

**МОДИФІКОВАНА ДВОПОЛЮСНА ЗАСТУПНА СХЕМА, ЕКВІВАЛЕНТНА
ЛІНІЙНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛУ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ
ЗА КОМПЛЕКСНОЮ ПОТУЖНІСТЮ, ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ВИМІРЮВАННЯ
ЙОГО ЕНЕРГЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

М.Ю. Артеменко^{1*}, докт.техн.наук, **Ю.В. Кутафін**^{2**}, докт.філос., **В.В. Чопик**^{3***}, канд.техн.наук,
В.М. Михальський^{3****}, докт.техн.наук, **І.А. Шаповал**^{3*****}, докт.техн.наук,
С.Й. Поліщук^{3*****}, канд.техн.наук

¹ Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», пр. Берестейський, 37, Київ, 03056, Україна,

² Академія праці, соціальних відносин і туризму, вул. Кільцева дорога, 3-А, Київ, 03187, Україна,

³ Інститут електродинаміки НАН України, пр. Берестейський, 56, Київ, 03057, Україна.

E-mail: artemenko_m_ju@ukr.net.

Запропоновано модифіковану структуру двополюсної заступної схеми лінійних електричних кіл синусоїдного струму, що відтворює комплексну потужність первинного кола та допускає моделювання в часовій області розповсюдженими комп'ютерними програмами. Введено фактор енергетичної корекції, що кількісно характеризує зменшення реального ККД первинного кола за максимальної потужності навантаження порівняно з граничним значенням у 50% для класичного схемного еквівалента Тевенена. Показано взаємно однозначний зв'язок цього фактора з максимально досяжним ККД первинного кола, що може перевищувати 50% за оптимального навантаження. З використанням параметрів запропонованої двополюсної заступної схеми отримано аналітичні співвідношення для розрахунку параметрів оптимального навантаження. Достовірність теоретичних результатів підтверджено комп'ютерним моделюванням в середовищі Multisim на прикладі лінійної моделі трансформатора, що продемонструвало повний збіг оптимізованих енергетичних характеристик первинного кола синусоїдного струму та його двополюсної заступної схеми. Бібл. 16, рис. 8.

Ключові слова: двополюсна заступна схема; комплексна потужність; схемний еквівалент Тевенена; коефіцієнт корисної дії; оптимальне навантаження; кола синусоїдного струму.

Вступ. Теорема Тевенена [1] про еквівалентне джерело (генератор) та запропонована ним двополюсна заступна схема (ДЗС) первинного кола започаткували фундаментальний розділ теорії лінійних електричних кіл [2–5], що включає метод еквівалентного генератора, та положення про граничне значення коефіцієнта корисної дії (ККД) у 50% довільного кола за максимальної потужності навантаження. Метод еквівалентного генератора, спочатку застосовуваний в колах постійного струму, а після запровадження Штейнмецем символічного методу розрахунку [6] і в колах синусоїдного струму, ґрунтується на відтворенні на виділених затискачах ДЗС Тевенена вольт-амперної характеристики первинного кола (комплексної у випадку кола синусоїдного струму) за довільного лінійного навантаження. Це дає змогу спростити розрахунок струму довільної вітки первинного електричного кола, представивши її навантаженням відповідної ДЗС Тевенена.

Однак, як відзначалося в [7–9], ДЗС Тевенена не еквівалентна первинному колу за потужністю, оскільки в режимі розриву виділеної пари полюсів його ККД прямує до 100% [3], в той час як в первинному колі він нульовий через наявність внутрішніх втрат. Саме тому І. Барбі в [7] розширив трактування принципу еквівалентного джерела, висунувши додаткову вимогу до ДЗС забезпечувати еквівалентність потужності первинного кола за довільного струму навантаження. В цій

© Артеменко М.Ю., Кутафін Ю.В., Чопик В.В., Михальський В.М., Шаповал І.А., Поліщук С.Й., 2026

ORCID: * <https://orcid.org/0000-0001-9341-9238>; ** <https://orcid.org/0000-0002-8156-1277>;

*** <https://orcid.org/0000-0002-5046-5223>; **** <https://orcid.org/0000-0002-8251-3111>;

***** <https://orcid.org/0000-0002-9107-5061>; ***** <https://orcid.org/0000-0002-6978-2747>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026



Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>

же роботі він запропонував ДЗС кіл постійного струму, складених з незалежних ідеальних джерел напруги та резисторів, що відтворює лінійну ват-амперну характеристику таких кіл. В подальших роботах була розвинута схемотехніка ДЗС з відтворенням потужності кіл постійного струму, що містять незалежні джерела струму [10–12] та залежні джерела напруги, керовані струмами [8], і внаслідок цього відрізняються функціональною залежністю ват-амперної характеристики. Питання максимізації ККД кіл постійного струму шляхом налаштування опору навантаження енергетично еквівалентних ДЗС розглядалися в [8–10], причому в [9] для моделей кіл, представлених чотириполосниками та однорідними довгими лініями.

