

**РОЗРАХУНОК ВИХРОВИХ СТРУМІВ У ТРИФАЗНОМ ТЕПЛОГЕНЕРАТОРІ
ІНДУКЦІЙНОГО ТИПУ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ.
РЕЖИМ СТРУМУ**

А.В. Жильцов^{1*}, докт. техн. наук, **Н.А. Заєць**^{2**}, докт. техн. наук,
А.О. Березюк^{2***}, канд. техн. наук, **О.В. Гай**^{2****}, канд. техн. наук, **В.В. Ликтей**^{2*****}

¹ Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна. E-mail: azhilt@gmail.com.

² Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв оборони, 15, Київ, 03041, Україна.

З використанням методу вторинних джерел розроблено тривимірну математичну модель теплогенератора індукційного типу за живлення його від трифазного джерела струму із завантаженням у вигляді незв'язаних між собою феромагнітних електропровідних труб, враховано характер симетричного розподілу густин вторинних джерел електромагнітного поля. Аналіз розподілу вторинних джерел електромагнітного поля та теплових втрат у навантаженні дозволив зробити висновок про можливість нехтування компонентами густин вихрових струмів та густин струмів намагнічування вздовж всієї симетрії труб та радіальному напрямку, що зменшує кількість шуканих густин вторинних джерел з шести до трьох. Показано, що для аналізу електромагнітних процесів у теплогенераторах зазначеного типу розподіл густин вторинних джерел в усіх трубах є однаковим, що під час використання методу вторинних джерел дає змогу звести область пошуку до однієї базової феромагнітної електропровідної труби. Бібл. 8, рис. 3, табл. 1.

Ключові слова: теплогенератор, індукційний нагрів, моделювання, метод вторинних джерел.

Вступ. Математичне моделювання пристроїв індукційного нагріву з повздовжнім магнітним полем є класичним прикладом використання енергії електромагнітного поля. Для такого моделювання використовуються як аналітичні, так і чисельні методи. Особливістю всіх цих методів є прийняття умов вісесиметричності розташування завантаження, що значно спрощує процес отримання розв'язку через нехтування двома складовими магнітного векторного потенціалу. У випадку розташування завантаження не на осі симетрії індуктора або наявності кількох незв'язаних між собою завантажень задача розрахунку електромагнітного поля значно ускладнюється і може бути отримана при чисельному моделюванні. Конструктивні особливості завантаження приводять до того, що застосування таких методів як метод скінчених різниць або скінчених елементів веде до виконання великого обсягу надлишкових обчислень та ускладнює врахування вказаної симетрії.

Виходячи з цього, оптимальним з погляду зменшення області пошуку розв'язку і, як наслідок, оптимального використання ресурсів обчислювальної техніки, що особливо актуально під час проведення багатоваріантних розрахунків, є метод інтегральних рівнянь для джерел, які визначають електромагнітне поле, наприклад, густини вихрових струмів у об'ємі, густини простого шару струмів намагнічування та простого шару електричних зарядів на поверхні феромагнітних труб або стрижнів [1-6]. Ці рівняння точно враховують поля розсіювання в необмеженому просторі, дають змогу врахувати симетрію електромагнітної системи теплогенератора індукційного типу [1] і мають мінімальну розрахункову область: об'єми провідників та поверхні феромагнітних електропровідних труб або стрижнів.

У роботі [1] з використанням методу вторинних джерел розроблено тривимірну математичну модель трифазного теплогенератора індукційного типу, яка враховує симетрію магнітної системи, що зменшує область пошуку густин вихрових струмів до об'ємів труб, що визначають групи труб з однаковим розподілом густин вторинних джерел. Розроблена математична модель реалізована у вигляді відповідного алгоритму та програми чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь для густин вторинних джерел в середовищі *Fortran*. Подальший аналіз отриманих результатів та обґрунтування

© Жильцов А.В., Заєць Н.А., Березюк А.О., Гай О.В., Ликтей В.В., 2023
ORCID ID: * <https://orcid.org/0000-0002-1688-7879>; ** <https://orcid.org/0000-0001-5219-2081>;
*** <https://orcid.org/0000-0003-0305-5894>; **** <https://orcid.org/0000-0001-5460-7260>;
***** <https://orcid.org/0000-0002-7412-5143>

можливості зведення області пошуку невідомих густин вихрових струмів задля визначення генерації тепла у теплогенераторі до об'єму однієї труби з врахуванням симетрії розташування усіх феромагнітних електропровідних труб у завантаженні є метою цієї роботи.

Математична модель трифазного теплогенератора індукційного типу. Так само, як і в

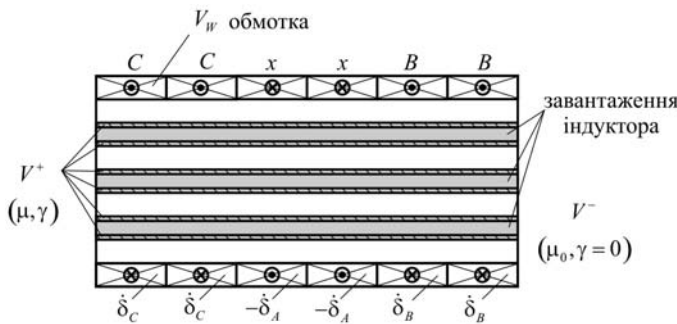


Рис. 1

роботі [1], розглянемо трифазний теплогенератор індукційного типу (рис. 1). Задачу будемо розв'язувати за припущення, що у трифазній обмотці індуктора протікають синусоїдні струми (рис. 1):

$$\delta_A = \delta_{\max} \sin(\omega t),$$

$$\delta_B = \delta_{\max} \sin(\omega t + 2\pi/3), \quad \delta_C = \delta_{\max} \sin(\omega t - 2\pi/3).$$

Будемо вважати, що обмотка кожної фази представлена у вигляді коаксіальних кілець, а завантаження індуктора – у вигляді електропровідних феромагнітних труб (рис. 1). Задачу розрахунку вихрових струмів у навантаженні теплогенератора індукційного типу будемо розглядати за припущення постійної магнітної проникності та питомої провідності труб в квазістационарному наближенні.

