

ЗАДАЧА ПРИВЕДЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ РЕШЕТКОЙ ПЕРИОДОВ

С.Т.Толмачев¹, докт.техн.наук, Д.Л.Юхимович²
^{1,2} – Криворожский технический университет,
 ул. XXII партсъезда, 11, г. Кривой Рог,
 50027, Днепропетровская обл., Украина

На основе метода мультиполей для произвольных двоякопериодических решеток получены явные формулы для тензора приведенной проницаемости двоякопериодической системы полых круговых цилиндров с произвольными магнитными проницаемостями областей. Библ. 13, рис. 3.

Ключевые слова: метод мультиполей, двоякопериодические системы, магнитная проницаемость.

Постановка задачи. Регулярные гетерогенные структуры (ГС) встречаются во многих практических приложениях (полиградиентные сепараторы, задачи обтекания решеток, тепловые дискретно-периодические задачи, волокнистые структуры и композиционные материалы, полупроводники и др.). Поэтому исследование локальных и приведенных (эффективных) характеристик ГС постоянно привлекало внимание многочисленных исследователей [3–13]. Большинство исследований по данной проблеме посвящено ГС с канонической формой включений при их относительно малой концентрации. В достаточно общей постановке без ограничений на геометрические параметры ГС линейная задача рассмотрена в статье [4], а её обобщение на случай включений с нелинейными анизотропными свойствами – в последующих работах [6,7]. Статьи [4,7,8] характеризуются достаточно высокой степенью обобщения, однако они ориентированы на численные методы решения.

Классическая статья Дж.Релея [13] послужила толчком для большого количества публикаций, посвященных аналитическому исследованию локальных [5,8–10] и приведенных [8–10,12,13] характеристик регулярных ГС со сплошными круговыми цилиндрами. При этом исследования ограничены двумя типами решеток – простой орторомбической и моноклинной, для которых особенности симметрии позволяют «априори» указать направление главных осей анизотропии приведенной среды.

Обобщение метода мультиполей Релея на случай произвольной решетки с полыми круговыми цилиндрами впервые дано в статье авторов [11].

Целью данной статьи является исследование не изученных в настоящее время вопросов определения приведенных анизотропных свойств ГС, образованной регулярной системой полых круговых цилиндров с произвольной двоякопериодической решеткой периодов.

Основные расчетные соотношения. Рассмотрим произвольную периодическую решетку, в узлах которой расположены центры цилиндров с внутренними и внешними радиусами a и b соответственно (рис. 1). Магнитные проницаемости сред обозначим через μ_1 , μ_2 и μ_3 , основные периоды параллелограмма Ω – через ω_1 и ω_2 , при этом выберем их так, чтобы выполнялось условие: $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\text{Im}\tau > 0$. Для произвольного периода будем использовать выражение $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Введем комплексные потенциалы для областей F_1 , F_2 и F_3

$$W_1 = \sum_k C_k z^k, \quad z \in F_1, \quad (1)$$

$$W_2 = \sum_k (A_k z^k + B_k z^{-k}), \quad z \in F_2, \quad (2)$$

$$W_3 = \sum_k (D_k z^k + E_k z^{-k}), \quad z \in F_3, \quad (3)$$

где $k=1, 3, 5, \dots$, а $z=x+jy=re^{j\varphi}$ – комплексная переменная. Заметим, что потенциалы (1) – (3) не являются двоякопериодическими функциями и справедливы только в окрестности центрального цилиндра.

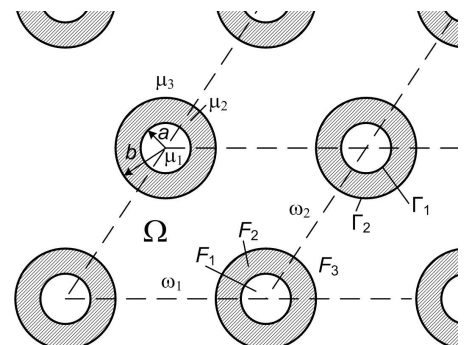


Рис. 1

На границе Γ двух областей с индексами i и e выполняются стандартные граничные условия

$$B_{ni}=B_{ne}, \quad H_{\tau i}=H_{\tau e}, \quad (4)$$

которые можно представить одним выражением [5]

$$(\mu_i + \mu_e)(H_{ni} + jH_{\tau i}) + (\mu_i - \mu_e)(H_{ni} - jH_{\tau i}) = 2\mu_e(H_{ne} + jH_{\tau e}) \quad (5)$$