Разом з тим енергетична ефективність електричних кіл саме синусоїдного струму є однією з ключових проблем теорії та практики електроенергетики, і ДЗС таких кіл мають адекватно відтворювати їх активну та реактивну потужності за довільного лінійного навантаження. Варіанти ДЗС з такими властивостями для первинних кіл, що складаються з незалежних джерел синусоїдної напруги однакової частоти та активних і реактивних опорів, представлені у нещодавно опублікованих роботах [13] та [14]. Структура ДЗС, обґрунтована в [13], відтворює активну та реактивну потужності первинного кола специфічної структури, що фігурує в теоремі Хоаши-Міллмана [15, 16] у вигляді довільної кількості паралельно з'єднаних віток. Елементами цих віток, окрім джерел напруги, мають бути, згідно [13], виключно активні або виключно реактивні опори. В [14] запропонована структура ДЗС, еквівалентної за комплексною потужністю первинному колу довільної структури з активно-індуктивними опорами віток, та створена аналітична методика розрахунку комплексних параметрів цієї ДЗС. Цим самим створений потужний інструмент дослідження енергетичних властивостей електричних кіл синусоїдного струму широкої номенклатури за спрощеною двополюсною моделлю. Однак структура запропонованої ДЗС [14] містить залежне джерело струму з комплексним коефіцієнтом передачі, що ускладнює її моделювання в часовій області розповсюдженими комп'ютерними програмами задля безпосереднього вимірювання енергетичних характеристик, еквівалентних первинному колу.

Мета роботи полягає у розробленні методики оптимізації енергетичних характеристик лінійних електричних кіл синусоїдного струму шляхом максимізації їхніх ККД через налаштування параметрів навантаження модифікованої ДЗС, що еквівалентна первинному колу за комплексною потужністю та допускає моделювання в часовій області.

Двополюсні заступні схеми, еквівалентні лінійним колам синусоїдного струму за комплексною потужністю, та визначення їхніх параметрів. В [14] уведена макромодель первинного кола синусоїдного струму з зазначеним складом елементів відносно виділених затискачів a, b у вигляді наступної системи комплексних ZE -параметрів: $\dot{E}_{00}, \bar{z}_{00}$ – контурна ЕРС та власний опір зовнішнього контуру, в який увімкнене навантаження; $\mathbf{e}, \mathbf{z}, \mathbf{Z}$ – відповідно, вектор комплексних ЕРС внутрішніх контурів, вектор взаємних комплексних опорів між внутрішніми та зовнішнім контурами, симетрична квадратна матриця комплексних опорів внутрішніх контурів. Також встановлено, що комплексна потужність \tilde{S} первинного кола лінійно залежить від комплексного струму навантаження \dot{I}_0 :

$$\tilde{S} = \tilde{S}_p + \dot{E}_+ \dot{I}_0^*, \quad (1)$$

де $\tilde{S}_p = \mathbf{e}^T (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e})^*$ – комплексна потужність в режимі розриву вихідних затискачів, коли $\dot{I}_0 = 0$; $^*, ^T$ – знаки комплексного спряження та транспонування; $\dot{E}_+ = \dot{E}_{00} - \mathbf{e}^T (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{z})^*$ – комплексне діюче значення еквівалентної ЕРС, що в загальному випадку відрізняється від ЕРС $\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{00} - \mathbf{z}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}$ незалежного джерела напруги комплексної ДЗС Тевенена.

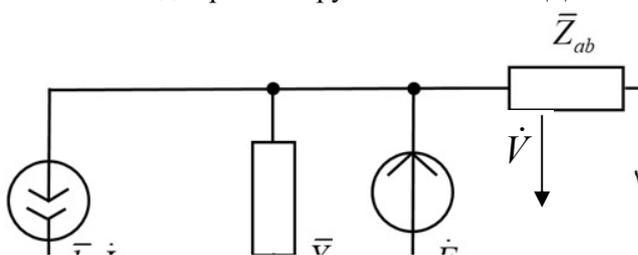


Рис. 1. Комплексна ДЗС, еквівалентна первинному колу за комплексною потужністю

Комплексний опір ДЗС Тевенена $\bar{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = \bar{z}_{00} - \mathbf{z}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{z}$ разом з ЕРС \dot{E}_{ab} є фрагментом запропонованої в [14] комплексної ДЗС (рис. 1), що забезпечує відтворення комплексної зовнішньої вольт-амперної характеристики первинного кола відповідно до класичної теореми про еквівалентний генератор в комплексній області

[2–5]. На цій схемі \dot{V} – комплексне діюче значення вихідної напруги за довільного лінійного навантаження, що представлено комплексним опором \bar{Z}_H .

Задля забезпечення енергетичної еквівалентності ДЗС (рис. 1) первинному колу шляхом відтворення його комплексної потужності за довільного струму навантаження елементи $\dot{E}_{ab}, \bar{Z}_{ab}$ ДЗС Тевенена мають бути доповнені такими структурними елементами [14].

1) Паралельно єдиному незалежному джерелу \dot{E}_{ab} вмикають активно-реактивний опір, що забезпечує комплексну потужність в режимі розриву затискачів a, b (аналогічно І. Барбі розташував додатковий резистор у запропонованому ним ДЗС кола постійного струму в [7] та чисто активний чи чисто реактивний опір в ДЗС кола синусоїдного струму в [13]), комплексна провідність якого

$$\bar{Y}_B = \tilde{S}_P^* / E_{ab}^2 = (\mathbf{e}^T)^* \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e} / E_{ab}^2. \quad (2)$$

2) Для компенсації різниці комплексних ЕРС

$$\dot{E}_\Delta = \dot{E}_+ - \dot{E}_{ab} = \mathbf{e}^T [(\mathbf{Z}^{-1})^T \mathbf{z} - (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{z})^*] = 2j \mathbf{e}^T \text{Im}(\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{z}) \quad (3)$$