Задача розрахунку вихрових струмів у теплогенераторі індукційного типу зводиться до комплексної форми системи інтегральних рівнянь [1, 2]:

Задача розрахунку вихрових струмів у теплогенераторі індукційного типу зводиться до комплексної форми системи інтегральних рівнянь [1, 2]:

$$\dot{\delta}(Q) + \frac{j\omega\mu\gamma}{4\pi} \int_{V^+} \frac{\dot{\delta}(M)}{r_{MQ}} dV_M + \frac{j\omega\mu_0\gamma}{4\pi} \oint_S \frac{\dot{i}(M)}{r_{MQ}} dS_M - \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \dot{\sigma}(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M = -\frac{j\omega\mu_0\gamma}{4\pi} \int_{V_w} \frac{\dot{\delta}_w(M)}{r_{MQ}} dV_M, \quad Q \in V^+, \quad (1)$$

$$\dot{i}(Q) + \frac{\lambda}{2\pi} \oint_S \dot{i}(M) \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + \frac{\lambda}{2\pi\mu_0} \int_{V^+} \dot{\delta}(M) \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dV_M = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{V_w} \dot{\delta}_w(M) \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dV_M, \quad Q \in S, \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}(Q) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \dot{\sigma}(M) \left[\frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} - \frac{2\pi}{S} \right] dS_M + \frac{j\omega\epsilon_0\mu}{2\pi} \int_{V^+} \dot{\delta}(M) \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}} dV_M + \frac{j\omega\epsilon_0\mu_0}{2\pi} \int_S \dot{i}(M) \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}} dS_M = -\frac{j\omega\epsilon_0\mu_0}{2\pi} \int_{V_w} \dot{\delta}_w(M) \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}} dV_M, \quad Q \in S, \quad (3)$$

де $\dot{\delta}(Q)$ – комплексна амплітуда густини вихрових струмів у точці Q труб V^+ ; $\dot{\delta}(M)$ – те саме у точці M ; $\dot{i}(Q)$ – комплексна амплітуда поверхневої густини простого шару струмів у точці Q на границі S труб; $\dot{i}(M)$ – $\dot{\sigma}(Q)$ – комплексна амплітуда густини простого шару електричних зарядів у точці Q на границі S труб; $\dot{\sigma}(M)$ – те саме у точці M ; $j = \sqrt{-1}$; $\omega = 2\pi f$, f – частота електричних струмів в обмотках індуктора; μ , γ – абсолютна магнітна проникність, питома електрична провідність матеріалу труб; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – магнітна та діелектрична постійні; \vec{r}_{MQ} – радіус-вектор, що спрямований з точки інтегрування M у точку спостереження Q ; $\dot{\delta}_w(M)$ – комплексна амплітуда густини струмів у обмотках індуктора V_w ; \vec{n}_Q – зовнішня нормаль до границі S труб; $\lambda = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$ – параметр інтегрального рівняння (2).

Зведення векторної системи інтегральних рівнянь (1) – (3) до системи скалярних у локальних системах координат, що пов'язана із кожною трубою. На рис. 2 наведено в перерізі приклад розташування труб у завантаженні теплогенератора індукційного типу [1]. Нехай R_1 , R_2 – внутрішній та зовнішній радіус кожної труби, h – їхня довжина та, відповідно, l довжина індуктора. Завантаження з N_r шарів труб формується наступним чином: кожен k -тий шар труб $V_k^{m_k}$, $k=1,2,\dots,N_r$, $m_k=1,2,\dots,6k$, розташований таким чином, що положення кожної з них задається положенням їхніх геометричних центрів $O_k^{m_k}$ із координатами $(r_k, \alpha_k^{m_k}, z_k)$ в глобальній системі циліндричних координат $O\rho\alpha z$ (рис. 3, вісь z спрямована з площини рисунка до нас). Тут $\alpha_k^{m_k} = \alpha_k^1 + (m_k - 1)\pi/3k$, $m_k=1,2,\dots,6k$, (r_k, α_k^1, z_k) – координати геометричного центру першої труби у k -му шарі. Для випадку, що зображе-

но на рис. 2 $\alpha_k^1 = \pi/3$, $k=1,2,\dots,N_r$. В подальшому із кожною трубою зв'яжемо локальну систему циліндричних координат $O_k^{m_k} r_k^{m_k} \alpha_k^{m_k} z_k^{m_k}$ (рис. 3).

