

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ВИСОКОГРАДІЄНТНИХ МАГНІТНИХ СЕПАРАТОРІВ З ДВОЯКОПЕРІОДИЧНОЮ МАТРИЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

С.Т. Толмачов *, докт. техн. наук, **О.В. Ільченко** **, канд. техн. наук
Криворізький національний університет України,
вул. Віталія Матусевича, 11, Кривий Ріг, 50027, Україна.
Email: stan.tolm@gmail.com.

Дано детальне обґрунтування методу розрахунку локальних і ефективних характеристик магнітних фільтрів матричної структури високоградієнтних магнітних сепараторів. Показано, що за припущення двоякоперіодичної структури матриці і плоскопаралельного характеру поля є змога суттєво розширити можливості існуючих методів за рахунок відсутності істотних обмежень на геометричні та фізичні параметри феромагнітних елементів матриці та їхню концентрацію. Метод базується на інтегральному рівнянні відносно вектору намагніченості елементів основного паралелограма періодів. Двоякоперіодичний характер рішення автоматично забезпечується конструкцією ядра інтегрального оператора, причому на відміну від диференціальних методів відсутня необхідність завдання граничних умов. В рамках лінійної постановки сформульовано чіткі критерії подібності для ефективних і локальних характеристик поля, зокрема для ізоляції магнітних сил. Функціональні можливості методу проілюстровано результатами обчислювальних експериментів на прикладах матриць з різними геометричними характеристиками елементів. За результатами обчислювальних експериментів проілюстровано складний і непередбачуваний розподіл магнітних сил навіть в матрицях з елементами простої геометрії. Зокрема, розрахунками підтверджено гіпотетичне припущення щодо існування періодичних точок біфуркації, в яких відсутні магнітні сили. Ці точки є центрами зон з незначними магнітними силами, що слід враховувати під час розрахунків вилучальної здатності матриці. На конкретних прикладах проілюстровано методику визначення потенційної зони вилучення слабомагнітних матеріалів, в якій значення магнітних сил перевищують їхній мінімально допустимий рівень з урахуванням технологічних обмежень. Бібл. 20, рис. 5, табл. 1.

Ключові слова: високоградієнтна сепарація, матричні фільтри, двоякоперіодична структура, ефективні та локальні характеристики, порівняльний аналіз, критерії подібності.

Вступ. Електромагнітна сепарація слабомагнітних матеріалів почала розвиватися ще з кінця XIX століття і на початковому етапі була реалізована на апаратах малої продуктивності стрічкового, дискового, індукційно-роликового і трубчастого типів [1]. Сучасна технологія високоградієнтної (поліградієнтної) магнітної сепарації виникла в середині минулого століття у зв'язку зі швидкими темпами розвитку бездоменної металургії як реакція на зростання вимог до якості сталі в умовах виснаження запасів багатой рудної сировини [2, 3]. На сьогодні ця технологія забезпечує найбільші можливості вилучення слабомагнітних компонентів рудних матеріалів. Її практичні досягнення пов'язані з розробкою серії високоградієнтних магнітних сепараторів (ВГМС). Разом з тим через великі масогабаритні параметри (наприклад, сепаратор Джонса ДР 335 продуктивністю 180 т/год має діаметр ротора 3.35 м і масу 114 т) і показниках електроспоживання їхні техніко-економічні показники не є задовільними. Тому розробка нових конструкцій ВГМС продовжується, а оптимізація їхніх технічних параметрів залишається актуальним завданням.

Велика різноманітність магнітних систем ВГМС та магнітних фільтрів, що в них використовуються, є відображенням складності та недостатньої вивченості процесу. Зокрема це стосується розробки математичної моделі процесу вилучення слабомагнітної фракції в робочому просторі ВГМС,

© Толмачов С.Т., Ільченко О.В., 2025
ORCID: * <https://orcid.org/0000-0002-5513-9099>; ** <https://orcid.org/0009-0004-4489-3397>
© Видавець Інститут електродинаміки НАН України, 2025



Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>

хоча за останні два-три десятиліття тут досягнуто певних успіхів за рахунок впровадження чисельно-польових методів аналізу [1, 4–10] та засобів їхньої програмної реалізації. Головною особливістю ВГМС матричної структури, що багато в чому визначає їхню продуктивність, якість і вартість кінцевого продукту, є застосування магнітних фільтр-матриць (ФМ) зі складною геометрією та високою концентрацією елементів, що формують достатні для вилучення слабомагнітних фракцій пондеромоторні сили. Тому дослідження різних ФМ є об'єктом уваги численних авторів. Огляд сучасного стану цього питання з великою бібліографією дано в [11]. Основний акцент в більшості публікацій зроблено на пошук оптимальних геометричних форм елементів ФМ. Зокрема, в [12] запропоновано заміну у стрижнях кругового перерізу на ромбовидний. Як перспективні рекомендовано стрижневі ФМ з еліптичним перерізом [13, 14]. У ряді публікацій (наприклад, [15]) розглядається доцільність використання комбінацій стрижнів з різними діаметрами або різними формами перерізів у визначеному порядку. Найбільш активно досліджувалося використання зубчастих пластин. Так, у [2, 3, 9] рекомендовано їхні оптимальні параметри, є навіть висновок щодо трикутної форми елементів як оптимальної. У той же час в [4] стверджується, що заміна трикутних елементів на трапецієвидні може підвищити здатність збору дрібних часток.

У цілому слід зазначити, що поряд із корисною довідковою інформацією окремі публікації мають суперечливий характер, завищений рівень узагальнення і базуються на спрощених математичних моделях. Головними причинами вказаних недоліків є орієнтація на прості геометричні форми елементів, відсутність достовірної інформації про розподіл пондеромоторних сил у робочому просторі ФМ (для якого характерним є високий рівень неоднорідності), некоректність порівняльного аналізу без приведення до однакових базових характеристик (наприклад, напруженості «фоновому» поля, ефективної магнітної проникності тощо). Тому комплекс проблем, пов'язаних з більш глибоким дослідженням ФМ, залишається одним із актуальних теоретичних і прикладних завдань електротехніки.

Метою роботи є розробка методу розрахунку вилучальної здатності стрижневих ФМ за відсутності жорстких обмежень на їхню концентрацію, геометричні та магнітні властивості елементів, що формують двоякоперіодичне плоскопаралельне магнітне поле. При цьому на основі визначення локального розподілу магнітних сил метод повинен забезпечити можливість порівняльного аналізу різних ФМ у разі комплексного врахування заданих технологічних обмежень, ефективних параметрів як самих ФМ, так і ВГМС в цілому. Очевидно реалізація мети у такій постановці можлива лише в рамках польового підходу з використанням сучасних можливостей і методів обчислювальної техніки.