в [14] запропоновано увести залежне джерело струму, кероване струмом навантаження \dot{I}_0 з зазначеною на рис. 1 схемою увімкнення та комплексним коефіцієнтом передачі \bar{k}_J , що задовольняє умову

$$\bar{k}_J^* = \dot{E}_\Delta / \dot{E}_{ab} = \dot{E}_+ / \dot{E}_{ab} - 1. \quad (4)$$

Саме за таких структурних доповнень комплексної ДЗС Тевенена та визначення комплексного коефіцієнта передачі залежного джерела за співвідношенням (4) комплексна потужність запропонованої ДЗС

$$\tilde{S}_{ДЗС} = \dot{E}_{ab} \dot{I}_0^* + \dot{E}_{ab} (\dot{E}_{ab} \bar{Y}_B)^* + \dot{E}_{ab} (\bar{k}_J \dot{I}_0)^* = \dot{E}_{ab} \dot{I}_0^* + \tilde{S}_P + (\dot{E}_+ - \dot{E}_{ab}) \dot{I}_0^* = \tilde{S}_P + \dot{E}_+ \dot{I}_0^* \quad (5)$$

повністю відповідає рівнянню (1) первинного кола за довільного лінійного навантаження.

Відзначимо, що $\dot{E}_\Delta = 0$, якщо матриця та вектор \mathbf{Z}, \mathbf{z} в (3) складається виключно з дійсних чисел, що відповідають резисторам, або складається виключно з уявних чисел, яким відповідають реактивні опори. Саме тому ДЗС первинного кола роботи [13] з достатньо жорсткими структурними та параметричними обмеженнями не потребує залежного джерела струму, керованого струмом навантаження.

Недолік ДЗС на рис. 1 полягає в тому, що вона є комплексною еквівалентною схемою первинного лінійного активного електричного кола синусоїдного струму, яку застосовують задля спрощення розрахунків в комплексному методі аналізу таких кіл шляхом оперування з комплексними числами [2–5]. І, якщо комплексним опорам віток електричного кола синусоїдного струму та напругам джерел є відповідники у вигляді фізичних елементів та їх комп'ютерних моделей, то модель залежного джерела струму з комплексним коефіцієнтом передачі відсутня у розповсюджених програмах комп'ютерної симуляції електричних кіл. Це не дає можливості моделювати зазначену ДЗС в часовій області задля безпосереднього вимірювання таких її енергетичних характеристик, еквівалентних первинному колу, як активна й реактивна потужності, коефіцієнт потужності, тощо.

Внесемо структурні зміни в заступну схему на рис. 1, забезпечивши реалізацію комплексного коефіцієнта передачі струму, що задовольняє (4), залежними джерелами з дійсними значеннями коефіцієнтів передачі. Множенню на $j = e^{j\pi/2}$ уявної частини комплексного коефіцієнта передачі в часовій області відповідає фазовий зсув відповідного синусоїдного коливання на 90 електричних градусів. Саме таким є фазовий зсув між напругами активної та реактивної частин комплексного опору \bar{Z}_{ab} , через який протікає комплексний струм навантаження \dot{I}_0 . Тому, замінивши залежне джерело струму, кероване струмом в схемі на рис.1 парою залежних джерел струму, керованих напругами активно-реактивного опору \bar{Z}_{ab} , як показано на рис. 2, досягнемо поставленої мети належним вибором дійсних величин коефіцієнтів передачі G_1 та G_2 .

Сумарний комплексний струм залежних джерел струму, керованих напругами

$$\dot{I}_\Sigma = G_1 \dot{V}_R + G_2 \dot{V}_X = G_1 R_{ab} \dot{I}_0 + G_2 j X_{ab} \dot{I}_0 = (G_1 R_{ab} + j G_2 X_{ab}) \dot{I}_0, \quad (6)$$

де $\dot{V}_R = R_{ab}\dot{I}_0$, $\dot{V}_X = jX_{ab}\dot{I}_0$ – комплексні діючі значення напруг, відповідно, активної та реактивної частин комплексного опору \bar{Z}_{ab} .

З (6) випливає, що спільна дія залежних джерел струму, керованих зазначеними напругами, забезпечує еквівалентний комплексний коефіцієнт передачі за струмом $\bar{k}_J = k_R + jk_I = \dot{I}_\Sigma / \dot{I}_0 = G_1 R_{ab} + jG_2 X_{ab}$,

(7)

за відомої величини якого визначають дійсні значення коефіцієнтів передачі

$$G_1 = k_R / R_{ab}; G_2 = k_I / X_{ab}. \quad (8)$$

При цьому від’ємна величина кожного з коефіцієнтів передачі G_1 та G_2 відповідає зменшенню споживаного струму незалежним джерелом напруги, задля реалізації чого залежне та незалежне джерела мають з’єднувати з однаковою полярністю, а за додатної величини зазначеного коефіцієнта необхідно встановити різну полярність з’єднання цих джерел.