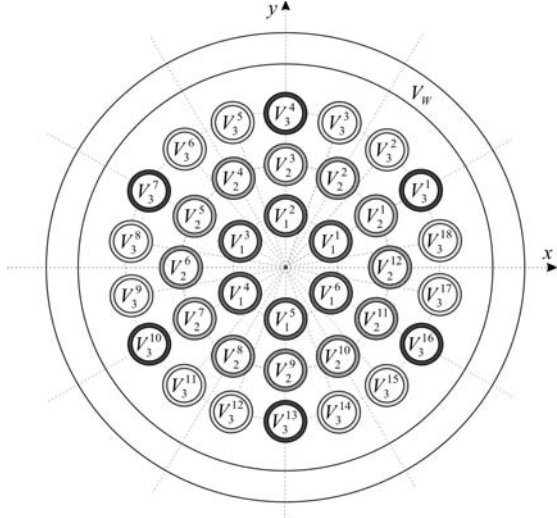


Рис. 2

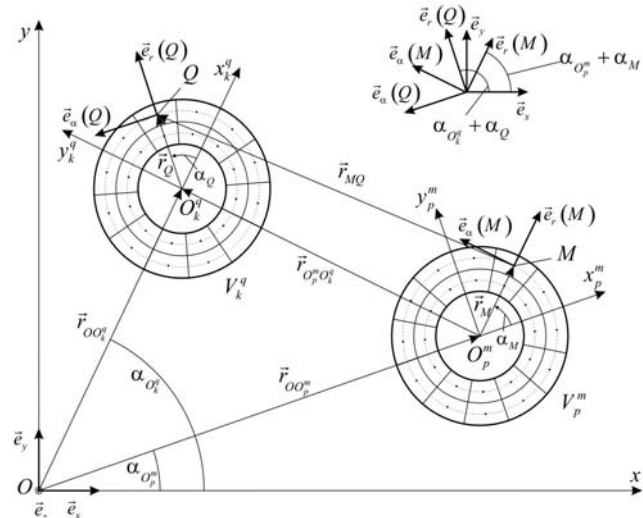


Рис. 3

Запишемо систему рівнянь (1) – (3) в проекціях на орти в циліндричній локальній системі координат, що пов'язана із трубою, наприклад, V_k^q (рис. 3) [1], для інших труб завантаження аналогічне.

Комплексну амплітуду густини вихрових струмів $\dot{\delta}(Q)$ представляємо у вигляді трьох компонент у локальній системі координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$

$$\dot{\delta}(Q) = \dot{\delta}_r(Q) \bar{e}_r(Q) + \dot{\delta}_\alpha(Q) \bar{e}_\alpha(Q) + \dot{\delta}_z(Q) \bar{e}_z(Q), \quad (4)$$

де $\bar{e}_r(Q)$, $\bar{e}_\alpha(Q)$, $\bar{e}_z(Q)$ – орти циліндричної локальної системи координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$ (рис. 3), орт $\bar{e}_z(Q)$ спрямований з площини рисунка до нас.

Відповідно комплексну амплітуду густини вихрових струмів $\dot{\delta}(M)$ представляємо у вигляді трьох компонент у локальній системі координат $O_p^m r_p^m \alpha_p^m z_p^m$ (рис. 3)

$$\dot{\delta}(M) = \dot{\delta}_r(M) \bar{e}_r(M) + \dot{\delta}_\alpha(M) \bar{e}_\alpha(M) + \dot{\delta}_z(M) \bar{e}_z(M), \quad (5)$$

де $\bar{e}_r(M)$, $\bar{e}_\alpha(M)$, $\bar{e}_z(M)$ – орти в циліндричній локальній системі координат $O_k^m r_k^m \alpha_k^m z_k^m$, орт $\bar{e}_z(M)$ спрямований з площини рисунка до нас.

Спроектуємо вектор $\dot{\delta}(M)$ (для $\dot{i}(M)$ аналогічно) на орти $\bar{e}_r(Q)$, $\bar{e}_\alpha(Q)$, $\bar{e}_z(Q)$ локальної системи циліндричних координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$ (рис. 3)

$$\dot{\delta}(M) = [\dot{\delta}_r(M) \cos \alpha_{MQ} + \dot{\delta}_\alpha(M) \sin \alpha_{MQ}] \bar{e}_r(Q) + [-\dot{\delta}_r(M) \sin \alpha_{MQ} + \dot{\delta}_\alpha(M) \cos \alpha_{MQ}] \bar{e}_\alpha(Q) + \dot{\delta}_z(M) \bar{e}_z(Q), \quad (6)$$

Де
$$\alpha_{MQ} = \alpha_{O_k^q} + \alpha_{O_Q} - \alpha_{O_p^m} - \alpha_M. \quad (7)$$

Аналогічно виразу (6) записуємо

$$\dot{\delta}_w(M) = \bar{e}_r(Q) \dot{\delta}_{w\alpha}(M) \sin \alpha_{MQ} + \bar{e}_\alpha(Q) \dot{\delta}_{w\alpha}(M) \cos \alpha_{MQ}, \quad (8)$$

де враховано, що комплексна густина струму у обмотках індуктора має тільки α -компоненту, тобто $\dot{\delta}_w(M) = \dot{\delta}_{w\alpha}(M) \bar{e}_\alpha(M)$.