или в эквивалентной форме с учетом соотношения $(H_n + jH_\tau) = j\bar{z}'H$

$$(\mu_i + \mu_e)H_i(\xi) - (\mu_i - \mu_e)\bar{H}_i(\xi)z'(\xi)^2 = 2\mu_e H_e(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \quad (6)$$

На границах Γ_1 и Γ_2 окружностей радиусов a и b $\xi_a = ae^{j\varphi}$, $\xi_b = be^{j\varphi}$, $z'(\xi)^2 = -e^{j2\varphi}$, поэтому, принимая во внимание, что $\bar{H} = -W'$, используя выражения для потенциалов (1) – (3) и учитывая граничное условие (6), получим связь между коэффициентами [11]

$$C_k = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} A_k; \quad B_k = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} a^{2k} \bar{C}_k = -\lambda_1 a^{2k} \bar{A}_k, \quad (7,8)$$

$$D_k = \frac{(\mu_2 + \mu_3)[1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}]}{2\mu_3} A_k = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)[1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}]}{4\mu_2 \mu_3} C_k, \quad (9)$$

$$E_k = -\frac{(\mu_2 + \mu_3)(\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k})}{2\mu_3} \bar{A}_k = \frac{\lambda_1^{-1} a^{-2k} (\mu_2 + \mu_3)(\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k})}{2\mu_3} B_k, \quad (10)$$

$$D_k = -\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}}{\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k}} \bar{E}_k = \beta_k \bar{E}_k. \quad (11)$$

Здесь $\lambda_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, $\lambda_2 = \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + \mu_3}$, $\beta_k = -\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}}{\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k}}$.

Пусть $z \in F_3$. Результирующее поле образовано внешними источниками напряженностью H_0 и созданными ими мультиполями, расположенными в центрах всех цилиндров. Принимая во внимание, что в формуле (3) слагаемое $\sum E_k z^k$ представляет собой потенциал всех мультиполей основного цилиндра, запишем очевидное выражение

$$\sum_k D_k z^k = -\bar{H}_0 z + \sum_{m, n} \sum_k E_k (z - \omega)^{-k}, \quad (12)$$

("'" при суммировании означает исключение центрального цилиндра: $m^2 + n^2 \neq 0$), которое приводит к эквивалентной системе уравнений

$$(-1)^k (\delta_{1k} \bar{H}_0 + k! D_k) = \sum_p E_p \frac{(k+p-1)!}{(p-1)!} \sum_{k+p} \quad (13)$$

или, учитывая выражение (11),

$$(-1)^k (\delta_{1k} \bar{H}_0 + k! \beta_k \bar{E}_k) = \sum_p E_p \frac{(k+p-1)!}{(p-1)!} \sum_{k+p}. \quad (14)$$

Комплексные ряды \sum_{2l} в дальнейшем целесообразно использовать в виде

$$\sum_{2l} = \omega_1^{-2l} \sum' (m+n\tau)^{-2l} = \omega_1^{-2l} S_{2l}(\tau), \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

где $S_{2l}(\tau)$ – ряды Эйзенштейна, которые широко применяются в теории эллиптических функций. Для рядов S_{2l} удобно использовать быстро сходящиеся ряды ($a = e^{j\pi\tau}$) [1]

$$S_2' = (4\pi)^2 \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka^{2k}}{1-a^{2k}} \right), \quad S_4 = \left(\frac{4\pi}{15} \right)^2 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 a^{2k}}{1-a^{2k}} \right), \quad S_6 = \frac{16\pi^6}{35} \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5 a^{2k}}{1-a^{2k}} \right). \quad (16)$$

Ряды S_{2l} более высокого порядка можно находить из рекуррентного соотношения [1, 2]:

$$S_8 = \frac{3}{7} S_4^2, \quad S_{10} = \frac{5}{11} S_4 S_6, \quad S_{12} = \frac{1}{143} (18 S_4^3 + 25 S_6^2), \quad S_{14} = \frac{30}{143} S_4^2 S_6, \dots$$

Таким образом, для решения системы уравнений (14) достаточно предварительно вычислить для заданного параметра τ числовые ряды $S_2(\tau)$, $S_4(\tau)$ и $S_6(\tau)$. Важно отметить, что при $l \geq 2$ ряды

S_{2l} сходятся абсолютно [1,2]. Ряд S_2 , как нетрудно видеть, связан с комплексным потенциалом двоякопериодической системы диполей и его значение зависит от порядка суммирования. Именно с этой особенностью ряда S_2 связаны анизотропные свойства приведенной среды. Фактически это означает, что коэффициенты в (1)–(3) в общем случае зависят от направления поля H_0 . Этот принципиальный вопрос требует более детального рассмотрения.