Застосування параметрів двополюсної заступної схеми, еквівалентної за комплексною потужністю, для енергетичної оптимізації кіл синусоїдного струму. Як відомо [2–5], енергетична оптимізація кіл синусоїдного струму за ДЗС Тевенена полягає у виборі комплексного опору навантаження за умови $\bar{Z}_{HM} = \bar{Z}_{ab}^*$, що забезпечує максимальну активну потужність навантаження $P_{HM} = E_{ab}^2 / 4R_{ab}$ та величину струму навантаження $\dot{I}_{HM} = \dot{E}_{ab} / 2R_{ab}$. Величина ККД у ДЗС Тевенена з таким навантаженням складає 50%. Однак розрахунок цієї величини в зазначених підручниках з теорії електричних кіл ігнорує наявність активної потужності втрат первинного кола синусоїдного струму в режимі розриву вихідних затисків та відмінність комплексних ЕРС за формулою (3), що спотворює лінійну залежність (1) комплексної потужності первинного кола від комплексного струму навантаження. Внаслідок цього величину у 50% слід розглядати як верхню границю ККД первинного кола синусоїдного струму за навантаження, оптимізованого за параметрами ДЗС Тевенена.

Врахування зазначених ефектів в параметрах запропонованих комплексних ДЗС, еквівалентних первинному колу за комплексною потужністю, дає змогу отримати точне значення ККД первинного кола за максимальної потужності навантаження. Підставивши відповідне комплексно спряжене значення струму навантаження в реальну частину (1), отримаємо вираз для активної потужності первинного кола за максимальної активної потужності навантаження

$$P_M = \text{Re}(\tilde{S}_P + \dot{E}_+ \dot{I}_{HM}^*) = E_{ab}^2 G_P + \text{Re}\left[\frac{(\bar{k}_J^* + 1)\dot{E}_{ab} E_{ab}^*}{2R_{ab}}\right] = E_{ab}^2 \left(G_P + \frac{k_R + 1}{2R_{ab}}\right), \quad (9)$$

де $G_P = \text{Re}(\bar{Y}_B)$.

Значення (9) використаємо задля отримання точної величини ККД первинного кола за максимальної потужності навантаження

$$\eta_M = \eta(P_{HM}) = \frac{P_{HM}}{P_M} = \frac{1}{4R_{ab}[G_P + (k_R + 1)/2R_{ab}]} = \frac{0,5}{2R_{ab}G_P + k_R + 1} = \frac{0,5}{\xi}, \quad (10)$$

де величина $\xi = 2R_{ab}G_P + k_R + 1$, показує у скільки разів точне значення ККД первинного кола синусоїдного струму за максимальної активної потужності навантаження менше за максимальну теоретичну величину 50%. Назвемо її фактором корекції енергетичних характеристик комплексного схемного еквівалента Тевенена, у подальшому скорочено фактором енергетичної корекції.

Покажемо, що у разі зменшенні потужності навантаження відносно P_{HM} ККД лінійного кола синусоїдного струму з зазначеним складом елементів може перевищувати 50%, а з використанням параметрів комплексної ДЗС на рис. 1 визначимо величину максимально досяжного (оптимального) ККД лінійного кола синусоїдного струму з зазначеним складом елементів та величину оптимального навантаження $\bar{Z}_{HO} = R_{HO} + jX_{HO}$, за якого ця величина ККД досягається.

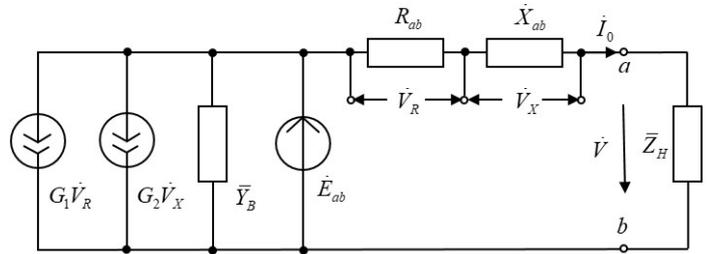


Рис. 2. Комплексна ДЗС, що допускає моделювання в часовій області

Комплексний оптимальний струм навантаження $\dot{I}_{HO} = \dot{E}_{ab} / (R_{HO} + jX_{HO})$ забезпечує активну потужність навантаження

$$P_{HO} = I_{HO}^2 R_{HO} = E_{ab}^2 R_{HO} / Z_O^2, \quad (11)$$

де $Z_O^2 = (R_{ab} + R_{HO})^2 + (X_{ab} + X_{HO})^2$.

Активна потужність ДЗС за оптимального навантаження

$$P_O = \text{Re}(\tilde{S}_P + \dot{E}_+ I_{HO}^*) = E_{ab}^2 \left[G_P + \frac{(k_R + 1)(R_{ab} + R_{HO}) + k_I(X_{ab} + X_{HO})}{Z_O^2} \right].$$

Величина ККД за тих самих умов

$$\eta_O = \frac{P_{HO}}{P_O} = \frac{R_{HO}}{G_P Z_O^2 + (k_R + 1)(R_{ab} + R_{HO}) + k_I(X_{ab} + X_{HO})} = \frac{1}{G_P R_{HO} + \xi + B / R_{HO}}, \quad (12)$$

де $B = b_0 + b_1 X_{HO} + b_2 X_{HO}^2$; $b_0 = G_P Z_{ab}^2 + (k_R + 1)R_{ab} + k_I X_{ab}$; $b_1 = 2X_{ab} G_P + k_I$; $b_2 = G_P$.