Далі знаходимо проекцію вектора \bar{r}_{MQ} на орти локальної системи циліндричних координат $\bar{e}_r(Q)$, $\bar{e}_\alpha(Q)$, $\bar{e}_z(Q)$ (рис. 3)

$$r_{MQ}^r = (\bar{r}_{MQ}, \bar{e}_r(Q)) = r_{OO_k^q} \cos(\alpha_Q) + r_Q - r_{OO_p^m} \cos(\alpha_{O_k^q} - \alpha_{O_p^m} + \alpha_Q) - r_M \cos(\alpha_{O_k^q} + \alpha_Q - \alpha_{O_p^m} - \alpha_M);$$

$$r_{MQ}^{\alpha} = (\vec{r}_{MQ}, \vec{e}_{\alpha}(Q)) = -r_{OO_k^q} \sin(\alpha_Q) + r_{OO_p^m} \sin(\alpha_{O_k^q} - \alpha_{O_p^m} + \alpha_Q) + r_M \sin(\alpha_{O_k^q} + \alpha_Q - \alpha_{O_p^m} - \alpha_M);$$

$$r_{MQ}^z = (\vec{r}_{MQ}, \vec{e}_z(Q)) = z_Q - z_M.$$

Таким чином, записуємо рівняння (1) в проєкціях на осі локальної системи координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_r(Q) + \frac{\xi}{4\pi_{V^+}} \int \dot{\delta}_r(M) T^c(M, Q) dV_M + \frac{\xi}{4\pi_{V^+}} \int \dot{\delta}_{\alpha}(M) T^s(M, Q) dV_M + \frac{\xi_0}{4\pi_{S_1}} \int \dot{i}_{1\alpha}(M) T^s(M, Q) dS_M + \\ + \frac{\xi_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{i}_{2r}(M) T^c(M, Q) dS_M + \frac{\xi_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{i}_{2\alpha}(M) T^s(M, Q) dS_M - \frac{\zeta_0}{4\pi_{S_1}} \int \dot{\sigma}_1(M) P^r(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\zeta_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{\sigma}_2(M) P^r(M, Q) dS_M = -\frac{\xi_0}{4\pi_{V_w}} \int \dot{\delta}_{w\alpha}(M) T^s(M, Q) dV_M, \quad Q \in V_k^q, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{\alpha}(Q) - \frac{\xi}{4\pi_{V^+}} \int \dot{\delta}_r(M) T^s(M, Q) dV_M + \frac{\xi}{4\pi_{V^+}} \int \dot{\delta}_{\alpha}(M) T^c(M, Q) dV_M + \frac{\xi_0}{4\pi_{S_1}} \int \dot{i}_{1\alpha}(M) T^c(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\xi_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{i}_{2r}(M) T^s(M, Q) dS_M + \frac{\xi_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{i}_{2\alpha}(M) T^c(M, Q) dS_M - \frac{\zeta_0}{4\pi_{S_1}} \int \dot{\sigma}_1(M) P^{\alpha}(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\zeta_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{\sigma}_2(M) P^{\alpha}(M, Q) dS_M = -\frac{\xi_0}{4\pi_{V_w}} \int \dot{\delta}_{w\alpha}(M) T^c(M, Q) dV_M, \quad Q \in V_k^q, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_z(Q) + \frac{\xi}{4\pi_{V^+}} \int \dot{\delta}_z(M) T(M, Q) dV_M + \frac{\xi_0}{4\pi_{S_1}} \int \dot{i}_{1z}(M) T(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\zeta_0}{4\pi_{S_1}} \int \dot{\sigma}_1(M) P^z(M, Q) dS_M - \frac{\zeta_0}{4\pi_{S_2}} \int \dot{\sigma}_2(M) P^z(M, Q) dS_M = 0, \quad Q \in V_k^q. \end{aligned} \quad (11)$$

У рівняннях (9) – (11) позначено: $\dot{\delta}_r(Q)$, $\dot{\delta}_{\alpha}(Q)$, $\dot{\delta}_z(Q)$ – компоненти у локальній системі координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$ комплексної густини вихрових струмів у трубах V_k^q ; $\dot{\delta}_r(M)$, $\dot{\delta}_{\alpha}(M)$, $\dot{\delta}_z(M)$ – компоненти у локальній системі координат $O_k^m r_k^m \alpha_k^m z_k^m$ комплексної густини вихрових струмів у трубах $V^+ = \cup V_p^m$; $\dot{i}_{1\alpha}(M)$, $\dot{i}_{1z}(M)$ та $\dot{i}_{2r}(M)$, $\dot{i}_{2\alpha}(M)$ – компоненти у локальній системі координат $O_k^m r_k^m \alpha_k^m z_k^m$ комплексної густини струмів намагнічування на бокових $S_1 = \cup S_{1p}^m$ та на торцевих $S_2 = \cup S_{2p}^m$ поверхнях труб; $\dot{\delta}_{w\alpha}(M)$ – α -компонента у своїй локальній системі координат комплексної густини струму у обмотках теплогенератора індукційного типу V_w ; σ_1 , σ_2 – комплексні густини простого шару електричних зарядів на бокових S_1 та на торцевих S_2 поверхнях труб

$$\xi = j\omega\mu\gamma, \quad \xi_0 = j\omega\mu_0\gamma, \quad \zeta_0 = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}, \quad T^c(M, Q) = \frac{\cos\alpha_{MQ}}{r_{MQ}}, \quad T^s(M, Q) = \frac{\sin\alpha_{MQ}}{r_{MQ}}, \quad T(M, Q) = \frac{1}{r_{MQ}}; \quad (12)$$

$$P^r(M, Q) = \frac{(\vec{r}_{MQ}, \vec{e}_r(Q))}{r_{MQ}^3}, \quad P^{\alpha}(M, Q) = \frac{(\vec{r}_{MQ}, \vec{e}_{\alpha}(Q))}{r_{MQ}^3}, \quad P^z(M, Q) = \frac{(\vec{r}_{MQ}, \vec{e}_z(Q))}{r_{MQ}^3}. \quad (13)$$