Применяя в (15) суммирование по Эйзенштейну [2], запишем

$$\Sigma_2' = \sum_m \sum_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^{m=M} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} \right), \quad \Sigma_2'' = \sum_n \sum_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^{m=M} \right). \quad (17)$$

Эти выражения можно переписать в виде

$$\Sigma_2' = \omega_1^{-2} \sum_{2e} (m+n/\tau)^{-2} = \omega_1^{-2} S_2'(\tau), \quad \Sigma_2'' = \omega_2^{-2} \sum_{2e} (n+m/\tau)^{-2} = \omega_2^{-2} S_2''(\tau). \quad (18)$$

Их следует понимать так: сначала суммирование ведется по ω_1 , а затем по ω_2 и наоборот. В [5] показана связь рядов Σ_2' и Σ_2'' с используемыми в теории эллиптических функций константами η_1 и η_2 , а именно $\Sigma_2' = \eta_1 / \omega_1$, $\Sigma_2'' = \eta_2 / \omega_2$. Используя соотношение Лежандра $\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2\pi j$ [1], легко получить

$$\Sigma_2' - \Sigma_2'' = 2\pi j / \omega_1 \omega_2, \quad \tau S_2' - \tau^{-1} S_2'' = 2\pi j. \quad (19)$$

В общем случае ряды S_{2l} комплексные, однако, для простой орторомбической W_1 ($\omega_1=a$, $\omega_2=jb$, $\tau=jb/a$) и моноклинной W ($\omega_1=a$, $\omega_2=a/2+jb$, $\tau=1/2+jb/a$) решеток все ряды S_{2l} вещественны. Важными частными случаями решеток W_1 и W_2 являются квадратная ($\tau=j$) и гексагональная ($\tau=e^{j\pi/3}$). Легко показать, что только для квадратной и гексагональной решеток $S_2' = S_2''$. В первом случае $S_2' = \pi$, $\tau=j$, поэтому $S_2'' = \pi$. Во втором случае $S_2' = 2\pi/3$, $\tau=e^{j\pi/3}$, поэтому $S_2'' = \tau^2 S_2' - 2\pi j \tau = 2\pi/\sqrt{3} e^{j\frac{2\pi}{3}} - 2\pi e^{j\frac{5\pi}{6}} = 2\pi/\sqrt{3}$. Именно по этой причине рассматриваемые ГС изотропны относительно приведенных свойств.

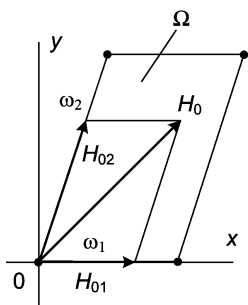


Рис. 2

В общем случае внешнее поле необходимо разложить на составляющие по направлениям основных периодов ω_1 и ω_2 ($H_0=H_{01}+H_{02}$ – (рис. 2)) и применить принцип наложения. При этом в основном уравнении (14) для поля H_{01} следует использовать ряд Σ_2' , а для поля H_{02} – ряд Σ_2'' . Ряды Σ_{2l}' при $l>2$ инвариантны относительно периодов.

Расчет дипольного момента основного цилиндра. Рассмотрим вначале случай $\mu_3=1$. Приведенные свойства ГС определяются намагниченностью J всех цилиндров под воздействием внешнего поля H_0 . Дипольный момент \wp основного параллелограмма периодов площадью $F_\Omega = \omega_1 \text{Im} \omega_2$

$$\wp = \int_F J(\xi) d\tau_\xi = \int_{F_1} J(\xi) d\tau_\xi + \int_{F_2} J(\xi) d\tau_\xi = \wp_x + j\wp_y.$$

При $\mu = \text{const}$ он с помощью формулы Грина выражается через поверхностные источники [5]

$$\wp = \int_F J(\xi) d\tau_\xi = -\frac{1}{2j} \int_\Gamma \xi J(\xi) d\bar{\xi} = -\frac{1}{2j} \int_{\Gamma_1} \xi J(\xi) d\bar{\xi} - \frac{1}{2j} \int_{\Gamma_2} \xi J(\xi) d\bar{\xi}. \quad (20)$$