Базові принципи, постулати і співвідношення під час аналізу ФМ з двоякоперіодичною структурою. *Методи дослідження магнітних полів ФМ ВГМС.* Аналіз магнітних характеристик ВГМС реалізується на основі аналітичних, чисельних та експериментальних методів. Особливості та приклади їхнього застосування мають велику бібліографію, достатньо широко питання висвітлено в [1]. Складність задачі обмежує активність використання чисто аналітичних методів. Разом з тим в останні десятиліття все більшого поширення набувають чисельні методи – диференційні (метод кінцевих різниць – МКР, метод кінцевих елементів – МКЕ) і методи інтегральних рівнянь – МІР, які мають декілька модифікацій. На практиці найбільшого поширення отримав МКЕ, який реалізований у ряді потужних спеціалізованих програмних комплексів. За відомих переваг одним з основних недоліків диференційних методів є необхідність формування граничних умов, що значно обмежує використання цих методів для ФМ зі складною геометрією елементів. Цей недолік відсутній в інтегральних методах, які по суті є чисельно-аналітичними. Причому саме для аналізу періодичних структур з двовимірним полем, які розглядаються в даній роботі, цей метод має безперечні переваги.

За базовий для аналізу ефективних і локальних характеристик магнітного поля ВГМС з фільтрами матричної структури обрано метод векторних інтегральних рівнянь відносно вектору намагніченості \mathbf{J} ферромагнітних елементів матриці. Цей метод частково відображений в публікаціях [5, 6, 16], тому зупинимося лише на його базових особливостях:

- відсутні обмеження на геометрію, концентрацію і магнітні властивості ферромагнітних елементів, що формують градієнтне поле;
- формування інтегрального рівняння відносно фізичного вектору намагніченості \mathbf{J} (на відміну від рівнянь відносно фіктивних вторинних джерел) забезпечує можливість врахування нелінійних і анізотропних властивостей ФМ;
- область невідомих обмежено векторами намагніченості елементів дискретизації лише основного паралелограма періодів – вплив усіх сусідніх елементів автоматично враховується характером ядра інтегрального рівняння;

– під час реалізації метода активно використовуються двоякоперіодичні (еліптичні) функції комплексної змінної, зокрема основні функції цієї теорії – ζ - та \wp -функція Веєрштрасса [17].

Позначимо $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ ($m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), де ω_1 і ω_2 – основні періоди комплексної двоякоперіодичної функції $f(u)$ з періодами ω . Парі комплексних чисел (ω_1, ω_2) відповідає основний паралелограм періодів Ω , площу якого позначимо через F_Ω . Вершинами паралелограма Ω є чотири конгруентні (відповідні) точки, періодичним продовженням яких можна покрити всю комплексну площину E . Існує множина еквівалентних основних паралелограмів Ω_i (рис. 1), площі яких однакові і мінімальні для структур даного типу (їхні приклади наведено на рис. 1).

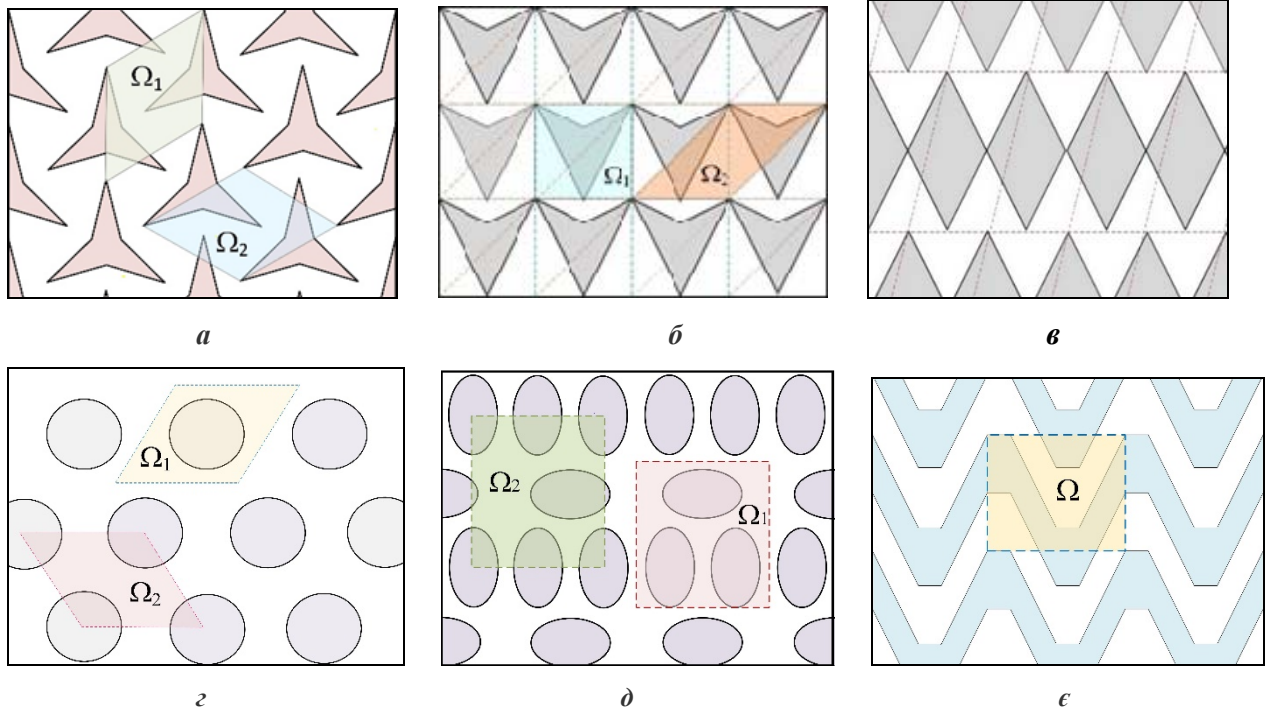


Рис. 1

Важливо відзначити, що у разі лінійного переміщення будь-якого з основних паралелограмів періодів Ω зберігаються всі конгруентні компоненти (або їхні частини) і фізичні параметри, що мають двоякоперіодичний характер, наприклад, вектори магнітного поля і магнітні сили у відповідних точках [19]. Не є принциповим як вибір одного з можливих основних паралелограмів Ω_i , так і його розташування на комплексній площині E . Не обов'язкове і охоплення паралелограмом Ω всіх деталей базової фігури (або комплексу фігур, як на рис. 1, д) – «втрачені» області компенсуються входженням в Ω таких же областей від сусідніх елементів. Ця особливість може бути корисною для більш чіткої візуалізації важливої інформації (наприклад, областей вилучення слабомагнітної фракції в межах одного паралелограма періодів під час практичного визначення локальних та ефективних параметрів ФМ).