Налаштування параметрів оптимального навантаження R_{HO}, X_{HO} має забезпечити мінімальне значення знаменника (12). Величина $B = b_2(X_{HO} + b_1 / 2b_2)^2 + b_0 - b_1^2 / 4b_2$ за умови

$$X_{HO} = -b_1 / 2b_2 = -(2X_{ab} G_P + k_I) / 2G_P = -X_{ab} - k_I / 2G_P \quad (13)$$

набуває мінімуму

$$B_{MIN} = b_0 - \frac{b_1^2}{4b_2} = \frac{4R_{ab}^2 G_P^2 + 4R_{ab} G_P (k_R + 1) - k_I^2 \pm (k_R + 1)^2}{4G_P} = \frac{\xi^2 - (k_R + 1)^2 - k_I^2}{4G_P} = \frac{\xi^2 - |\bar{k}_J^* + 1|^2}{4G_P}.$$

Мінімізація знаменника (12) за величиною активного опору навантаження дає

$$R_{HO} = \sqrt{\frac{B_{MIN}}{G_P}} = \frac{\sqrt{\xi^2 - |\bar{k}_J^* + 1|^2}}{2G_P}. \quad (14)$$

Підстановка оптимальних параметрів навантаження (13) та (14) в (12) визначає величину максимально досяжного ККД

$$\eta_O = \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - |\bar{k}_J^* + 1|^2}} = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - |\bar{k}_J^* + 1|^2}}{|\bar{k}_J^* + 1|^2}. \quad (15)$$

Розв'язання (15) відносно змінної ξ дає значення фактора енергетичної корекції, що забезпечує бажану величину максимального ККД

$$\xi_{\eta_O} = 0,5 \times (\eta_O^{-1} + \eta_O |\bar{k}_J^* + 1|^2). \quad (16)$$

З аналізу (16) випливає, що за умови $|\bar{k}_J^* + 1|^2 = 1$ максимальний ККД у 50% має місце, якщо

$\xi_{0,5} = 1,25$; ККД у 75% та 90% досягаються за значеннях $\xi_{0,75} = 1 \frac{1}{24}$ та $\xi_{0,9} = 1 \frac{1}{180}$ відповідно.

За оптимального навантаження, що визначається (13) та (14), потужність навантаження за (11) може бути перетворена до вигляду

$$P_{HO} = \frac{P_{HM}}{0,25 \times \left(2 + \frac{R_{HO}}{R_{ab}} + \frac{R_{ab}}{R_{HO}} \right) + \frac{k_I^2}{16G_P^2 R_{ab} R_{HO}}}. \quad (17)$$

Оскільки за умови $R_{HO} \neq R_{ab}$ маємо нерівність

$$R_{HO} / R_{ab} + R_{ab} / R_{HO} > 2,$$

то $P_{HO} < P_{HM} = E_{ab}^2 / 4R_{ab}$, тобто максимальний ККД (15) досягається за потужності навантаження, що менша за максимальну.

Верифікація аналітичних співвідношень енергетичної оптимізації кіл синусоїдного струму комп'ютерною симуляцією. Комп'ютерне моделювання має підтвердити:

- 1) значення (10) реального ККД первинного кола синусоїдного струму за навантаження, оптимізованого за параметрами комплексної ДЗС Тевенена;
- 2) співвідношення (13), (14) для вибору параметрів оптимального навантаження, що забезпечують максимально досяжний ККД первинного кола синусоїдного струму, та формулу (15) для величини цього ККД;
- 3) повний збіг енергетичних характеристик первинного кола синусоїдного струму та його ДЗС (рис. 2) у разі симуляції в часовій області;
- 4) можливість збільшення максимального ККД первинного кола синусоїдного струму до бажаного значення шляхом модифікації параметрів його елементів задля зменшення фактора енергетичної корекції.

Будемо виконувати розрахунки та комп'ютерну симуляцію в програмному середовищі Multisim для лінійної моделі трансформатора, представленій комплексною заступною схемою [2] на рис. 3, з такими числовими параметрами елементів: $\dot{E} = 100V$; $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = (1 + 3j)\Omega$; $R = 10\Omega$; $X = 20\Omega$.

Згідно з методикою роботи [14] складаємо матрично-векторну систему рівнянь за методом комплексних контурних струмів, виокремивши струм навантаження \dot{I}_0 зовнішнього контуру

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_2 + jX & 0 & -jX \\ 0 & \bar{Z}_1 + R & -R \\ -jX & -R & R + jX \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{V} \\ \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix},$$

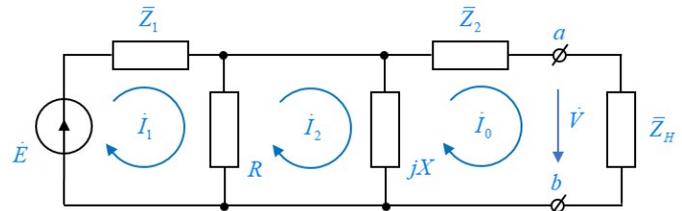


Рис. 3 Комплексна заступна схема лінійної моделі трансформатора

з якої встановлюємо значення EZ -параметрів

$$\dot{E}_{00} = 0; \bar{z}_{00} = \bar{Z}_2 + jX = 1 + 23j; \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -jX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j20 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 + R & -R \\ -R & R + jX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 + 3j & -10 \\ -10 & 10 + 20j \end{bmatrix}.$$

Розраховуємо комплексні параметри енергетично еквівалентних ДЗС на рис. 1, 2:

