

УДК 621.3.011.74.005

ИССЛЕДОВАНИЕ RLC-ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМЫМ РЕВЕРСИРОВАНИЕМ ИНДУКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

Н.А.Шидловская, член-корреспондент НАН Украины

Інститут електродинаміки НАН України

пр. Победы, 56, Київ-57, 03680, Україна

Проанализированы процессы в RLC-цепи синусоидального напряжения при реверсировании в ней индуктивного элемента при помощи управляемых коммутаторов. Получены рекуррентные соотношения, которые дают возможность находить напряжение на емкости и ток через индуктивность на любом интервале времени, независимо от количества реверсирований до этого при симметричном и несимметричном управлении переключениями. Исследованы основные режимы работы цепи (колебательный, предельный, апериодический). Приведены графики напряжений на емкости и токов через индуктивность для цепей с различной добротностью и соотношениями между длительностями интервалов после четного и нечетного реверсирований. Библ. 4, рис. 5.

Ключевые слова: RLC-цепь, реверсирование, индуктивный элемент.

Одним из возможных способов построения устройств компенсации реактивной мощности является использование переменных электромагнитных или электростатических полей [4].

Эффект генерирования реактивной мощности достигается с помощью принудительного изменения направления тока в индуктивности, которое осуществляется с помощью управляемого коммутатора. При этом циклическое изменение направления тока может происходить несколько раз за период питающего напряжения. Для процесса генерирования реактивной мощности в данных устройствах характерно [4]:

- 1) использование накопителей электромагнитной энергии, в которых протекает переменный ток с частотой, в общем случае, не равной частоте сети;
- 2) частота коммутации вентилей может принимать любые значения как выше, так и ниже частоты сети;
- 3) коммутация тока индуктивности осуществляется в любой момент времени независимо от величины и полярности питающего напряжения.

Основу подобных цепей составляет последовательная RLC-цепь, питаемая от источника синусоидального напряжения, в котором управляемые вентильные преобразователи производят реверсирование индуктивности в определенные моменты времени. Заметим, что при рассмотрении процессов в таких цепях управляемые ключевые элементы будем считать идеальными. Возможны два варианта управления реверсированием индуктивности: симметричное и несимметричное. В случае симметричного управления процессом переключения все интервалы времени Δt между переключениями одинаковы

$$\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots, \quad (1)$$

т.е. если $t_0 = 0$, то

$$t_1 = \Delta t; \quad t_2 = 2\Delta t, \dots \quad t_n = (n+1)\Delta t, \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (2)$$

Заметим, что первое включение цепи будем считать нулевым. При несимметричном управлении интервалы времени после четного и нечетного реверсирований не одинаковы, то есть будут отличаться интервалы при четном и нечетном номере переключения (n). Однако, сумма нечетного Δt_{nq} и четного Δt_q интервалов времени в нашем случае будет равняться интервалу $2\Delta t$.

Случай реверсирования индуктивного и емкостного элементов в подобной цепи при симметричном управлении переключениями рассмотрен в [2], а работа [3] посвящена нахождению рекур-

рентных формул для нахождения напряжения на емкости и тока в индуктивности при любых соотношениях между интервалами времени после четного и нечетного переключений при реверсировании емкостного элемента.

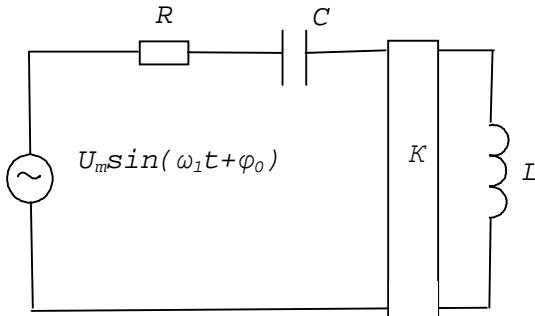


Рис. 1

Уравнение Кирхгофа для цепи (рис. 1) имеет вид

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (3)$$

где R – сопротивление, L – индуктивность, C – емкость, U_m – максимальное значение напряжения, ω_1 – угловая частота, φ_0 – начальная фаза.