Зазначимо також, що у контексті даного методу згадані вище базові функції мають прозорий фізичний сенс – квазіперіодична ζ -функція лежить в основі комплексного потенціалу, а еліптична \wp -функція – напруженості магнітного поля двоякоперіодичної системи диполів з магнітними моментами M [18]; \wp -функція складає також основу ядра інтегрального рівняння, що й забезпечує чисельно-аналітичний характер методу та двоякоперіодичну структуру поля в усій матриці.

Для системи диполів з моментами M , розташованих у точках $\xi \equiv \xi \pmod{(\omega_1, \omega_2)}$, комплексний потенціал та напруженість поля [16]

$$W_M(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \zeta(z - \xi) + C(z - \xi); \quad (1)$$

$$H_M(z) = -\bar{W}'_M(z) = -\frac{\bar{M}}{2\pi} \cdot \bar{\zeta}'(\bar{z} - \bar{\xi}) - \bar{C} = \frac{\bar{M}}{2\pi} \cdot \bar{\wp}'(\bar{z} - \bar{\xi}) - \bar{C}, \quad (2)$$

де риска над комплексним числом означає операцію спряження. Нехай $J(z)$ – розподіл намагніченості, що виникає під дією напруженості поля $H_0(z)$ в області D феромагнітних елементів ФМ, що розташовані в $\Omega: z \in D, D \in \Omega$. Зі спільного розгляду в Ω дії первинних (H_0) і вторинних (намагніченості J всіх магнетиків у комплексній площині E) джерел отримаємо вирази для комплексного потенціалу та напруженості поля [16]

$$W(z) = W_0(z) + W_J(z) = W_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D J(\xi) [\zeta(z - \xi) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z - \xi)] d\tau_\xi + \frac{j}{F_\Omega} \int_D \text{Im} J(\xi) \cdot (z - \xi) d\tau_\xi, \quad (3)$$

$$H(z) = H_0(z) + H_J(z) = H_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D \bar{J}(\xi) \left[\overline{\zeta(z - \xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}} \right] d\tau_\xi - \frac{1}{2} \bar{J}(z) + \frac{j \text{Im} P}{F_\Omega}, \quad (4)$$

де P – повний дипольний момент всіх намагнічених елементів в D .

Введемо в розгляд основний інтегральний оператор методу, який виражається через магнітну індукцію B_J і напруженість H_J намагніченості [18]

$$\begin{aligned} -\overline{P_\omega J} &= \mu_0^{-1} \cdot B_J + H_J = 2H_J + J, \\ P_\omega J &= -\frac{1}{\pi} \int_D J(\xi) \cdot \left[\zeta(z - \xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] d\tau_\xi + \frac{2j \text{Im} P}{F_\Omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

Далі з урахуванням основної концепції МІУ і очевидних співвідношень

$$J = \mu_0^{-1} B - H = (\mu - 1)H; \quad \mu_0^{-1} B + H = (\mu + 1)H = 2H_0 + \mu_0^{-1} B_J + H_J = 2H_0 - \overline{P_\omega J}, \quad (6)$$

де μ – відносна магнітна проникність феромагнітних елементів ФМ, отримаємо інтегральне рівняння відносно вектору намагніченості середовища $J(z), z \in D$

$$J(z) = \lambda(2H_0(z) - \overline{P_\omega J}) = \lambda \left\{ 2H_0(z) + \frac{1}{\pi} \int_D \bar{J}(\xi) \left[\overline{\zeta(z - \xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}} \right] d\tau_\xi + \frac{2j \text{Im} P}{F_\Omega} \right\}, \quad (7)$$

де $\lambda = (\mu - 1)/(\mu + 1)$. Чисельна реалізація цього базового рівняння та його узагальнених варіантів розглянута в ряді публікацій, зокрема в [6, 16].

Фільтр-матриця як базовий елемент ВГМС. Практичне значення має розрахунок як ефективних, так і локальних характеристик магнітного поля ФМ. У першому випадку вирішується завдання гомогенізації (усереднення) гетерогенного середовища (ГС) ФМ та розраховується розподіл магнітного поля в ньому під дією первинної напруженості поля H_0 . Оскільки розміри елементів ФМ можуть на два-три порядки відрізнятись від розмірів самої матриці, магнітне середовище матриці можна розглядати як однорідне (в загальному випадку нелінійне й анізотропне) по відношенню до магнітної системи сепаратора. Слід відзначити, що в теорії ГС задача гомогенізації досліджувалася найбільш активно, починаючи з класичних робіт Максвелла і Релея для канонічних фігур з лінійними властивостями. Активні дослідження в напрямку узагальнення цих класичних результатів фактично не припинялися [18]. Різні аспекти цієї проблеми досліджувалися в Інституті електродинаміки НАН України. Деякі результати цих досліджень викладено в монографії [20]. Можливості врахування нелінійних і анізотропних властивостей упорядкованих гетерогенних структур з довільною геометрією і концентрацією елементів ФМ розглянуто в [5, 6, 16].

Основним результатом задачі гомогенізації ГС є відносна магнітна проникність $\mu_{\text{еф}}$ для ізотропного ГС або відповідний тензор $\mathbf{\mu}_{\text{еф}}$ для анізотропного ГС. Для першого випадку легко знайти загальний вираз для $\mu_{\text{еф}}$. Якщо за напруженості поля H_0^1 позначити через P сумарний магнітний момент всіх елементів основного паралелограма періодів Ω , то з урахуванням збігу напрямів векторів H_0 і P отримаємо універсальний і точний вираз: $\mu_{\text{еф}} = 1 + P/(H_0 \cdot F_\Omega)$.

¹ Незважаючи на тісну аналогію між векторами і комплексними числами тут використано векторні аналоги комплексних функцій, оскільки в операціях з тензорами дії з комплексними числами ускладнені.

Узагальнення на анізотропний випадок розглянуто в [16]. Важливо підкреслити фундаментальну властивість лінійного середовища: вектори магнітної індукції \mathbf{B} , напруженості \mathbf{H} і намагніченості \mathbf{J} у відповідних точках ГС, а також ефективні параметри $\mu_{\text{еф}}$ і $\mu_{\text{еф}}$ не залежать від лінійних розмірів елементів ГС. Це є наслідком двовимірного характеру даної структури і, як буде показано далі, значно узагальнює можливості методу і спрощує розгляд численних варіантів на основі критерію подібності даних обчислювальних експериментів.

Проблема розрахунку ефективних параметрів ФМ безпосередньо не пов'язана з визначенням локального розподілу магнітного поля в робочому просторі сепаратора. Але без врахування цих параметрів порівняльний аналіз матриць різного типу не може бути коректним. На жаль ця обставина не враховується в переважній більшості публікацій.

Щодо розрахунку локальних характеристик поля, то деякі функціональні можливості методу проілюстровані на рис. 2.