- комплексна ЕРС Тевенена

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{00} - \mathbf{z}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -j20 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 11 + 3j & -10 \\ -10 & 10 + 20j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{200(5-j)}{13}, E_{ab}^2 = \frac{80000}{13};$$

- комплексний опір ДЗС Тевенена

$$\bar{Z}_{ab} = \bar{z}_{00} - \mathbf{z}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{z} = 1 + 23j - \begin{bmatrix} 0 \\ -j20 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 11 + 3j & -10 \\ -10 & 10 + 20j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -j20 \end{bmatrix} = \frac{29 + 67j}{13}, R_{ab} = \frac{29}{13}, X_{ab} = \frac{67}{13};$$

- комплексна провідність пасивного елемента, запропонованого Барбі

$$\bar{Y}_B = \frac{(\mathbf{e}^T)^* \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}}{E_{ab}^2} = \frac{1}{E_{ab}^2} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 11 + 3j & -10 \\ -10 & 10 + 20j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{9 - 7j}{80}, G_P = \frac{9}{80}.$$

Відзначимо, що в первинних колах синусоїдного струму з одним джерелом напруги, початкова фаза якої прийнята рівною нулю, скалярна величина $\mathbf{e}^T \text{Im}(\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{z})$ в (3) є дійсним числом, з чого випливає, що для таких кіл $\dot{E}_+ = \dot{E}_{ab}^*$, тому $|\bar{k}_J^* + 1| = |\dot{E}_+ / \dot{E}_{ab}| = 1$. Зокрема, у прикладі, що розглядається, $\dot{E}_+ = \dot{E}_{ab}^* = 200(5 + j) / 13$,

$$\bar{k}_J^* + 1 = \frac{\dot{E}_+}{\dot{E}_{ab}} = \frac{5 + j}{5 - j} = \frac{12 + 5j}{13}, k_R + 1 = \frac{12}{13}, k_R = -\frac{1}{13}, k_I = -\frac{5}{13}.$$

Фактор енергетичної корекції для схеми на рис. 3 із заданими параметрами елементів відповідно до (10)

$$\xi = 2R_{ab}G_P + k_R + 1 = 2 \times \frac{29}{13} \times \frac{9}{80} + \frac{12}{13} = \frac{57}{40}. \quad (18)$$

Прогнозний ККД цього кола за максимальної потужності навантаження

$$\eta_M = \frac{0,5}{\xi} = \frac{0,5 \times 40}{57} = \frac{20}{57} \approx 0,350877. \quad (19)$$

Задля забезпечення цієї потужності параметри навантаження комп'ютерної моделі схеми трансформатора, представленої на рис. 4, мають обиратися, реалізуючи умову $\bar{Z}_{HM} = \bar{Z}_{ab}^*$ на частоті 50 Гц, у вигляді

$$R4 = R_{ab} = 29 / 13 \approx 2,23077\Omega; C1 = 1 / (X_{ab} \times 100\pi) = 13 / (67 \times 100\pi) \approx 617,6162\mu F.$$

Параметри інших реактивних елементів розраховують на основі заданих комплексних параметрів первинного кола

$$L1 = L2 = 3 / 100\pi = 9,5493\text{mH}; L3 = 20 / 100\pi = 63,662\text{mH}.$$

Величина ККД $\eta_M = 689,655 / 1966 = 0,3508$ за даними комп'ютерного моделювання (рис. 4) відповідає розрахунковому значенню (19), що також верифікує формулу (18) визначення фактора енергетичної корекції. Потужність навантаження за показаннями ватметра XWM2 також відповідає розрахунковій величині максимальної потужності навантаження

$$P_{HM} = E_{ab}^2 / 4R_{ab} = \frac{80000 \times 13}{13 \times 4 \times 29} = \frac{20000}{29} \approx 689,655\text{W}.$$

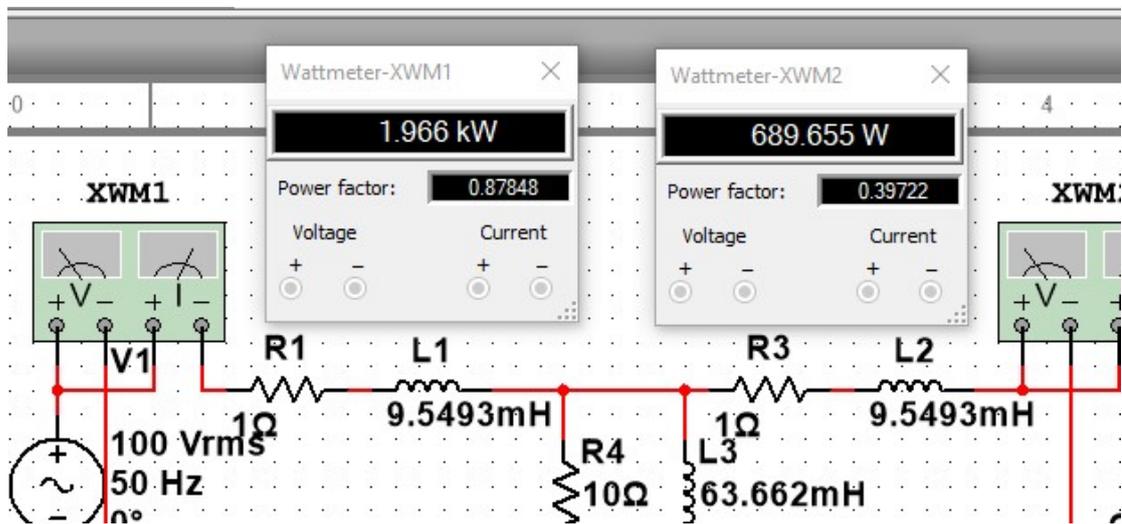


Рис. 4 Комп'ютерна модель схеми трансформатора за максимальної потужності навантаження