Перепишем уравнение (3) относительно заряда q , имея в виду соотношение $i = dq/dt$ и введя обозначения

$$R/L = 2h; \quad 1/LC = k^2, \quad (4)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2h \frac{dq}{dt} + k^2 q = \frac{U_m}{L} \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (5)$$

Неоднородному дифференциальному уравнению (5) соответствует однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0, \quad (6)$$

характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0. \quad (7)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (5) будем искать в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения (6), которое зависит от корней характеристического уравнения (7) и частного решения неоднородного дифференциального уравнения (5) [1], которое будем искать в виде

$$q_{up} = \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta), \quad (8)$$

где α – коэффициент искажения и δ – сдвиг фаз определяются как

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(k^2 - \omega_1^2)^2 + 4h^2 \omega_1^2}}; \quad \delta = -\arctg \frac{2h\omega_1}{k^2 - \omega_1^2}. \quad (9)$$

Рассмотрим характерные режимы работы цепи, сообразно с корнями характеристического уравнения (7).

1. Колебательный режим.

В этом случае решение дифференциального уравнения (5) принимает вид:

$$q = e^{-ht} (C_{1n} \cos pt + C_{2n} \sin pt) + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta), \quad (10)$$

где C_{1n} , C_{2n} – первая и вторая постоянные интегрирования на n -м интервале между переключениями, $p^2 = k^2 - h^2$.

Откуда легко получить выражение для тока:

$$i = \frac{dq}{dt} = e^{-ht} \{-C_{1n}(h \cos pt + p \sin pt) + C_{2n}(p \cos pt - h \sin pt)\} + \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta). \quad (11)$$

При реверсировании индуктивности конфигурация цепи не меняется, поэтому вид дифференциального уравнения, описывающего процессы в цепи и его решение не меняются. Однако начальные условия с учетом законов коммутации будут отличаться от случая, описанного в [3]. Для интервала $[t_1, t_2]$ они примут вид

$$q|_{t=t_{1+}} = q|_{t=t_{1-}} = e^{-h t_1} (C_{10} \cos p t_1 + C_{20} \sin p t_1) + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t_1 + \varphi_0 + \delta),$$

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_{1+}} = -\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_{1-}} = -e^{-h t_1} \{-C_{10}(h \cos p t_1 + p \sin p t_1) + C_{20}(p \cos p t_1 - h \sin p t_1)\} - \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_1 + \varphi_0 + \delta).$$
(12)

Введем обозначения

$$A_1 = C_{10} \cos p t_1 + C_{20} \sin p t_1;$$

$$B_1 = C_{10}(h \cos p t_1 + p \sin p t_1) - C_{20}(p \cos p t_1 - h \sin p t_1) - e^{h t_1} \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_1 + \varphi_0 + \delta).$$
(13)

Тогда для постоянных интегрирования на интервале $\overline{[t_1, t_2]}$ можем записать

$$C_{11} = -\frac{B_1}{p} \sin p t_1 + A_1 \left(\cos p t_1 - \frac{h}{p} \sin p t_1 \right),$$

$$C_{21} = \frac{B_1}{p} \cos p t_1 + A_1 \left(\frac{h}{p} \cos p t_1 + \sin p t_1 \right).$$
(14)

Поскольку на каждом последующем интервале индуктивность реверсируется относительно своего положения на предыдущем интервале, для произвольного интервала между переключениями $\overline{[t_n, t_{n+1}]}$ начальные условия примут вид

$$q|_{t=t_{n+}} = q|_{t=t_{n-}} = e^{-h t_n} (C_{1,n-1} \cos p t_n + C_{2,n-1} \sin p t_n) + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta),$$