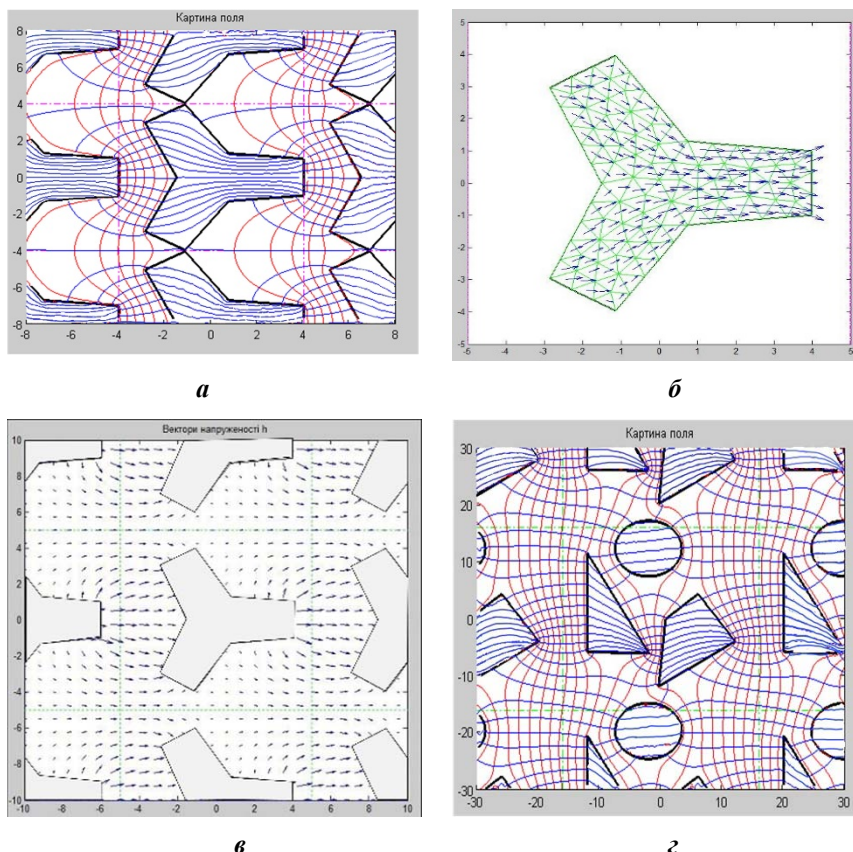


Рис. 2

На рис. 2, а наведено картину поля в двоякоперіодичній матриці з основними періодами $\omega_1 = 8$, $\omega_2 = 8j$ і одним елементом складної геометрії в кожному паралелограмі періодів Ω . Відносна магнітна проникність матеріалу стрижнів $\mu = 10000$, магнітне поле H_0 спрямоване горизонтально. Як видно з рис. 2, а, магнітне поле має виражений двоякоперіодичний характер. Силкові лінії магнітної індукції (синій колір) неперервні, а еквіпотенціали (червоний колір) огинають елементи, кожен з яких за високих значень μ є практично еквіпотенціальним. Рис. 2, б ілюструє дискретизацію елемента і розподіл намагніченості за зовнішньому полі $H_0 = \text{const}$. На рис. 2, в показано розподіл векторів напруженості поля в робочому просторі ФМ (всередині елементів вона практично відсутня). Високий рівень функці-

ональності методу ілюструє рис. 2, г, з якого видно, що число фаз у паралелограмі періодів, їхня форма, концентрація і значення основних періодів не являються обмежувальними факторами. Очевидною також є складність формування граничних умов для основного паралелограма періодів Ω .

Силова характеристика магнітного поля. За базовий для розрахунку магнітної сили, що діє на мале тіло з об'ємом V і магнітним моментом \mathbf{M} в неоднорідному полі \mathbf{B} , прийmemo вираз $\mathbf{F}_m = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}$, який для слабomagнітних частинок за припущення їх однорідної намагніченості \mathbf{J} можна записати в еквівалентній формі: $\mathbf{F}_m = \mu_0 V (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{H}$. Враховуючи, що

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{H}_i = \kappa (\mathbf{H} - N\mathbf{J}) = \kappa \mathbf{H} / (1 + \kappa N),$$

де κ – об'ємна магнітна сприйнятливості матеріалу; \mathbf{H}_i – напруженість поля всередині частки, а N – її розмагнічуваний фактор, отримаємо:

– для сильномагнітних часток ($\kappa \gg 1$)

$$\mathbf{F}_m = \mu_0 V (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \mu_0 V |\mathbf{H}| \text{grad}(|\mathbf{H}|) / N = \mu_0 V \text{grad}(|\mathbf{H}|^2) / 2N;$$

– для слабомагнітних часток ($\kappa \ll 1$)

$$F_m = \mu_0 \kappa V (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \mu_0 \kappa V |\mathbf{H}| \text{grad}(|\mathbf{H}|) = \mu_0 \kappa V \text{grad}(|\mathbf{H}|^2) / 2 = \mu_0 \kappa V f, \quad (8)$$

де через f позначена силова характеристика магнітного поля,

$$f = |\mathbf{H}| \text{grad}(|\mathbf{H}|) = \text{grad}(|\mathbf{H}|^2) / 2, \quad (9)$$

що характеризує здатність ФМ вилучати магнітні мінерали.

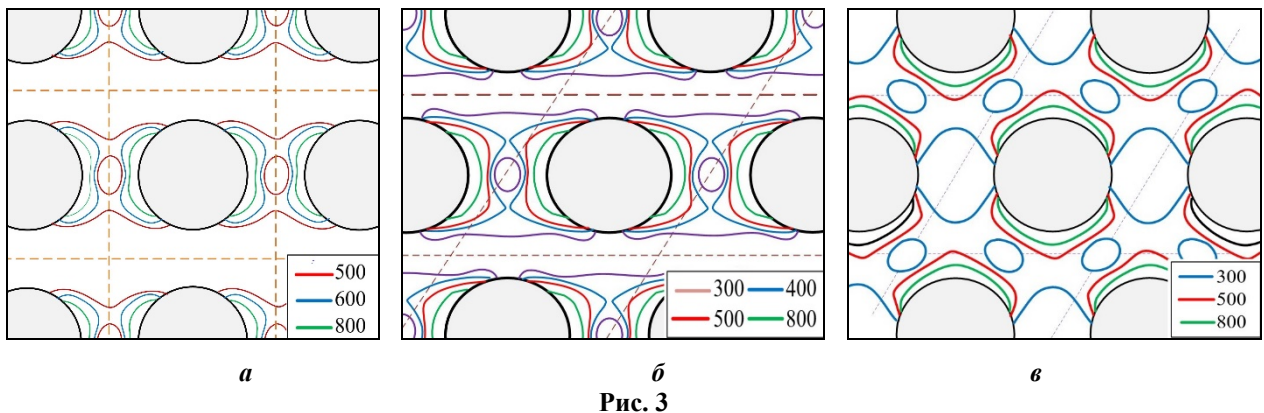
У науково-технічній літературі замість магнітної сприйнятливості κ часто використовують питому магнітну сприйнятливість $\chi = \kappa/\rho$, де ρ – густина матеріалу, кг/м^3 . Тоді вираз (8) приймає еквівалентну форму

$$F_m = \mu_0 \chi m (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \mu_0 \chi m |\mathbf{H}| \text{grad}(|\mathbf{H}|) = \mu_0 \chi m \text{grad}(|\mathbf{H}|^2) / 2 = \mu_0 \chi m f. \quad (10)$$