Поскольку $H = -\bar{W}'$, а $\xi d\bar{\xi} = -ja^2 d\varphi$ и $-jb^2 d\varphi$ соответственно на границах Γ_1 и Γ_2 , выражение (20) принимает вид

$$\wp = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [J_1(\xi_a) - J_2(\xi_a)] d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} J_2(\xi_b) d\varphi = -\frac{1}{2} \sum_k \int_0^{2\pi} \{ (\mu_1 - 1) \bar{C}_k a^{k+1} e^{-j\varphi(k-1)} + (\mu_2 - 1) \times \\ \times [\bar{A}_k (a^{k+1} - b^{k+1}) e^{-j\varphi(k-1)} - \bar{B}_k (a^{-k+1} - b^{k+1}) e^{j\varphi(k+1)}] \} d\varphi = -\pi(\mu_1 - 1) \bar{C}_1 a^2 - \pi(\mu_2 - 1) \bar{A}_1 (a^2 - b^2). \quad (21)$$

Учитывая связь между коэффициентами (7), (8) и (10), последнее соотношение можно выразить через моменты диполей B_1 или E_1 :

$$\wp = \pi B_1 \left[\frac{2\mu_2(\mu_1 - 1)}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - 1)}{\mu_1 - \mu_2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right] = 2\pi E_1. \quad (22)$$

Заметим, что в частном случае $b=a$ и $\mu_2=1$ (сплошные цилиндры радиуса a) $B_1=E_1$ и $\varphi=2\pi B_1=2\pi E_1$, т.е. как и в частном случае сплошных цилиндров в прямоугольной матрице [13], эффективная проницаемость зависит только от моментов диполей.

Для решеток W_1 и W_2 главные оси анизотропии совпадают с координатными осями x и y , поэтому

$$\mu_{xx}=1+\frac{2\pi E_{1x}}{\omega_1 \text{Im}\omega_2 H_{0x}}=1+\frac{2\pi E_{1x}}{F_\Omega H_{0x}}, \quad \mu_{yy}=1+\frac{2\pi E_{1y}}{\omega_1 \text{Im}\omega_2 H_{0y}}=1+\frac{2\pi E_{1y}}{F_\Omega H_{0y}}, \quad H_0=H_{0x}+jH_{0y}. \quad (23)$$

Коэффициенты E_{1x} и E_{1y} можно получить из решения системы уравнений (14), причем с учетом симметрии в данном случае для определения моментов диполей E_{1y} удобно перейти к эквивалентным периодам ω'_1 и ω'_2 . Эквивалентные периоды связаны матричным соотношением

$$(\omega'_1 \omega'_2) = (\omega_1 \omega_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma, \delta - \text{целые числа, причем } \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \text{ [1].}$$

Примем для решетки W_1 $\omega_1=c$, $\omega_2=jd$, $\omega'_1=\omega_2=jd$, $\omega'_2=-\omega_1=-c$, а для решетки W_2 $\omega_1=c$, $\omega_2=c/2+jd$, $\omega'_1=2jd$, $\omega'_2=-c/2+jd$.

При переходе к эквивалентной паре периодов $\sum'_{2\alpha} = (\omega'_1)^{-2} \sum'_{m,n} (m + n\tau')^{-2} = (\omega'_1)^{-2} S'_{2\alpha}(\tau')$, $\tau' = \omega'_2 / \omega'_1$.

При этом справедливо соотношение [2]

$$\sum'_2 - \sum'_{2\alpha} = \frac{2\pi j \gamma}{\omega_1 \omega'_1}. \quad (24)$$

Нетрудно установить, что для решетки W_1 $\gamma=1$, а для решетки W_2 $\gamma=2$. В дальнейшем для наглядности условимся обозначать $\sum'_2 = \sum'_{2x}$, а $\sum'_{2\alpha} = \sum'_{2y}$. В общем случае ряды S_{2l} комплексные, однако для рассматриваемых решеток W_1 и W_2 они вещественны. Легко показать, что только для квадратной и гексагональной решеток $S_{2x} = S_{2y}$. В первом случае $S_{2x} = \pi$, поэтому на основании соотношения (24) $\sum'_{2x} = -\sum'_{2y} = \pi \omega_1^{-2}$. Во втором случае $S_{2x} = 2\pi / \sqrt{3}$, поэтому $\sum'_{2x} = -\sum'_{2y} = 2\pi \omega_1^{-2} / \sqrt{3}$.