Далі, аналогічно записуємо рівняння (2) в проєкціях на орти локальної системи координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$. З урахуванням співвідношення (6) знаходимо

$$\begin{aligned} \vec{n}_Q \times \vec{\delta}(M) \times \vec{r}_{MQ} = \vec{e}_r(Q) \{ \dot{\delta}_r(M) n_z(Q) r_{MQ}^z \cos\alpha_{MQ} + \dot{\delta}_{\alpha}(M) n_z(Q) r_{MQ}^z \sin\alpha_{MQ} - \dot{\delta}_z(M) n_z(Q) r_{MQ}^r \} - \\ - \vec{e}_{\alpha}(Q) \left\{ \begin{aligned} &\dot{\delta}_r(M) [n_r(Q) (r_{MQ}^{\alpha} \cos\alpha_{MQ} + r_{MQ}^r \sin\alpha_{MQ}) + n_z(Q) r_{MQ}^z \sin\alpha_{MQ}] + \\ &\dot{\delta}_{\alpha}(M) [n_r(Q) (r_{MQ}^{\alpha} \sin\alpha_{MQ} - r_{MQ}^r \cos\alpha_{MQ}) - n_z(Q) r_{MQ}^z \cos\alpha_{MQ}] + \dot{\delta}_z(M) n_z(Q) r_{MQ}^{\alpha} \end{aligned} \right\} + \\ + \vec{e}_z(Q) \{ -\dot{\delta}_r(M) n_r(Q) r_{MQ}^z \cos\alpha_{MQ} - \dot{\delta}_{\alpha}(M) n_r(Q) r_{MQ}^z \sin\alpha_{MQ} + \dot{\delta}_z(M) n_r(Q) r_{MQ}^r \}. \end{aligned}$$

Аналогічний вигляд має вираз для $\vec{n}_Q \times \vec{i}(M) \times \vec{r}_{MQ}$.

Тут враховано, що труби являють собою порожні циліндри, тому нормаль до їхньої границі має лише r -компоненту (на боковій поверхні) або z -компоненту (на торцевій поверхні):

$$\vec{n}_Q = n_r(Q)\vec{e}_r(Q) + n_z(Q)\vec{e}_z(Q), \quad Q \in S,$$

де $n_r(Q)$, $n_z(Q)$ – компоненти нормалі у точці Q до поверхні труб у локальній системі координат $O_k^q r_k^q \alpha_k^q z_k^q$.

Записуємо рівняння (2) в проекціях. Якщо $Q \in S_{1k}^q$, S_{1k}^q – бокові поверхні труб, тобто $n_r(Q) \neq 0$, $n_\alpha(Q) = 0$, $n_z(Q) = 0$, то

$$i_{1r}(Q) = 0, \quad Q \in S_{1k}^q; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} i_{1\alpha}(Q) - \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_1} i_{1\alpha}(M) G_{ar}^{s-c}(M, Q) dS_M - \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_2} i_{2r}(M) G_{ar}^{c+s}(M, Q) dS_M - \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_2} i_{2\alpha}(M) G_{ar}^{s-c}(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_r(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_r(M) G_{ar}^{c+s}(M, Q) dV_M - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_r(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_\alpha(M) G_{ar}^{s-c}(M, Q) dV_M = \\ = \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{V_w} \dot{\delta}_{w\alpha}(M) G_{ar}^{s-c}(M, Q) dV_M, \quad Q \in S_{1k}^q; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} i_{1z}(Q) - \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_1} i_{1\alpha}(M) G_z^s(M, Q) dS_M + \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_1} i_{1z}(M) G_r(M, Q) dS_M - \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_2} i_{2r}(M) G_z^c(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{S_2} i_{2\alpha}(M) G_z^s(M, Q) dS_M - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_r(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_r(M) G_z^c(M, Q) dV_M - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_r(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_\alpha(M) G_z^s(M, Q) dV_M + \\ + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_r(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_z(M) G_r(M, Q) dV_M = \frac{\lambda}{2\pi} n_r(Q) \int_{V_w} \dot{\delta}_{w\alpha} G_z^s(M, Q) dV_M, \quad Q \in S_{1k}^q; \end{aligned} \quad (16)$$

якщо $Q \in S_{2k}^q$, S_{2k}^q – торцеві поверхні труб, тобто $n_r(Q) = 0$, $n_\alpha(Q) = 0$, $n_z(Q) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} i_{2r}(Q) + \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_2} i_{2r}(M) G_z^c(M, Q) dS_M + \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_2} i_{2\alpha}(M) G_z^s(M, Q) dS_M + \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_1} i_{1\alpha}(M) G_z^s(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_1} i_{1z}(M) G_r(M, Q) dS_M + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_z(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_r(M) G_z^c(M, Q) dV_M + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_z(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_\alpha(M) G_z^s(M, Q) dV_M - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_z(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_z(M) G_r(M, Q) dV_M = - \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{V_w} \dot{\delta}_{w\alpha}(M) G_z^s(M, Q) dV_M, \quad Q \in S_{2k}^q; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} i_{2\alpha}(Q) - \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_2} i_{2r}(M) G_z^s(M, Q) dS_M + \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_2} i_{2\alpha}(M) G_z^c(M, Q) dS_M + \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_1} i_{1\alpha}(M) G_z^c(M, Q) dS_M - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{S_1} i_{1z}(M) G_\alpha(M, Q) dS_M - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_z(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_r(M) G_z^s(M, Q) dV_M + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_z(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_\alpha(M) G_z^c(M, Q) dV_M - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_0} n_z(Q) \int_{V^+} \dot{\delta}_z(M) G_\alpha(M, Q) dV_M = - \frac{\lambda}{2\pi} n_z(Q) \int_{V_w} \dot{\delta}_{w\alpha}(M) G_z^c(M, Q) dV_M, \quad Q \in S_{2k}^q; \end{aligned} \quad (18)$$