Задля візуалізації локальних характеристик магнітного поля – напруженості \mathbf{H} і силової магнітної функції f , можна використовувати як відповідні вектори на обраному масиві точок, а також ізолінії $|\mathbf{H}|^2 = \text{const}$ та $f = \text{const}$. Останні будемо називати ізодинами (по аналогії з ізодинамічним магнітним полем). Саме вони мають найбільше значення у контексті оцінки вилучальної здатності ФМ.

Сформулюємо важливий принцип подібності для функції f . Позначимо через f_0 базовий для конкретної ФМ розподіл силового поля і відповідний масив ізодин $f_{0i} = \text{const}$ за $H_0 = 1$ А/м і лінійних розмірах елементів в системі СІ (м). Враховуючи незалежність поля \mathbf{H} від абсолютних розмірів елементів і його пропорційність напруженості H_0 , а також обернену пропорційність $\text{grad}(|\mathbf{H}|)$ лінійним розмірам, отримуємо важливий висновок: під час зміни величини напруженості H_0 і лінійних розмірів елементів ФМ картини векторних полів f_0 і всіх ізодин зберігаються, а змінюються пропорційно лише їхні значення. **Це дає змогу масивом ізодин $f_{0i} = \text{const}$ охопити всі можливі значення зовнішнього поля H_0 та будь-які геометрично подібні матриці.** Наприклад, за одночасного збільшення H_0 до 10 А/м і розмірів елементів у 100 разів збережеться не лише вигляд ізодин функції f_0 , а й їхні значення. Можна трансформувати цей принцип наступним чином: якщо у деякому варіанті змінити напруженість H_0 у r разів, а лінійні розміри у s разів, то значення векторів поля й ізодин зміняться у $k=r^2/s$ разів (коефіцієнти зміни слід визначати як відношення нових параметрів до попередніх).

Задля ілюстрації на рис. 3 наведено результати розрахунку функції f для двох матриць з циліндричними елементами радіуса 6 мм і основними періодами $\omega_1=18$ мм, $\omega_2=18j$ мм – для квадратної матриці (рис. 3, а) та $\omega_1=19.342$ мм, $\omega_2=19.342 \exp(j60^\circ)$ мм – для гексагональної (рис. 3, б, в). Основні періоди варіантів узгоджені з метою забезпечення збігу їхніх площ $F_\Omega = 324 \text{ мм}^2$, як наслідок, збігу коефіцієнтів заповнення Ω циліндричними елементами з $F_{\text{цил}} = 113 \text{ мм}^2$. З'ясувалося, що практично однаковими є й ефективні магнітні проникності цих макроскопічно ізотропних середовищ (за розрахунками $\mu_{\text{еф}} \approx 2.07$). Таке приведення є обов'язковим під час виконання порівняльного аналізу різних матриць. На жаль у більшості робіт з даного напрямку ця вимога не враховується.



На рис. 3 різними кольорами позначено ізодини функції f , значення яких в $\text{А}^2/\text{м}^3$ отримано для напруженості зовнішнього поля $H_0 = 1$ А/м перерахунком f_0 за формулою $f = kf_0 = f_0 \cdot r^2/s = f_0 \cdot 1^2/0.001 = 1000f_0$. Звертає на себе увагу складний і непередбачуваний характер розподілу магнітних

сил навіть у відносно простих за геометричними характеристиками варіантах. Так, у випадку матриці з гексагональною решіткою (рис. 3 б, в) зміна напрямку поля H_0 суттєво впливає на характер функції f . Відзначимо також маловідомий (хоча з логічних міркувань і очікуваний) факт існування періодичних **точок біфуркації** з центрами зон невеликих значень функції f (еліпсоподібні області на рис. 3). Цей факт потребує додаткових досліджень, оскільки його врахування може суттєво вплинути на кількісні оцінки ефективності різних типів матриць.

Результати обчислювальних експериментів. Задля більш чіткого розуміння методики практичного використання наведеного на рис. 3 розподілу магнітних сил наведемо приклад розрахунку пондеромоторної сили, необхідної для вилучення сферичної частинки слабомагнітного матеріалу (гематиту) радіуса $r = 50 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$. За густини $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$ маса її становить $m = 2.62 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$, а сила тяжіння $F_g = mg = 2.57 \cdot 10^{-8} \text{ Н}$. Очевидно для вилучення частки з потоку пульпи необхідно виконати умову $F_m = cF_g$, де технологічний параметр c залежить від ряду факторів – густини і швидкості пульпи, її в'язкості, гідродинамічного опору, способу подачі матеріалу та ін. Для малих часток гідродинамічний опір може значно перевищувати силу тяжіння, тому параметр c може змінюватися в достатньо широкому діапазоні. Важливість детального обґрунтування параметра c очевидна, але це завдання лежить за межами даної роботи. Наприклад, якщо прийняти $c = 30$, то $F_m = 30F_g = 7.7 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$. З урахуванням середнього значення питомої магнітної сприйнятливості гематиту $\chi = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{кг}$ легко визначити граничну магнітну силу вилучення f_{\min}

$$f_{\min} = \frac{F_m}{\mu_0 \chi m} = \frac{7.7 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 2.62 \cdot 10^{-9}} = 4.68 \cdot 10^{13} \text{ А}^2 / \text{м}^3.$$

Цей показник є базовим для вибору та порівняльного аналізу різних матриць. За заданих геометричних розмірів площа, що обмежена, наприклад, ізодиною $f = 800$ (незалежно від типу матриць, зображених на рис. 3), забезпечується за напруженості $H_0 = (f_{\min}/800)^{1/2} = 2.42 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ і відповідно магнітної індукції $B = \mu_0 \mu_{\text{эф}} H_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2.42 \cdot 10^5 = 0.629 \text{ Т}$. Для площі вилучення, обмеженої ізодиною $f = 500$, слід збільшити інтенсивність поля: $H_0 = (f_{\min}/500)^{1/2} = 3.06 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ і $B = 0.796 \text{ Т}$.