Точность решения задачи приведения зависит от глубины учета мультипольного влияния, т.е. от порядка системы уравнений (14). Если ограничиться учетом мультиполей только до октупольного приближения (т.е. \sum_2, \sum_4, \sum_6), то система уравнений (14) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} -\bar{H}_0 - \beta_1 \bar{E}_1 &= E_1 \sum_2 + 3E_3 \sum_4 + E_5 \sum_6 \\ -\beta_3 \bar{E}_3 &= E_1 \sum_4 + 10E_3 \sum_6 \\ -\beta_5 \bar{E}_5 &= E_1 \sum_6 \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Решая эту систему относительно E_{1x} ($\sum'_2 = \sum'_{2x}$, $H_0 = H_{0x}$) и E_{1y} ($\sum'_2 = \sum'_{2y}$, $H_0 = jH_{0y}$) и подставляя решения в (23), получим

$$\mu_{xx} = 1 - 2\pi F_\Omega \left[\sum'_{2x} - \frac{\pi(\lambda_1 \lambda_2 d^2 + 1)}{p F_\Omega (\lambda_1 d^2 + \lambda_2)} + \frac{5p^5 F_\Omega^5 \sum_6^2 (\lambda_1 d^{10} + \lambda_2)}{\pi^5 (\lambda_1 \lambda_2 d^{10} + 1)} - \frac{3\sum_4^2}{10\sum_6 - \frac{\pi^3 (\lambda_1 \lambda_2 d^6 + 1)}{p^3 F_\Omega^3 (\lambda_1 d^6 + \lambda_2)}} \right]^{-1}, \quad (26)$$

$$\mu_{yy} = 1 - 2\pi F_\Omega \left[\sum'_{2y} - \frac{\pi(\lambda_1 \lambda_2 d^2 + 1)}{p F_\Omega (\lambda_1 d^2 + \lambda_2)} + \frac{5p^5 F_\Omega^5 \sum_6^2 (\lambda_1 d^{10} + \lambda_2)}{\pi^5 (\lambda_1 \lambda_2 d^{10} + 1)} - \frac{3\sum_4^2}{10\sum_6 - \frac{\pi^3 (\lambda_1 \lambda_2 d^6 + 1)}{p^3 F_\Omega^3 (\lambda_1 d^6 + \lambda_2)}} \right]^{-1}, \quad (27)$$

где $d=a/b$, $p=\pi(b^2-a^2)/F_\Omega$. В частности, для квадратной решетки ($\sum'_{2x} = \omega_1^{-2}\pi$, $\sum_4 = 3.1512\omega_1^{-4}$, $\sum_6 = 0$)

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - 2p \left(p - \frac{\lambda_1 \lambda_2 d^2 + 1}{\lambda_1 d^2 + \lambda_2} + \frac{0.30583 p^4 (\lambda_1 d^6 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 d^6 + 1} \right)^{-1}, \quad (28)$$

а для идеально проводящих полых цилиндров ($\mu_1 = \mu_3 = 1$, $\mu_2 = \infty$, т.е. $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$)

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - 2p \left(p - 1 + 0.013362 p^8 - \frac{0.30583 p^4}{1.40296 p^8 - 1} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Для сплошных цилиндров ($a=0$) получаем формулу Релея [13]

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - 2p \left(p - \lambda_2^{-1} + 0.305828 p^4 \lambda_2 \right)^{-1}. \quad (30)$$

Аналогично для гексагональной решетки ($\Sigma_{2x} = \omega_1^{-2} 2\pi/\sqrt{3}$, $\Sigma_4 = 0$, $\Sigma_6 = 5.863\omega_1^{-6}$)

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - 2p \left(p - \frac{\lambda_1 \lambda_2 d^2 + 1}{\lambda_1 d^2 + \lambda_2} + \frac{0.0754222 p^6 (\lambda_1 d^{10} + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 d^{10} + 1} \right)^{-1}, \quad (31)$$

а для идеально проводящих полых и сплошных цилиндров соответственно

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - 2p \left(p - 1 + 0.0754222 p^6 \right)^{-1}, \quad (32)$$

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - 2p \left(p - \lambda_2^{-1} + 0.0754222 p^6 \lambda_2 \right)^{-1}. \quad (33)$$

Для произвольной решетки периодов W указать «априори» направления главных осей анизотропии невозможно, поскольку при разложении внешнего поля H_0 по направлениям основных периодов (см. рис. 2) значения составляющих дипольного момента оказываются комплексными. Остановимся на этом подробнее.