За розрахованої величини фактора енергетичної корекції та $|k_j^* + 1|^2 = 1$ згідно з (15) можна досягти максимального ККД

$$\eta_0 = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{57}{40} - \sqrt{\left(\frac{57}{40}\right)^2 - 1} = \frac{57 - \sqrt{1649}}{40} \approx 0,409803.$$

За формулами (13), (14) для цього потрібне навантаження з параметрами

$$R_{HO} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{2G_p} = \frac{80 \times \sqrt{(57/40)^2 - 1}}{2 \times 9} = \frac{\sqrt{1649}}{9} \approx 4,512\Omega;$$

$$X_{HO} = -X_{ab} - \frac{k_f}{2G_p} = -\frac{67}{13} + \frac{5 \times 80}{2 \times 13 \times 9} = -\frac{31}{9}, C_{HO} = \frac{9}{31 \times 100\pi} \approx 924,125476\mu F.$$

Водночас при цьому $R_{HO} / R_{ab} = 13 \times \sqrt{1649} / 261 \approx 2,0226$, і потужність навантаження відповідно до (17) складатиме $P_{HO} = P_{HM} / 1,2018342 \approx 573,836\text{W}$.

Перевіряємо можливість досягнути зазначеного ККД, реалізуючи в часовій області (рис. 5) комп'ютерну модель комплексної ДЗС на рис. 2 з параметрами джерела V1: діюче значення напруги $E_{ab} = \sqrt{80000 / 13} \approx 78,446454\text{V}$; початкову фазу цієї напруги приймаємо нульовою через незалежність потужностей від початкової фази єдиного джерела цієї схеми. Параметри пасивних елементів встановлюємо на основі розрахованих комплексних параметрів схеми на рис. 2

$$R1 = R_{ab} = \frac{29}{13} = 2,231\Omega, L1 = \frac{X_{ab}}{100\pi} = \frac{67}{13 \times 100\pi} = 16405,2\mu\text{H};$$

$$\bar{Z}_B = \frac{1}{\bar{Y}_B} = \frac{80}{9-7j} = \frac{8(9+7j)}{13}, R2 = R_B = \frac{72}{13} \approx 5,53846\Omega, L2 = L_B = \frac{56}{13 \times 100\pi} \approx 13,71181\text{mH}.$$

Згідно (8) встановлюємо коефіцієнти передачі залежних джерел

$$G_1 = k_r / R_{ab} = -1 / 29 \approx -34483 \times 10^{-6}; G_2 = k_l / X_{ab} = -5 / 67 \approx -74627 \times 10^{-6}.$$

Від'ємна величина кожного з отриманих коефіцієнтів передачі G_1 та G_2 свідчить про необхідність з'єднувати залежні та незалежне джерела з однаковою полярністю.

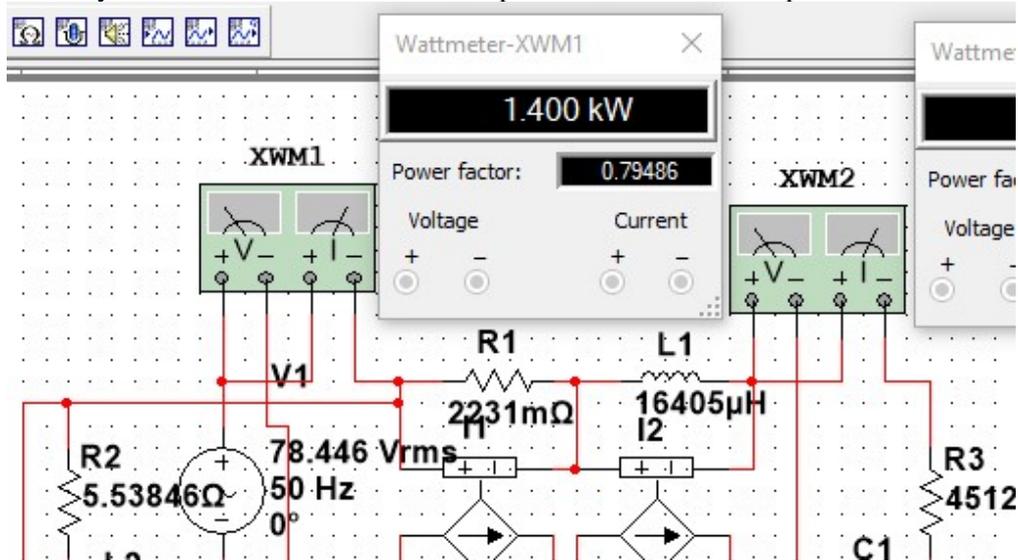


Рис. 5 Комп'ютерна модель ДЗС за оптимального навантаження

За показаннями віртуальних ватметрів переконуємось, що вихідна потужність відповідає розрахованій, а експериментальне значення оптимального ККД $\eta_0 = 573,794 / 1400 = 0,40985$ добре узгоджується з прогностичним значенням. Моделювання первинного кола з оптимальними параметрами навантаження (рис. 6) дає аналогічні енергетичні характеристики.