Задля оцінки впливу технологічного параметра c наведемо аналогічні показники для $c = 50$. При цьому $F_m = 1.28 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$, $f_{\min} = 7.7 \cdot 10^{13} \text{ А}^2/\text{м}^3$, $H_0 = 3.12 \cdot 10^5 \text{ А/м}$, $B = 0.812 \text{ Т}$ і $H_0 = 3.95 \cdot 10^5 \text{ А/м}$, $B = 1.03 \text{ Т}$ відповідно для ізодин $f = 800 \text{ А}^2/\text{м}^3$ і $f = 500 \text{ А}^2/\text{м}^3$. Гнучкість підбору потенційно можливих зон вилучення немагнітної фракції забезпечується як зміною інтенсивності поля, так і зміною лінійних розмірів елементів матриці і основних періодів без зміни топології силового поля f_0 . Щодо значення напруженості поля H_0 , якому відповідає конкретна ізодина, то більш конструктивним може бути зворотній шлях – від заданого рівня магнітної індукції через ефективну магнітну проникність $\mu_{\text{эф}}$ до напруженості поля H_0 і відповідної ізодини f .

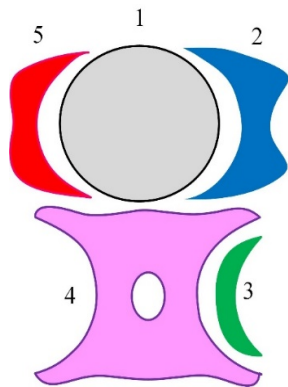


Рис. 4

Кількісна оцінка вилучальної здатності конкретного варіанта матриці забезпечується машинним визначенням площ різних зон, в яких $f > f_{\min}$. На прикладі рис. 3, б такі зони, що обмежені поверхнею циліндра і відповідними ізолініями, наведено на рис. 4 (циліндр l з відомою площею перерізу $F_{\text{цил}} = 113 \text{ мм}^2$ надано для переведення відносних значень в абсолютні). Кольори зон відповідають кольорам ізодин на рис. 3, б. Абсолютні значення площ вилучення в межах одного паралелограма періодів слід розраховувати з урахуванням локального розподілу магнітних сил у відповідності з рис. 3, б. Так, площа фігури 4 обчислюється без врахування еліптичної зони, оскільки центром даної зони є точка біфуркації з нульовим значенням сили. З іншого боку, площі фігур 2, 3 і 5 необхідно подвоїти, оскільки вони попарно розташовані симетрично відносно циліндра.

Абсолютні значення площ потенційних зон вилучення, що відповідають заданим на рис. 3, б ізодинам, а також їхні відношення до площі паралелограма періодів $F_{\Omega} = 324 \text{ мм}^2$ і площі робочого простору $F_{\text{роб}} = F_{\Omega} - F_{\text{цил}} = 324 - 113 = 211 \text{ мм}^2$, наведено в таблиці. Там же розміщені аналогічні дані для рис. 3, а і 3, в. Спільними для всіх варіантів є значення ізодин $f = 500 \text{ А}^2/\text{м}^3$ (червоний колір) і $f = 800 \text{ А}^2/\text{м}^3$ (зелений колір), тому проведемо порівняльний аналіз на прикладі даної пари. З порівняння рис. 3, б і 3, в безпосередньо видно, що зміна напрямку поля H_0 суттєво впливає на геометрію відповідних зон вилучення. Але як видно з таблиці, в межах допустимої похибки площі відповідних

зон практично однакові: 53.8 мм² та 54.2 мм² для $f=500$ А²/м³ і 23.2 мм² та 24.1 мм² для $f=800$ А²/м³. Цей факт свідчить, що ізотропія магнітних властивостей поширюється й на вилучальну здатність

Рис.	f , А ² /м ³	$F_{\text{вил}}$, мм ²	$F_{\text{вил}}/F_{\text{роб}}$, %	$F_{\text{вил}}/F_{\Omega}$, %
3, а	500	72.36	34.3	22.3
	600	42.12	20.0	13.0
	800	16.2	7.7	5.0
3, б	300	125.7	59.6	38.8
	400	78.6	37.3	24.2
	500	53.8	25.5	16.6
	800	23.2	11.0	7.2
3, в	300	121.3	57.5	37.4
	500	54.2	25.7	16.7
	800	24.1	6.0	7.4

$f > f_{\text{min}}$, є очевидними, як у прикладі, розглянутому вище. Певні ускладнення можуть бути пов'язані з багатозв'язним характером області S_+ , а також зі складною формою її межі (як на рис. 5 для $f=300$ А²/м³). Остання ділить робочу зону паралелограма періодів $F_{\text{роб}} = F_{\Omega} - F_{\text{цпл}}$ на дві частини, в яких $f \geq f_{\text{min}}$ або $f < f_{\text{min}}$. Тому задля визначення площі S_+ можна скористатися одним із способів – або безпосереднім шляхом побудови граничної лінії даної області і обчислення її площі, або за очевидною формулою: $S_+ = F_{\text{роб}} - S_-$, де S_- – сумарна площа всіх областей в межах Ω , де виконується умова $f < f_{\text{min}}$. Очевидно в даному випадку більш зручно скористатися другим способом, причому $S_- = S_1 + 2S_2$ і

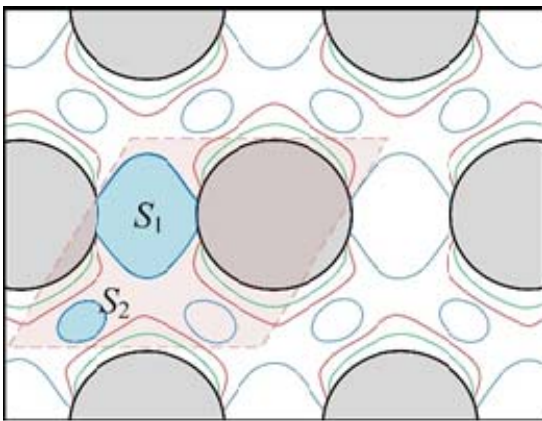


Рис. 5

матриць за різних напрямків поля. Відзначимо, що наведені показники не поширюються на квадратну решітку (таблиця, рис. 3, а). Так, для $f=500$ А²/м³ $F_{\text{вил}} = 72.36 > 53.8$ мм², а для $f=800$ А²/м³ $F_{\text{вил}} = 16.2 < 23.2$ мм², тобто за однакової форми, розмірів і концентрації елементів матриці їхнє розташування може суттєво впливати на показники вилучення. Ця теза ставить під сумнів поширену думку про існування оптимальної форми елементів матричної структури: це питання можна розглядати лише у контексті врахування інших факторів впливу.