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_{n+}} = -\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_{n-}} = -e^{-h t_n} \{-C_{1,n-1}(h \cos p t_n + p \sin p t_n) + C_{2,n-1}(p \cos p t_n - h \sin p t_n)\} -$$

$$-\frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta).$$
(15)

$$A_n = C_{1,n-1} \cos p t_n + C_{2,n-1} \sin p t_n;$$

Обозначим

$$B_n = C_{1,n-1}(h \cos p t_n + p \sin p t_n) - C_{2,n-1}(p \cos p t_n - h \sin p t_n) -$$

$$- e^{h t_n} \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta).$$
(16)

С учетом обозначений (16) постоянные интегрирования на интервале $\overline{[t_n, t_{n+1}]}$ примут вид

$$C_{1n} = -\frac{B_n}{p} \sin p t_n + A_n \left(\cos p t_n - \frac{h}{p} \sin p t_n \right), \quad C_{2n} = \frac{B_n}{p} \cos p t_n + A_n \left(\frac{h}{p} \cos p t_n + \sin p t_n \right).$$
(17)

При симметричном управлении соотношения (16), (17) преобразуются к виду

$$A_n = C_{1,n-1} \cos np \Delta t + C_{2,n-1} \sin np \Delta t;$$

$$B_n = C_{1,n-1}(h \cos np \Delta t + p \sin np \Delta t) - C_{2,n-1}(p \cos np \Delta t - h \sin np \Delta t) -$$

$$- e^{nh \Delta t} \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(n \omega_1 \Delta t + \varphi_0 + \delta),$$
(18)

$$C_{1n} = -\frac{B_n}{p} \sin np \Delta t + A_n \left(\cos np \Delta t - \frac{h}{p} \sin np \Delta t \right), \quad C_{2n} = \frac{B_n}{p} \cos np \Delta t + A_n \left(\frac{h}{p} \cos np \Delta t + \sin np \Delta t \right).$$
(19)

2. Апериодический режим.

При апериодическом режиме решение дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$q = C_{1n} e^{\lambda_1 t} + C_{2n} e^{\lambda_2 t} + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta), \quad (20)$$

где $\lambda_{1,2} = -h \pm jp$ и соответственно

$$\frac{dq}{dt} = \lambda_1 C_{1n} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_{2n} e^{\lambda_2 t} + \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta). \quad (21)$$

Начальные условия при первом включении определяются соотношениями (21). Принимая это во внимание с учетом обозначений

$$A_0 = q_{\text{ нач }} - \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\varphi_0 + \delta), \quad B_0 = i_{\text{ нач }} - \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\varphi_0 + \delta), \quad (22)$$

находим

$$C_{10} = \frac{B_0}{2p} - A_0 \frac{\lambda_2}{2p}, \quad C_{20} = -\frac{B_0}{2p} + A_0 \frac{\lambda_1}{2p}. \quad (23)$$

Согласно законам коммутации запишем выражения, определяющие начальные условия для произвольного интервала между коммутациями $\overline{[t_n, t_{n+1}]}$ в случае реверсирования индуктивности:

$$\begin{aligned} q \Big|_{t=t_{n+}} &= q \Big|_{t=t_{n-}} = C_{1,n-1} e^{\lambda_1 t_n} + C_{2,n-1} e^{\lambda_2 t_n} + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta); \\ \frac{dq}{dt} \Big|_{t=t_{n+}} &= -\frac{dq}{dt} \Big|_{t=t_{n-}} = -\lambda_1 C_{1,n-1} e^{\lambda_1 t_n} - \lambda_2 C_{2,n-1} e^{\lambda_2 t_n} - \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta). \end{aligned} \quad (24)$$

$$A_n = C_{1,n-1} e^{\lambda_1 t_n} + C_{2,n-1} e^{\lambda_2 t_n};$$

Обозначив $B_n = -\lambda_1 C_{1,n-1} e^{\lambda_1 t_n} - \lambda_2 C_{2,n-1} e^{\lambda_2 t_n} - \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta)$, (25)