$$i_{2z}(Q) = 0, \quad Q \in S_{2k}^q. \quad (19)$$

У рівняннях (14) – (19) позначено:

$$G_{ar}^{s-c}(M, Q) = \frac{r_{MQ}^\alpha \sin \alpha_{MQ} - r_{MQ}^r \cos \alpha_{MQ}}{r_{MQ}^3}; \quad G_{ar}^{c+s}(M, Q) = \frac{r_{MQ}^\alpha \cos \alpha_{MQ} + r_{MQ}^r \sin \alpha_{MQ}}{r_{MQ}^3};$$

$$G_z^s(M, Q) = \frac{r_{MQ}^z \sin \alpha_{MQ}}{r_{MQ}^3}; \quad G_z^c(M, Q) = \frac{r_{MQ}^z \cos \alpha_{MQ}}{r_{MQ}^3}; \quad G_r(M, Q) = \frac{r_{MQ}^r}{r_{MQ}^3}; \quad G_\alpha(M, Q) = \frac{r_{MQ}^\alpha}{r_{MQ}^3}.$$

Рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_1(Q) - \frac{1}{2\pi_{S_1}} \int \dot{\sigma}_1(M) K_r(M, Q) dS_M - \frac{1}{2\pi_{S_2}} \int \dot{\sigma}_2(M) K_r(M, Q) dS_M + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu}{2\pi} n_r(Q) \int \dot{\delta}_r(M) T^c(M, Q) dV_M + \\ & + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu}{2\pi} n_r(Q) \int \dot{\delta}_\alpha(M) T^s(M, Q) dV_M + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu_0}{2\pi} n_r(Q) \int \dot{i}_{2r}(M) T^c(M, Q) dS_M + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu_0}{2\pi} n_r(Q) \int \dot{i}_{1\alpha}(M) T^s(M, Q) dS_M + \\ & + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu_0}{2\pi} n_r(Q) \int \dot{i}_{2\alpha}(M) T^s(M, Q) dS_M = - \frac{j\omega \epsilon_0 \mu_0}{2\pi} n_r(Q) \int \dot{\delta}_{w\alpha}(M) T^s(M, Q) dV_M, \quad Q \in S_{1k}^q; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_2(Q) - \frac{1}{2\pi_{S_1}} \int \dot{\sigma}_1(M) K_z(M, Q) dS_M - \frac{1}{2\pi_{S_2}} \int \dot{\sigma}_2(M) K_z(M, Q) dS_M + \\ & + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu}{2\pi} n_z(Q) \int \dot{\delta}_z(M) T(M, Q) dV_M + \frac{j\omega \epsilon_0 \mu_0}{2\pi} n_z(Q) \int \dot{i}_{1z}(M) T(M, Q) dS_M = 0, \quad Q \in S_{2k}^q. \end{aligned} \quad (21)$$

У рівняннях (20), (21) позначено:

$$G^c(M, Q) = \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ} \cos \alpha_{MQ}}{r_{MQ}^3}, \quad G^s(M, Q) = \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ} \sin \alpha_{MQ}}{r_{MQ}^3}, \quad G(M, Q) = \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3}, \quad (22)$$

$$K_r(M, Q) = \left[\frac{n_r(Q) r_{MQ}'}{r_{MQ}^3} - \frac{2\pi}{S} \right], \quad K_z(M, Q) = \left[\frac{n_z(Q) r_{MQ}''}{r_{MQ}^3} - \frac{2\pi}{S} \right]. \quad (23)$$

Записана система інтегральних рівнянь апроксимується системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з урахуванням симетричного розташування феромагнітних провідних труб у завантаженні теплогенератора індукційного типу [1]. Сформована СЛАР розв'язується модифікованим методом послідовних наближень [2].

Приклад розрахунку. Розглянемо теплогенератор індукційного типу: висота індуктора – $h=1$ м; внутрішній радіус труб – $R_1=14,75 \cdot 10^{-3}$ м; зовнішній радіус труб – $R_2=16,75 \cdot 10^{-3}$ м; абсолютна магнітна проникність матеріалу труб – $\mu=50\mu_0$; кількість труб – 36; питома провідність матеріалу труб – $\gamma=10^7$ См/м; внутрішній радіус котушки – $R_{w1}=162,5 \cdot 10^{-3}$ м; зовнішній радіус котушки – $R_{w2}=185 \cdot 10^{-3}$ м; густина струму в обмотці – $1,5 \times 10^6$ А/м³; частота струмів в обмотці – 50 Гц.

Одним з результатів аналізу електромагнітних процесів у теплогенераторі індукційного типу є розрахунок потужності теплових втрат у трубах від вихрових струмів

$$P = \frac{1}{2\gamma_{V^+}} \int \delta^2 dV, \quad (24)$$

де δ – модуль амплітудного значення густини вихрових струмів у трубах.

Задля перевірки достовірності отриманих розрахунків спочатку було виконано розрахунок потужності в одній трубі, вісь симетрії якої співпадає з віссю симетрії магнітної системи теплогенератора. Розрахунок виконувався шляхом розв'язання системи рівнянь (9) – (21) та з використанням програмного продукту *Comsol Multiphysics* [7] у вісесиметричній постановці, який розв'язує задачу методом скінченних елементів. Результати розрахунків надано у таблиці.