Пусть вначале $H_0 = H_{0x} = 1$ (рис. 2). Определив из системы уравнений (14) момент диполей E_{1x} и дипольный момент основного параллелограмма Ω $\varphi_x = \varphi_{xx} + j\varphi_{yx}$, легко определить компоненты κ_{xx} и κ_{yx} тензора магнитной восприимчивости \mathbf{k} , поскольку приведенная намагниченность среды (в векторных обозначениях) $\mathbf{J} = \varphi / F_\Omega = \mathbf{k} \mathbf{H}_0$. Очевидно, $\kappa_{xx} = \varphi_{xx} / F_\Omega$, $\kappa_{yx} = \varphi_{yx} / F_\Omega$. Аналогично, принимая $H_0 = jH_{0y} = j$, рассчитывая E_{1y} и $\varphi_y = \varphi_{xy} + j\varphi_{yy}$ ($\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$), определим недостающие компоненты тензора \mathbf{k} : $\kappa_{xy} = \varphi_{xy} / F_\Omega$, $\kappa_{yy} = \varphi_{yy} / F_\Omega$. Отметим, что поскольку направление периода ω_2 в общем случае не совпадает с осью y , поле $H_0 = jH_{0y}$ следует в соответствии с рис. 2 разложить на две составляющие – $H_0' + H_0'' = j$, причем $H_0' = -s$, $H_0'' = s + j$, где $s = \text{tg}(\text{Re}\omega_2 / \text{Im}\omega_2)$. В соответствии с выражением (19) для поля H_0' в системе уравнений (14) следует принимать Σ_2' , а для поля H_0'' – Σ_2'' .

Таким образом, для определения тензора \mathbf{k} в исходной системе координат x, y достаточно рассчитать компоненты средних по основному параллелограмму периодов векторов намагниченности для двух взаимно перпендикулярных полей H_0 .

Приведем тензор \mathbf{k} к диагональному виду $\hat{\mathbf{K}}$ с главными значениями $\hat{\kappa}_{xx}$, $\hat{\kappa}_{yy}$ ($\hat{\kappa}_{xy} = \hat{\kappa}_{yx} = 0$) введением новой системы координат x', y' , полученной поворотом старой на угол α (рис. 3). Введем тензоры поворота

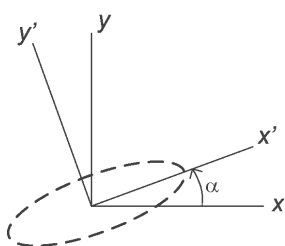


Рис. 3

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \theta_c = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Очевидно, в новой системе координат

$$\mathbf{J}' = \theta \mathbf{J} = \theta \mathbf{k} \mathbf{H}_0 = \theta \mathbf{k} \theta_c^{-1} \mathbf{H}_0' = \hat{\mathbf{K}} \mathbf{H}_0', \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \theta \mathbf{k} \theta_c. \quad (35)$$

Выполняя в (35) умножение тензоров, получим

$$\hat{\kappa}_{xx} = \kappa_{xy} \sin(2\alpha) + \kappa_{xx} \cos^2(\alpha) + \kappa_{yy} \sin^2(\alpha), \quad (36)$$

$$\hat{\kappa}_{yy} = -\kappa_{xy} \sin(2\alpha) + \kappa_{xx} \sin^2(\alpha) + \kappa_{yy} \cos^2(\alpha), \quad (37)$$

$$\hat{\kappa}_{xy} = \hat{\kappa}_{yx} = \kappa_{xy} \cos(2\alpha) + \frac{(\kappa_{yy} - \kappa_{xx}) \sin(2\alpha)}{2} = 0. \quad (38)$$

Из последнего соотношения определяем угол поворота осей α

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\kappa_{xy}}{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}} \right), \quad (39)$$

а из соотношений (36) и (37) соответственно главные значения тензора $\hat{\kappa}$ – $\hat{\kappa}_{xx}$ и $\hat{\kappa}_{yy}$. Эти же значения можно получить стандартным способом, вычисляя корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \kappa_{xx} - \lambda & \kappa_{xy} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (40)$$