получим соотношения для постоянных интегрирования

$$C_{1n} = e^{-\lambda_1 t_n} \left\{ \frac{B_n}{2p} - A_n \frac{\lambda_2}{2p} \right\}, \quad C_{2n} = e^{-\lambda_2 t_n} \left\{ -\frac{B_n}{2p} + A_n \frac{\lambda_1}{2p} \right\}. \quad (26)$$

В случае симметричного управления переключениями выражения (25) примут вид

$$\begin{aligned} A_n &= C_{1,n-1} e^{n\lambda_1 \Delta t} + C_{2,n-1} e^{n\lambda_2 \Delta t}, \\ B_n &= -\lambda_1 C_{1,n-1} e^{n\lambda_1 \Delta t} - \lambda_2 C_{2,n-1} e^{n\lambda_2 \Delta t} - \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(n\omega_1 \Delta t + \varphi_0 + \delta), \end{aligned} \quad (27)$$

а формулы для постоянных интегрирования (27) преобразуются следующим образом:

$$C_{1n} = e^{-n\lambda_1 \Delta t} \left\{ \frac{B_n}{2p} - A_n \frac{\lambda_2}{2p} \right\}, \quad C_{2n} = e^{-n\lambda_2 \Delta t} \left\{ -\frac{B_n}{2p} + A_n \frac{\lambda_1}{2p} \right\}. \quad (28)$$

3. Предельный случай.

Этот случай имеет место при равенстве корней характеристического уравнения. Решение дифференциального уравнения (5) в этом случае записывается следующим образом

$$q = e^{-h t} (C_{1n} + C_{2n} t) + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta). \quad (29)$$

Продифференцировав (29), имеем

$$\frac{dq}{dt} = -e^{-ht} (C_{1n}h + C_{2n}(ht - 1)) + \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0 + \delta). \quad (30)$$

С учетом начальных условий (12) находим постоянные интегрирования для первоначального включения

$$C_{10} = q_{\text{нач}} - \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\varphi_0 + \delta); \quad C_{20} = q_{\text{нач}} h + i_{\text{нач}} - \frac{U_m}{L} \alpha \{ h \sin(\varphi_0 + \delta) + \omega_1 \cos(\varphi_0 + \delta) \}. \quad (31)$$

При реверсировании индуктивности начальные условия для произвольного интервала между коммутациями $\overline{[t_n, t_{n+1}]}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} q|_{t=t_{n+}} &= q|_{t=t_{n-}} = e^{-ht_n} (C_{1,n-1} + C_{2,n-1}t_n) + \frac{U_m}{L} \alpha \sin(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta); \\ \frac{dq}{dt}|_{t=t_{n+}} &= -\frac{dq}{dt}|_{t=t_{n-}} = e^{-ht_n} (C_{1,n-1}h + C_{2,n-1}(ht_n - 1)) - \frac{U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta). \end{aligned} \quad (32)$$

$$A_n = C_{1,n-1} + C_{2,n-1}t_n;$$

Введем обозначения

$$B_n = -(C_{1,n-1}h + C_{2,n-1}(ht_n - 1)) + e^{ht_n} \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(\omega_1 t_n + \varphi_0 + \delta), \quad (33)$$

