova elektronika ta energoefektyvnist"*. – 1999. – Vol. 1. – Pp. 83–99. (Rus)

Надійшла 12.01.2012

Received 12.01.2012