которые определяют главные значения тензора $\hat{\kappa}$

$$\hat{\kappa}_{xx} = \frac{(\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) + \sqrt{(\kappa_{xx} - \kappa_{yy})^2 + 4\kappa_{xy}^2}}{2}, \quad \hat{\kappa}_{yy} = \frac{(\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) - \sqrt{(\kappa_{xx} - \kappa_{yy})^2 + 4\kappa_{xy}^2}}{2}. \quad (41)$$

Приведенные выше расчетные выражения получены для случая $\mu_3=1$. Более общие выражения

для $\mu_3 \neq 1$ можно получить путем введения расчетных проницаемостей $\mu_1^* = \mu_1 / \mu_3$, $\mu_2^* = \mu_2 / \mu_3$,

$\mu_3^* = 1$. Очевидно, соответствующие значения потенциалов и напряженности поля при этом сохраняются неизменными, а расчетные значения магнитной индукции будут отличаться от истинных в μ_3 раз. Поэтому полученные выше выражения для приведенной магнитной проницаемости необходимо домножить на μ_3 . Например, формула (30) для произвольных значений μ_1 , μ_2 , μ_3 принимает вид

$$\mu_{xx} = \mu_{xy} = \mu_3 \left(1 - \frac{2p}{p - \lambda_2^{-1} + 0.305828 p^4 \lambda_2} \right). \quad (30)$$

Численный пример. Ниже приведен пример ГС, в которой приняты следующие параметры: $\omega_1=4$, $\omega_2=3+j$, $\mu_1=100$, $\mu_2=10$, $\mu_3=1$, радиусы цилиндров $a=0,3$ и $b=0,5$. Для $H_0=H_{0x}=1$ в результате решения системы (25) получены: $\kappa_{xx}=0,284$, $\kappa_{yx}=-0,0466$; для $H_0=1j$ $\kappa_{xy}=-0,0805$, $\kappa_{yy}=0,2778$. Отклонение значений κ_{yx} и κ_{xy} можно объяснить недостаточно высоким порядком системы уравнений (25) и достаточно высокой концентрацией включений. Примем для последующих расчетов усредненное значение $\kappa_{yx}=\kappa_{xy} = 0,0636$. Угол поворота осей, вычисленный по выражению (39), составляет $\alpha=43,6^\circ$, а главные значения тензора $\hat{\kappa}$ согласно (17) $\hat{\kappa}_{xx}=0,217$, $\hat{\kappa}_{yy}=0,344$. Соответствующие значения компонентов диагонального тензора относительной магнитной проницаемости $\hat{\mu}$: $\hat{\mu}_{xx}=1,2172$, $\hat{\mu}_{yy}=1,3445$.

Выводы. Классический метод мультиполей для круговых цилиндров может быть обобщен на случай полых круговых цилиндров. Приведенные магнитные свойства правильной системы полых круговых цилиндров, как и в случае сплошных цилиндров, определяются только дипольными моментами цилиндров. Для системы полых круговых цилиндров, приведенные свойства которой являются анизотропными, получены расчетные выражения для направлений главных осей анизотропии и компонентов тензора магнитной проницаемости. Из полученных расчетных выражений классические формулы Релея получаются как частный случай.

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
Akhiezer N.I. Elements of the theory of elliptic functions. – Moskva: Nauka, 1970. – 304 p. (Rus.)
2. Вейль А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. – М.: Мир, 1978. – 112 с.
Veil A. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. – Moskva: Mir, 1978. – 112 p. (Rus.)