с помощью которых запишем выражения для постоянных интегрирования

$$C_{1n} = B_n t_n - A_n (ht_n - 1), \quad C_{2n} = -B_n + A_n h. \quad (34)$$

Для симметричного управления переключения находим

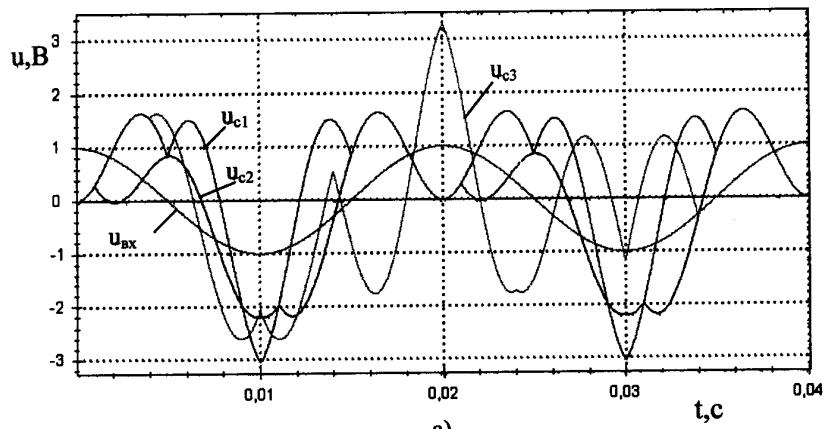
$$\begin{aligned} A_n &= C_{1,n-1} + C_{2,n-1}n\Delta t; \\ B_n &= -(C_{1,n-1}h + C_{2,n-1}(nh\Delta t - 1)) + e^{nh\Delta t} \frac{2U_m}{L} \alpha \omega_1 \cos(n\omega_1 \Delta t + \varphi_0 + \delta), \end{aligned} \quad (35)$$

и

$$C_{1n} = B_n n\Delta t - A_n (nh\Delta t - 1), \quad C_{2n} = -B_n + A_n h. \quad (36)$$

На рис. 2–5 показаны кривые для напряжения на емкости и тока через индуктивность для характерных режимов работы цепи. Добротность цепи $Q=\infty$ (рис. 2) соответствует колебательному, $Q=0,5$ (рис. 3) – предельному, а $Q=0,25$ (рис. 4, 5) – апериодическому режимам. При этом апериодический режим рассмотрен как при нулевых (рис. 4), так и при ненулевых (рис. 5) начальных условиях. Для наглядности на графиках отображена кривая питающего напряжения $u_{\text{пит}}$. Были проанализированы различные варианты управления процессом реверсирования индуктивного элемента. Так, кривые u_{C1}, i_{L1} соответствуют симметричному управлению переключениями, когда $\Delta t_{Hq} = t_q = \frac{T}{4} = 0,005$ с. Кривые u_{C2}, i_{L2} построены для случая $\Delta t_{Hq} = 0,001$ с, $\Delta t_q = 0,009$ с, а кривые u_{C3}, i_{L3} – для случая $\Delta t_{Hq} = 0,004$ с, $\Delta t_q = 0,006$ с. Заметим, что для всех случаев $2(\Delta t_{Hq} + \Delta t_q) = T$. Значения тока в индуктивности находились с учетом того, что индуктивный элемент находится после коммутатора, т.е. соответствующие соотношения для тока домножались на $(-1)^n$.

Анализ графических зависимостей рис. 2–5 показал, что, как и в случаях, рассмотренных в работе [3], при симметричном управлении переключениями процессы на первом и последующих периодах входного сигнала полностью совпадают. При несимметричном управлении переключениями процессы на первом периоде входного сигнала несколько отличаются от процессов на втором и последующих периодах. В зависимости от соотношения между Δt_{Hq} и Δt_q отличаются максимальные и минимальные за период значения тока и напряжения, различны также количества локальных экстремумов. Таким образом, можно сделать вывод о том, что соотношения между Δt_{Hq} и Δt_q при управлении реверсированием реактивного элемента в RLC-цепи синусоидального напряжения оказывают существенное влияние на процессы в ней.



$R=0 \text{ Ом}$
 $L=0,03242 \text{ Гн}$
 $C=5*10^{-5} \Phi$
 $U_m=1 \text{ В}$
 $\omega_1=100\pi$
 $\varphi_0=\pi/2$
 $i_{\text{нач}}=0 \text{ А}$
 $q_{\text{нач}}=0 \text{ Кл}$
 $Q=\infty$