Кількість труб	Активна потужність втрат на вихрові струми, Вт							
	У фазах обмотки індуктора протікає однаковий струм $\dot{\delta}_A$.				У фазах обмотки протікає струм відповідно до рис. 1.			
	повна математична модель	спрощена математична модель	розрахунок для базової труби	<i>Comsol Multiphysics</i> (вісесиметрична)	повна математична модель	спрощена математична модель	розрахунок для базової труби	<i>Comsol Multiphysics</i> (вісесиметрична)
1	380	379	-	394	277	277	-	288
6	1991	1987	1987	-	1369	1368	1368	-
18	4278	4302	4302	-	2762	2780	2780	-
36	6361	6422	6422	-	3975	4017	4017	-

Далі було виконано розрахунок активної потужності теплогенератора індукційного типу для випадків (таблиця, рис. 2): 1) завантаження складається тільки з одного шару труб $V_1^{m_1}$, $m_1=1,2,\dots,6$, для усіх труб приймався однаковий розподіл вторинних джерел електромагнітного поля; 2) завантаження складається із двох шарів труб $V_k^{m_k}$, $k=1,2$, $m_k=1,2,\dots,6k$, тут було виділено три групи труб з однаковим розподілом комплексної густини вторинних джерел – перша $V_1^{m_1}$, $m_1=1,2,\dots,6$, друга $V_2^{m_2}$, $m_2=1,3,5,\dots,11$, і третя $V_2^{m_2}$, $m_2=2,4,6,\dots,12$; 3) завантаження складається із трьох шарів труб $V_k^{m_k}$, $k=1,2,3$, $m_k=1,2,\dots,6k$, тут виділено шість груп труб з однаковим розподілом комплексної густини вторинних джерел – перша $V_1^{m_1}$, $m_1=1,2,\dots,6$, друга $V_2^{m_2}$, $m_2=1,3,5,\dots,11$, третя $V_2^{m_2}$, $m_2=2,4,6,\dots,12$, четверта $V_3^{m_3}$, $m_3=1,4,7,\dots,16$, п'ята $V_3^{m_3}$, $m_3=2,5,8,\dots,17$, і шоста $V_3^{m_3}$, $m_3=3,6,9,\dots,18$.

Враховуючи геометричні особливості магнітної системи теплогенератора індукційного типу (усі тіла є порожніми циліндрами), розрахунки показали, що r - та z -компоненти комплексних густин вихрових струмів, комплексних густин струмів намагнічування зневажливо малі у порівнянні з α -компонентами тих же густин, тому ними можна знехтувати. У такому випадку СЛАР, що апроксимує систему інтегральних рівнянь (9) – (21), спрощується усуненням з неї складових r - та z -компонент комплексних густин вихрових струмів, комплексних густин струмів намагнічування.

В таблиці також наведено результати розрахунку за спрощеною математичною моделлю. Як бачимо з розрахунків таке припущення дає значення активної потужності, що відрізняється від використання повної математичної моделі не більш ніж на 1%. Таким чином, для аналізу електромагнітних процесів у теплогенераторі індукційного типу із загрузкою у вигляді труб можна користуватися спрощеною моделлю, в якій кількість шуканих величин зменшено із шести до трьох, а також зменшується розмір основної матриці системи рівнянь СЛАР, що апроксимує систему інтегральних рівнянь.

Аналіз результатів розрахунків розподілу вторинних джерел електромагнітного поля у трубах показав, що у кожній з них цей розділ є практично однаковим (середньоквадратичне відхилення розподілу у кожній трубі в порівнянні з трубою у першому шарі не перевищує 1%). Припущення однаковості розподілу вторинних джерел у кожній трубі завантаження зводить розрахунок до визначення густини тільки в одній трубі (наприклад, у базовій трубі першого шару), що суттєво зменшує область пошуку невідомих. При цьому, вплив від інших труб враховується при формуванні ядер системи інтегральних рівнянь і, відповідно, формуванні СЛАР, що їх апроксимує. Результати, що надано у таблиці, показують, що активна потужність втрат на вихрові струми в цьому випадку відрізняється від розрахунку за повною математичною моделлю не більше, як на 1%, що дає змогу у подальшому для аналізу електромагнітних процесів у теплогенераторах з таким типом завантаження і підключенням до живлення від трифазної системи струмів використовувати таке припущення. Такий результат добре узгоджується з результатами експериментальних досліджень [8].

Висновок. З використанням методу вторинних джерел розроблено математичну модель теплогенератора індукційного типу за живлення від трифазного джерела струму, яка враховує симетрію розташування феромагнітних електропровідних труб у завантаженні.

Застосування інтегральних рівнянь для густин вторинних джерел електромагнітного поля дає змогу раціонально використовувати обчислювальні ресурси, оскільки ці рівняння, по-перше, мають мінімальну розрахункову область та дають змогу максимально врахувати симетрію магнітної системи теплогенератора індукційного типу; по-друге, точно враховують магнітні поля розсіювання у необмеженому просторі.

Для аналізу електромагнітних процесів у теплогенераторах індукційного типу із завантаженням у вигляді пучка труб припустимо допущення однаковості розподілу густин вторинних джерел в усіх трубах, що у разі використання методу вторинних джерел зводить область пошуку до однієї базової феромагнітної провідної труби.

Перевагою запропонованої математичної моделі теплогенератора індукційного типу є можливість за різних способів увімкнення чергування фаз у обмотці розраховувати безпосередньо густину вихрових струмів у трубах завантаження, знаючи розподіл яких можна розрахувати як потужність теплових втрат в цілому, так і рівномірність їхнього розподілу у завантаженні. В результаті виключаються надмірні обчислення, які становлять важливу частину загального обсягу розрахунків у разі використання моделей, в основах яких лежать метод скінченних різниць або метод скінченних елементів.