За практичного використання метода не завжди потенційні зони вилучення S_+ областей, у всіх точках яких $f > f_{\text{min}}$, є очевидними, як у прикладі, розглянутому вище. Певні ускладнення можуть бути пов'язані з багатозв'язним характером області S_+ , а також зі складною формою її межі (як на рис. 5 для $f=300$ А²/м³). Остання ділить робочу зону паралелограма періодів $F_{\text{роб}} = F_{\Omega} - F_{\text{цпл}}$ на дві частини, в яких $f \geq f_{\text{min}}$ або $f < f_{\text{min}}$. Тому задля визначення площі S_+ можна скористатися одним із способів – або безпосереднім шляхом побудови граничної лінії даної області і обчислення її площі, або за очевидною формулою: $S_+ = F_{\text{роб}} - S_-$, де S_- – сумарна площа всіх областей в межах Ω , де виконується умова $f < f_{\text{min}}$. Очевидно в даному випадку більш зручно скористатися другим способом, причому $S_- = S_1 + 2S_2$ і $S_+ = F_{\text{роб}} - S_1 - 2S_2$. Оскільки, як було показано вище, за лінійного переміщення шаблону паралелограма Ω вся інформація в ньому залишається незмінною, остання формула є очевидною.

Висновки.

1. Запропонований метод аналізу магнітних характеристик матричних фільтрів високоградієнтних магнітних сепараторів, заснований на інтегральному рівнянні відносно векторів намагніченості феромагнітних елементів матриці, значно розширює можливості традиційних диференціальних методів за рахунок локалізації розрахункової області основним паралелограмом матричної структури, відсутності проблеми граничних умов та обмежень на геометрію і концентрацію елементів матриці.

2. За припущення двоякоперіодичності структури

матриці ефективним є використання апарату еліптичних функцій, що забезпечує чисельно-аналітичну форму метода і високий рівень його функціональності.

3. У рамках лінійної постановки сформульовано універсальні критерії подібності для векторів магнітного поля, ефективних і локальних характеристик матриці. На основі цих критеріїв обґрунтована можливість поширення інформації щодо локального розподілу магнітних сил в одному з базових варіантів на всі геометрично подібні матриці з довільними значеннями напруженості поля (магнітної індукції) сепаратора та заданого за технологічними обмеженнями мінімального рівня магнітної сили.

4. Встановлено маловідомий факт існування в матричних фільтрах періодичних точок біфуркації, які є центрами зон з малими рівнями магнітних сил.

5. На основі обчислювальних експериментів підтверджено складний характер розподілу магнітних сил в матриці і високий рівень їхньої неоднорідності. Отримання надійної інформації щодо потенційних зон вилучення в робочому просторі матриці є основною передумовою порівняльного аналізу матриць з елементами довільної форми під час оптимізації параметрів високоградієнтних сепараторів.

1. Загирняк М.В., Бранспиз Ю.А., Шведчикова И.А. Магнитные сепараторы. Проблемы проектирования. Киев: Техніка, 2011. 224 с.

2. Oder R. High gradient magnetic separation theory and applications. *IEEE Transactions on Magnetism*. 1976. Vol. 12. Issue 5. Pp. 428–435. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMAG.1976.1059076>.

3. Svoboda J. Magnetic Techniques for the Treatment of Materials. Kluwer Academic Publishers, 2004. 642 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/1989/18456>.
4. Wei G.M., Ren W.C., Yuan Y.X. Study on magnetic field characteristics and process parameters of tooth-plate type magnetic matrix. *Metal Mine*. 1985. Pp. 32–37.
5. Толмачев С.Т., Рожненко Ж.Г. Комплексное решение задачи магнитостатики в системе с упорядоченной гетерогенной средой. *Вестник Национального технического университета «ХПИ»*. 2008. № 40. С. 139–145.
6. Толмачев С.Т., Бондаревский С.Л. Математическое моделирование высокоинтенсивного силового поля магнитных сепараторов. *Вісник Криворізького технічного університету. Збірник наукових праць*. 2011. Вип. 29. С. 228–233.
7. Ren L., Zeng S., Zhang Y. Magnetic field characteristics analysis of a single assembled magnetic medium using ANSYS software. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2015. Vol. 25. No 3. Pp. 479–487. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2015.03.024>.
8. Shvedchykova I., Romanchenko J., Nikitchenko I. Comparative analysis of inhomogeneity degree of magnetic field of polygradient magnetic separators for purification of bulk materials. International Conference on *Modern Electrical and Energy Systems (MEES-2017)*, Kremenchuk, Ukraine, 15–17 November 2017. DOI: <https://doi.org/10.1109/mees.2017.824887>.
9. Gerlici J., Шведчикова І.О., Романченко Ю.А., Нікітченко І.В. Визначення раціональних геометричних параметрів пластинчастих елементів магнітної матриці поліградієнтного сепаратора. *Електротехніка і електромеханіка*. 2018. № 4. С. 58–62. DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2018.4.10>.
10. Song C.C., Ning G.H., Yuan Z.Y., Jing L.X., Hui C.C., Yao M.S. Investigation of the influence of different matrix rotation angles on the surrounding magnetic field in a uniform magnetic field. *Ming Metall Eng*. 2014. No 34. Pp. 290–294.
11. Ge W., Encinas A., Araujo E., Song Sh. Magnetic matrices used in high gradient magnetic separation (HGMS): A review. *Results in Physics*. 2017. Vol. 7. Pp. 4278–4286. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.10.055>.
12. Hou L.S., Geng L. A kind of high gradient magnetic matrix for high-intensity magnetic separator. Patent CN. 2012.
13. Zheng X., Wang Y., Lu D. Particle capture of elliptic cross-section matrices for parallel stream high gradient magnetic separation. *Compel*. 2016. Vol. 35. Pp. 187–199.
14. Zheng X., Wang Y., Lu D., Li X. Study on the application of elliptic cross-section matrices for axial high gradient magnetic separation: key considerations for optimization. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*. 2019. Vol. 55(3). Pp. 655–666. DOI: <https://doi.org/10.5277/ppmp18178>.
15. Ding L., Chen L.Z., Zeng J.W. Investigation of combination of variable diameter rod elements in rod matrix on high gradient magnetic separation performance. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1030–1032. Pp. 1193–1196. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.1030-1032.1193>.
16. Толмачев С. Т., Бондаревский С. Л., Ильченко А.В. Магнитные свойства многокомпонентных гетерогенных сред с двоякопериодической структурой. *Електротехніка та електромеханіка*. 2020. № 1. С. 29–38. DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2020.1.05>.
17. Hurwitz A., Courant R. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. J. Springer, 1922. 399 p.
18. Толмачев С.Т. Специальные методы решения задач магнитостатики. Киев: Вища школа, 1983. 166 с.
19. Толмачев С.Т., Бондаревский С.Л. Классификация гетерогенных структур и условие их двоякопериодичности. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2013. № 5 (65). С. 24–29.
20. Емец Ю.П. Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наукова думка, 1986. 191 с.