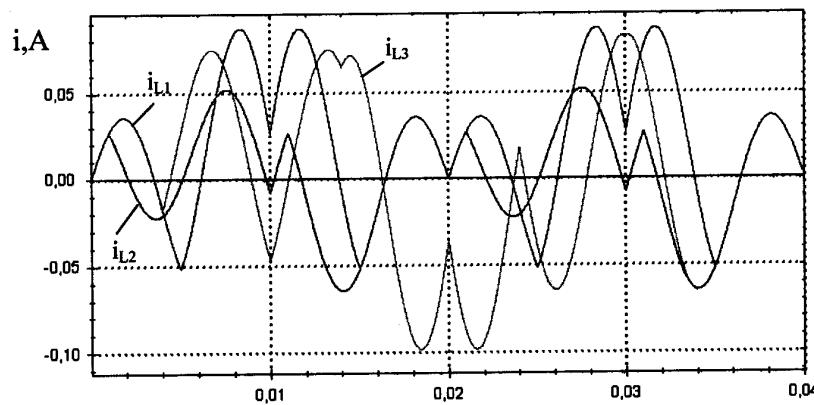
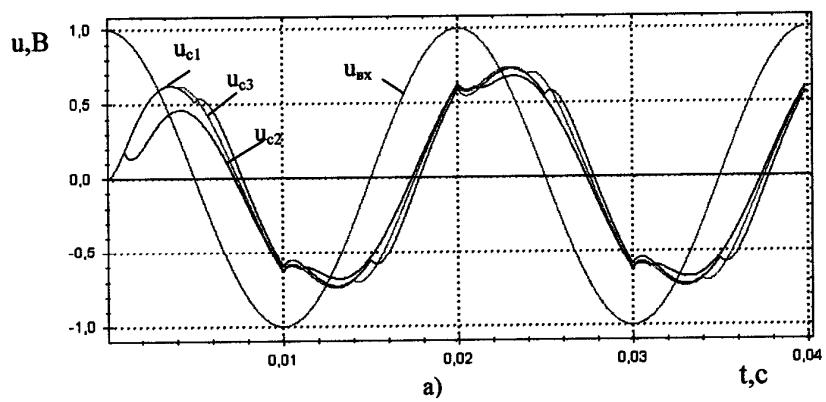


Рис.2



$R=50,9296 \text{ Ом}$
 $L=0,03242 \text{ Гн}$
 $C=5*10^{-5} \Phi$
 $U_m=1 \text{ В}$
 $\omega_1=100\pi$
 $\varphi_0=\pi/2$
 $i_{\text{нач}}=0 \text{ А}$
 $q_{\text{нач}}=0 \text{ Кл}$
 $Q=0,5$