1. Жильцов А.В., Березюк А.О., Виштак Т.В. Тривимірний математичний модель трифазного теплогенератора індукційного типу з використанням методу вторинних джерел. *Технічна електродинаміка*. 2022. № 5. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2022.05.008>.

2. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. К.: Техніка, 1974. 352 с.
3. Sorokin D., Knizhka T. Simulation of a Magnetic System With a Ferromagnetic Shell. IEEE 41st International Conference on *Electronics and Nanotechnology* (ELNANO). Kyiv, Ukraine, 10-14 October 2022. Pp. 409-413. DOI: <https://doi.org/10.1109/ELNANO54667.2022.9927022>.
4. Sorokin D. Simulation of High-frequency Induction Heating. 10th International Conference on *Advanced Computer Information Technologies* (ACIT). Deggendorf, Germany, 16-18 September 2020. Pp. 39-42. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208997>.
5. Sorokin D. Simulation of the Force Characteristic of the “Coil-Permanent Magnet” System in the Presence of Ferromagnetic Elements. IEEE XXVth International Seminar/Workshop *Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory* (DIPED). Tbilisi, Georgia, 15-18 September 2020. Pp. 59-62. DOI: <https://doi.org/10.1109/DIPED49797.2020.9273405>.
6. Zhiltsov A., Sorokin D. The calculation of the magnetic field in the working area of the linear motor with permanent magnets. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering* (CPEE). Lviv, Ukraine, 02-05 September 2015. Pp. 252-254. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEE.2015.7333390>.
7. Simulate real-world designs, devices, and processes with multiphysics software from COMSOL. URL: <https://www.comsol.com/> (дата доступу 10.02.2023).
8. Кондратенко І.П., Ращепкін А.П., Березюк А.О. Енергетичні характеристики і електричні параметри індукторів для нагріву пучка ферромагнітних труб. *Вісник Кременчуцького ДПУ*. 2010. Вип. 3(62). Частина 2. С. 56-60.

EDDY CURRENTS CALCULATION IN A THREE-PHASE INDUCTION-TYPE HEAT GENERATOR USING THE SECONDARY SOURCES METHOD. CURRENT MODE

A.V. Zhyltsov¹, N.A. Zaiets², A.O. Bereziuk², O.V. Gai², V.V. Lyktei²

¹Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine, Peremohy Ave., 56, Kyiv, 03057, Ukraine. E-mail: azhilt@gmail.com.

²National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroiv Oborony Str.15, Kyiv, 03041, Ukraine.

Using the secondary sources method, a three-dimensional mathematical model of a heat induction type generator was developed when it is powered by a three-phase current source with a load in the form of non-connected ferromagnetic conducting pipes, taking into account the symmetrical distribution of the densities of the electromagnetic field secondary sources. The analysis of the secondary sources distribution of the electromagnetic field and heat losses in the loaded one allowed us to conclude about the possibility of neglecting the components of eddy current densities and magnetization current densities along the symmetry axis of the pipes and in the radial direction, which reduces the number of secondary source densities sought from six to three. It is shown that for the analysis of electromagnetic processes in heat generators of this type, it is permissible to assume the uniformity of the secondary sources density distribution in all pipes, which, when using the method of secondary sources, makes it possible to reduce the search area to one ferromagnetic base pipe. References 8, figures 3, table 1.

Key words: heat generator, induction heating, modeling, secondary source method.

1. Zhyltsov A.V., Bereziuk A.O., Vishtak T.V. Three-dimensional mathematical model of three-phase heat generator of induction type based on the method of secondary sources. *Tekhnichna Electrodynamika*. 2022. No 5. (Ukr) DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2022.05.008>.
2. Tozoni O.V., Maerгойз I.D. Calculation of three-dimensional electromagnetic fields: Monograph. Kyiv: Technika, 1974. 352 p.
3. Sorokin D., Knizhka T. Simulation of a Magnetic System With a Ferromagnetic Shell. IEEE 41st International Conference on *Electronics and Nanotechnology* (ELNANO). Kyiv, Ukraine, 10-14 October 2022. Pp. 409-413. DOI: <https://doi.org/10.1109/ELNANO54667.2022.9927022>.
4. Sorokin D. Simulation of High-frequency Induction Heating. 10th International Conference on *Advanced Computer Information Technologies* (ACIT). Deggendorf, Germany, 16-18 September 2020. Pp. 39-42. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208997>.
5. Sorokin D. Simulation of the Force Characteristic of the “Coil-Permanent Magnet” System in the Presence of Ferromagnetic Elements. IEEE XXVth International Seminar/Workshop *Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory* (DIPED). Tbilisi, Georgia, 15-18 September 2020. Pp. 59-62. DOI: <https://doi.org/10.1109/DIPED49797.2020.9273405>.
6. Zhiltsov A., Sorokin D. The calculation of the magnetic field in the working area of the linear motor with permanent magnets. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering* (CPEE). Lviv, Ukraine, 02-05 September 2015. Pp. 252-254. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEE.2015.7333390>.
7. Simulate real-world designs, devices, and processes with multiphysics software from COMSOL. URL: <https://www.comsol.com/> (accessed at 10.02.2023).
8. Kondranenko I.P., Raschpkin A.P., Bereziuk A.O. Energy characteristics and electrical parameters of inductors for heating a bundle of ferromagnetic tubes. *Visnyk Kremenchygskoho DPU*. 2010. Vyp. 3(62). Part 2. Pp. 56-60. (Ukr)

Надійшла 13.03.2023

Остаточний варіант 12.04.2023