3. Емец Ю.П. Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. – Киев: Наукова думка, 1968. – 192 с.
Emets Yu.P. Electrical characteristics of composite materials with regular structure. – Kyiv: Naukova dumka, 1968. – 192p. (Rus.)
4. Толмачев С.Т. Двоякопериодическая задача магнитостатики // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1983. – № 6. – С. 1402–1409.
Tolmachev S.T. A doubly periodic problem of magnetostatics // *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki.* – 1983. – № 6. – P. 1402–1409. (Rus.)
5. Толмачев С.Т. Специальные методы решения задач магнитостатики. – Київ: Вища школа, 1983. – 166 с.
Tolmachev S.T. Special methods for solving magnetostatic problems. – Kyiv: Vishcha shkola, 1983. – 166 p. (Rus.)
6. Толмачев С.Т., Ильченко А.В., Рожненко Ж.Г. Математическое моделирование магнитного поля с двоякопериодической структурой // Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. – 2007. – № 1. – С. 141–146.
Tolmachev S.T., Ilchenko A.V., Rozhnenko Zh.H. Mathematical modeling of magnetic field with doubly periodic structure // *Pratsi Luganskogo viddilennia Mizhnarodnoi Akademii informatyzatsii.* – 2007. – № 1. – P. 141–146. (Rus.)
7. Толмачев С.Т., Ильченко А.В., Бондаревский С.Л. Приведенные свойства магнитной среды с двоякопериодической структурой поля // Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. – 2007. – № 2. – С. 133–137.
Tolmachev S.T., Ilchenko A.V., Bondarevskii S.L. Reduced properties of magnetic area with doubly periodic field structure // *Pratsi Luganskogo viddilennia Mizhnarodnoi Akademii informatyzatsii.* – 2007. – № 2. – P. 133–137. (Rus.)
8. Толмачев С.Т. Однородное поле, возмущенное периодической системой круговых цилиндров // Теоретическая электротехника. Респ. межвед. научн.-техн. сб., вып. 23. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те. – 1977. – С. 97–106.
Tolmachev S.T. Homogeneous field disturbed by periodic system of circular cylinders // *Teoreticheskaia elektrotehnika. Resp. mezhved. nauchn.-tekhn. sb., vyp. 23.* – Lvov: Vishcha shkola. Izd. pri Lvov. Univ. – 1977. – P. 97–106. (Rus.)
9. Толмачев С.Т. Расчет эффективной электропроводности (проницаемости) двухфазных сред с цилиндрическими включениями // Электричество. – 1975. – №2. – С. 39–43.
Tolmachev S.T. Calculation of effective electroconductivity (penetrability) of two-phase areas with cylindrical inclusions // *Elektrichestvo.* – 1975. – №2. – P. 39–43. (Rus.)
10. Толмачев С.Т. Эффективные параметры упорядоченных гетерогенных сред // Электричество. – 1983. – № 7. – С. 35–40.
Tolmachev S.T. Effective parameters of ordered heterogeneous mediums // *Elektrichestvo.* – 1983. – № 7. – P. 35–40. (Rus.)
11. Толмачев С.Т., Юхимович Д.Л., Бондаревский С.Л. Двоякопериодическая задача для полых круговых цилиндров // Электротехника і електромеханіка. – 2010. – № 2. – С. 42–45.
Tolmachev S.T., Yukhimovich D.L., Bondarevskii S.L. A doubly periodic problem for hollow circular cylinders // *Elektrotehnika i Elektromekhanika.* – 2010. – № 2. – P. 42–45. (Rus.)
12. Perrins W.T., McKenzie D.R., McPhedran R.C. Transport Properties of Regular Arrays of Cylinders II // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1979. – Vol. 369. – Pp. 207–225.
13. Rayleigh J.W. On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium // *Phil. mag.* – 1982. – Vol.5. – P. 481–505.

УДК 621.3.013.22

С.Т.Толмачев¹, докт.техн.наук, Д.Л.Юхимович²

^{1,2} – Криворізький технічний університет, вул. XXII партз'їзду, 11, Кривий Ріг, 50027, Дніпропетровська обл., Україна

Задача приведения для регулярной системы порожнистых круговых цилиндров с довільною решіткою періодів

На основі методу мультиполів для довільних двоякопериодичних решіток отримано явні формули для тензора приведеної проникності двоякопериодичної системи порожнистых круговых цилиндрів з довільними магнітними проникностями областей. Бібл. 13, рис. 3.

Ключові слова: метод мультиполів, двоякопериодичні системи, магнітна проникність.

S.T.Tolmachev¹, D.L.Yukhimovych²

^{1,2} – Krivorozhsky technical university, XXII partsezdu str., 11, Kryvyi Rig, 50027, Dnipropetrovska obl., Ukraine

The problem of reducing the hollow circular cylinders with arbitrary grating of periods for regular system

On basis of multifield method for an arbitrary doubly periodic gratings the explicit formulas for tensor of reduced doubly periodic system penetrability of hollow circular cylinders with arbitrary magnetic penetrabilities of areas have been obtained. References 13, figures 3.

Key words: multifield method, doubly periodic system, magnetic penetrabilities.

Надійшла 29.07.2010
Received 29.07.2010