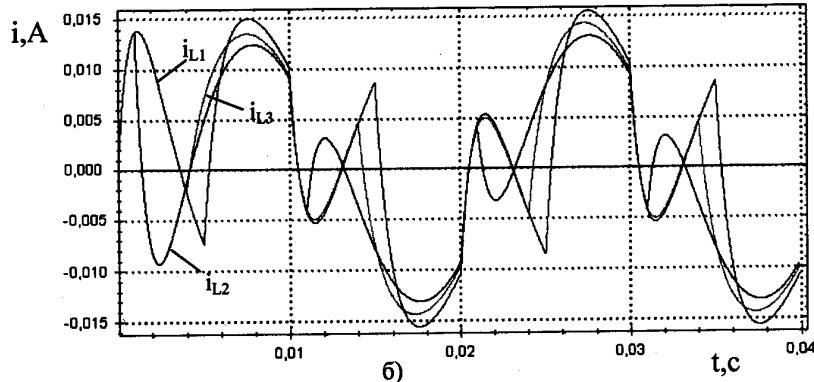


Рис.3

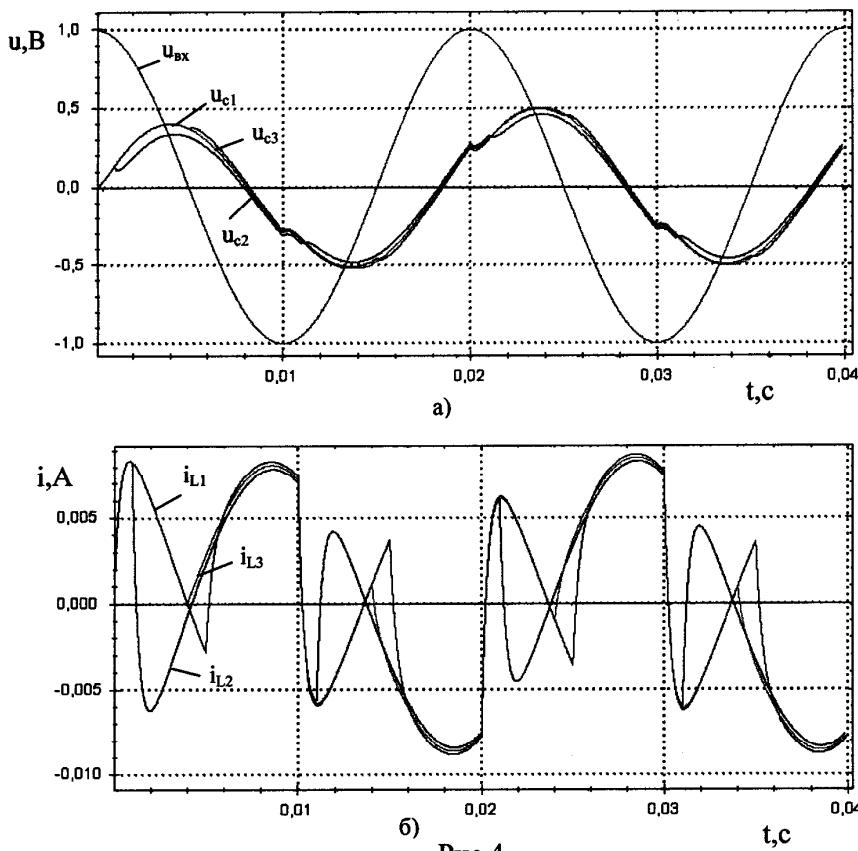


Рис.4

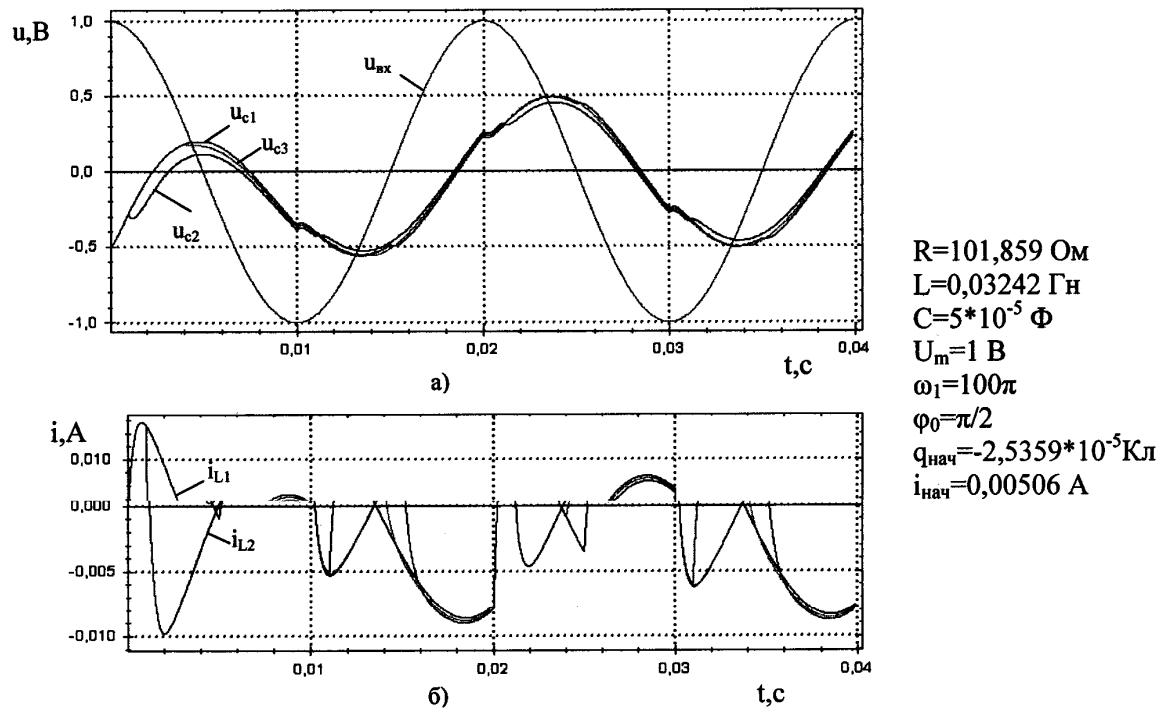


Рис.5

1. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.:– Высшая школа, 1989. – 383 с.

Samoilenko A.M., Krivosheia S.A., Perestiu N.A. Differential equations: examples and tasks. – Moskva: Vysshaia shkola, 1989. – 383 p. (Rus.)

2. Федий В.С., Соболев В.Н. Электромагнитные процессы в последовательном RLC-контуре с коммутатором в цепи емкости (индуктивности) // Электричество. – 1996. – №9. – С. 67–71.

Fedii V.S., Sobolev V.N. Electromagnetic processes in successive RLC-circuit with the capacity circuit commutator // Elektrichestvo. – 1996. – №9. – P. 67–71. (Rus.)

3. Шидловская Н.А. Процессы в RLC-цепях синусоидального напряжения с управляемым реверсированием емкости // Техн. электродинамика. – 2011. – №1. – С. 3–6.

Shidlovskaya N.A. Processes in sin voltage RLC-circuit with the controlled reversing of capacity // Tekhnichna elektrodynamika. – 2011. – №1. – P. 3–6. (Rus.)

4. Шидловский А.К., Федий В.С. Частотно-регулируемые источники реактивной мощности. – Киев: Наукова думка, 1980. – 304 с.

Shidlovskii A.K., Fedii V.S. Frequency regulating reactive power sources. – Kyiv: Naukova dumka. – 1980. – 304 p. (Rus.)

Н.А.Шидловська, чл.-кор. НАН України
Інститут електродинаміки НАН України
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна

Дослідження RLC-кола синусоїдної напруги з керованим реверсуванням індуктивного елемента