MATHEMATICAL MODELING OF THE MAGNETIC FIELD OF HIGH-GRADIENT MAGNETIC SEPARATORS WITH A DOUBLE-PERIODIC MATRIX STRUCTURE

S.T. Tolmachev, O.V. Pchenko

Kyryvi Rih National University of Ukraine,

Vitaliy Matusevich Str., 11, Kryvyi Rih, 50027, Ukraine. Email: stan.tolm@gmail.com.

A detailed justification of the method of calculating local and effective characteristics of magnetic filters of the matrix structure of high-gradient magnetic separators is given. It is shown that under the assumption of a doubly-periodic structure of the matrix and the plane-parallel character of the field, it allows to significantly expand the possibilities of existing methods due to the absence of significant restrictions on the geometric and physical parameters of the ferromagnetic elements of the matrix and their concentration. The method is based on the integral equation relative to the magnetization vector of the elements of the main parallelogram of periods. The doubly-periodic nature of the solution is automatically provided by the construction of the integral operator kernel, and unlike differential methods, there is no need to set boundary conditions. Within the framework of the linear formulation, clear criteria of similarity are formulated for the effective and local characteristics of the field, in particular for isolines of magnetic forces. The functional possibilities of the method are illustrated by the results of computational experiments on the examples of matrices with

different geometric characteristics of the elements. According to the results of computational experiments, the complex and unpredictable distribution of magnetic forces even in matrixes of elements of simple geometry is illustrated. In particular, the calculations confirmed the hypothetical assumption regarding the existence of periodic bifurcation points in which there are no magnetic forces. These points are the centers of zones with negligible magnetic forces, which should be taken into account when calculating the extraction capacity of the matrix. Specific examples illustrate the method of determining the potential zone of extraction of weakly magnetic materials, in which the values of magnetic forces exceed their minimum permissible level, taking into account technological limitations. References 20, figures 5, table 1.

Keywords: high-gradient separation, matrix filters, doubly-periodic structure, effective and local characteristics, comparative analysis, similarity criteria.

1. Zagirnyak M.V., Branspiz Yu.A., Shvedchikova I.A. Magnetic separators. Problems of designing. Kiev: Tekhnika, 2011. 224 p. (Rus).

2. Oder R. High gradient magnetic separation theory and applications. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1976. Vol. 12. Issue 5. Pp. 428–435. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMAG.1976.1059076>.

3. Svoboda J. Magnetic Techniques for the Treatment of Materials. Kluwer Academic Publishers, 2004. 642 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/1989/18456>.

4. Wei G.M., Ren W.C., Yuan Y.X. Study on magnetic field characteristics and process parameters of tooth-plate type magnetic matrix. *Metal Mine*, 1985. Pp. 32–37.

5. Tolmachev S.T., Rozhnenko Zh.G. Comprehensive Solution of Magnetostatics Problem in a System with Ordered Heterogeneous Medium. *Vestnik Natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta Kharkovskii politekhnicheskii snstitut*. 2008. No 40. Pp. 139–145. (Rus).

6. Tolmachev S.T., Bondarevskii S.L. Mathematical Modeling of High-Intensity Force Field of Magnetic Separators. *Visnyk Kryvirizskoho tekhnichoho universitetu. Zbirnyk naukovykh prats*. 2011. Vyp. 29. Pp. 228–233. (Rus).

7. Ren L., Zeng S., Zhang Y. Magnetic field characteristics analysis of a single assembled magnetic medium using ANSYS software. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2015. Vol. 25. No 3. Pp. 479–487. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2015.03.024>.

8. Shvedchykova I., Romanchenko J., Nikitchenko I. Comparative analysis of inhomogeneity degree of magnetic field of polygradient magnetic separators for purification of bulk materials. International Conference on *Modern Electrical and Energy Systems (MEES-2017)*, Kremenchuk, Ukraine, 15–17 November 2017. DOI: <https://doi.org/10.1109/mees.2017.824887>.

9. Gerlici J., Shvedchikova I.O., Romanchenko Yu.A., Nikitchenko I.V. Determination of Rational Geometric Parameters of Plate Elements of the Magnetic Matrix of a Polygradient Separator. *Elektrotehnika I elektromekhanika*. 2018. No 4. Pp. 58–62. (Ukr) DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2018.4.10>.

10. Song C.C., Ning G.H., Yuan Z.Y., Jing L.X., Hui C.C., Yao M.S. Investigation of the influence of different matrix rotation angles on the surrounding magnetic field in a uniform magnetic field. *Ming Metall Eng*. 2014. No 34. Pp. 290–294.

11. Ge W., Encinas A., Araujo E., Song Sh. Magnetic matrices used in high gradient magnetic separation (HGMS): A review. *Results in Physics*. 2017. Vol. 7. Pp. 4278–4286. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.10.055>.

12. Hou L. S., Geng L. A kind of high gradient magnetic matrix for high-intensity magnetic separator. Patent CN. 2012.

13. Zheng X., Wang Y., Lu D. Particle capture of elliptic cross-section matrices for parallel stream high gradient magnetic separation. *Compel*. 2016. Vol. 35. Pp. 187–199.

14. Zheng X., Wang Y., Lu D., Li X. Study on the application of elliptic cross-section matrices for axial high gradient magnetic separation: key considerations for optimization. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*. 2019. Vol. 55(3). Pp. 655–666. DOI: <https://doi.org/10.5277/ppmp18178>.

15. Ding L., Chen L.Z., Zeng J.W. Investigation of combination of variable diameter rod elements in rod matrix on high gradient magnetic separation performance. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1030–1032. Pp. 1193–1196. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.1030-1032.1193>.

16. Tolmachev S.T., Bondarevsky S.L., Ilchenko A.V. Magnetic Properties of Multicomponent Heterogeneous Media with Bipolar Periodic Structure. *Elektrotehnika I elektromekhanika*. 2020. No 1. Pp. 29–38. DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2020.1.05>. (Rus).

17. Hurwitz A., Courant R. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. J. Springer, 1922. 399 p.

18. Tolmachev S.T. Special Methods for Solving Magnetostatics Problems. Kiev: Vysshiaia shkola, 1983. 166 p. (Rus).

19. Tolmachev S.T., Bondarevskii S.L. Classification of Heterogeneous Structures and the Condition of Their Bipolar Periodicity. *Vostochno-evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii*. 2013. No 5 (65). Pp. 24–29. (Rus).

20. Emets Yu.P. Electrical Characteristics of Composite Materials with Regular Structure. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 191 p. (Rus).

Надійшла 07.08.24