Проаналізовано процеси в RLC-колі синусоїдної напруги при реверсуванні у ній індуктивного елемента за допомогою керованих комутаторів. Одержано рекурентні спiввiдношення, що дають можливiсть знаходити напругу на ємностi i струм через iндуктивнiсть на будь-яку промiжку часу, незалежно вiд кiлькостi реверсувань до цього при симетричному та несиметричному керуваннi перемиканнями. Дослiджено основнi режими роботи кола (колоvalильний, граничний, аперiодичний). Представлено графики напруг на ємностi та струмiв через iндуктивнiсть для кiл з рiзною добrotнiстю i спiввiдношеннями мiж триvalistю iнтервалiв пiслi парного та непарного реверсувань. Бiбл. 4, рис. 5.

Ключовi слова: RLC-коло, реверсування, iндуктивний елемент.

N.A.Shydlovska,
Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine
Peremogy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine

Research of RLC-chain of sinusoidal voltage with controlled inductive element reversing

Upon reversing of inductive element the sin-voltage RLC-circuit processes due to controlled commutator were analyzed. Obtained recurrent formulae enable to determine the capacity voltage and the inductive current at any temporal intervals irrespective of numbers of reversals had been using the before in symmetric and asymmetric or reversing controls. Basic operating mode of RLC-circuit (oscillatory, limit, aperiodic) are researched. For circuits with different Q-factor and relations of interval sizes after even and odd reversing the capacity voltage and inductive current plots are shown. References 4, figures 5.

Key words: RLC-circuit, reversing, inductive element

Надiйшла 30.07.2010
Received 30.07.2010