Отже, підтверджені співвідношення (13), (14) для вибору параметрів оптимального навантаження, що забезпечують максимальний ККД первинного кола та формула (15) для розрахунку величини цього ККД. Крім того, комп'ютерною симуляцією в часовій області продемонстрований повний збіг енергетичних характеристик первинного кола синусоїдного струму та його ДЗС у разі визначенні за (8) дійсних значень коефіцієнтів передачі G_1 та G_2 залежних джерел струму, керованих зазначеними напругами. Разом з тим продемонстроване збільшене значення ККД первинного кола з заданими параметрами елементів за рахунок оптимізації навантаження не перевищує граничного значення у 50%, притаманного ДЗС Тевенена за відсутності втрат енергії в режимі розриву полюсів.

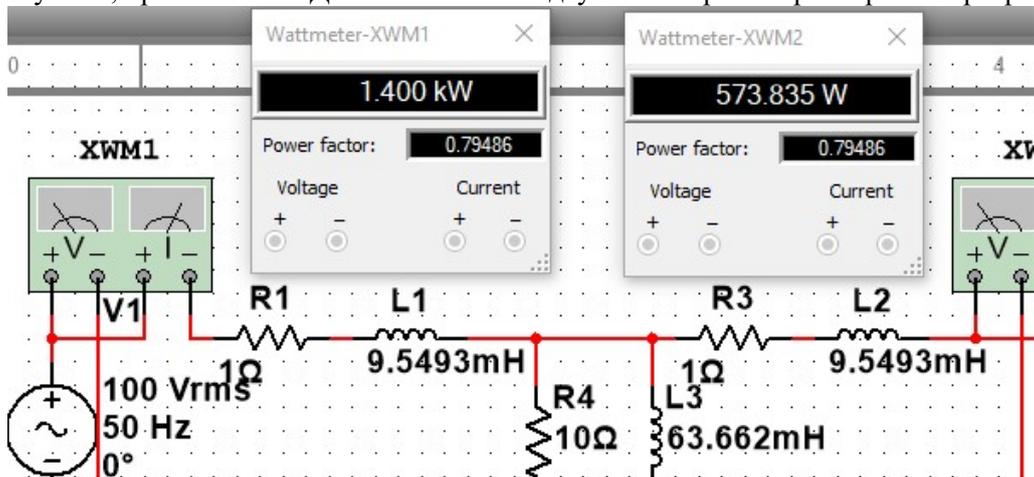


Рис. 6 Комп'ютерна модель трансформатора за оптимального навантаження

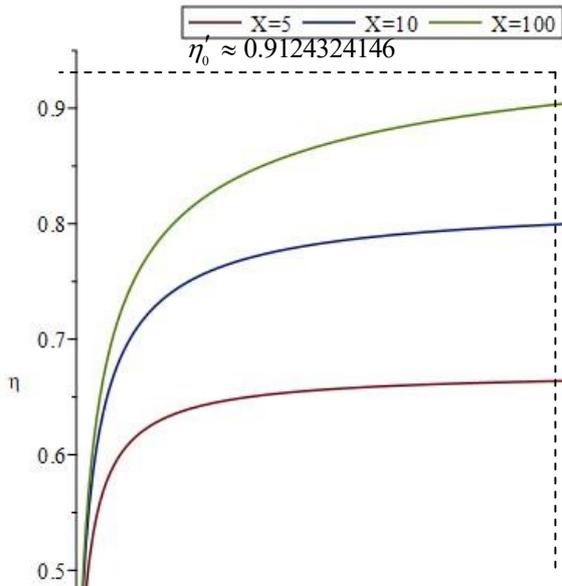


Рис. 7 Графік залежності ККД від параметрів R та X

Розглянемо можливість перевищення цього граничного значення ККД, розраховуючи параметри енергетично еквівалентних заступних схем, фактор енергетичної корекції та максимальний ККД, поступово збільшуючи опори елементів поперечного ланцюга первинного кола на рис. 4, що відповідає зменшенню втрат на перемагнічування осердя трансформатора та збільшенню його індуктивності намагнічування. Результати розрахунків унаочнені графіком на рис. 7, з якого випливає, що ККД, більший за 90%, має місце за

$R = R_4 = 1000\Omega; X = 100\Omega; L_3 = X / 100\pi = 318,31\text{mH}$.
При цьому комплексні параметри ДЗС на рис. 1 та 2 набувають значень

$$\bar{Z}_{ab} = \frac{207301 + 628903j}{106301}; R_{ab} = \frac{207301}{106301};$$

$$\bar{Y}_B = \frac{1101 - 10303j}{1000000}; G_P = \frac{1101}{1000000};$$

$$\bar{k}_J^* + 1 = \frac{531456 + 7217j}{531505}; k_R + 1 = \frac{531456}{531505}.$$

Фактор енергетичної корекції первинного кола зі зміненими параметрами елементів

$$\xi' = 2R_{ab}G_P + k_R + 1 = \frac{2 \times 207301 \times 1101}{106301 \times 1000000} + \frac{531456}{531505} = 1.004202$$

є меншим за величину $\xi_{0,9} = 1 \frac{1}{180}$, що гарантує максимальний ККД у 90%. Дійсно, за формулою (15)

$$\text{при } |\bar{k}_J^* + 1|^2 = 1 \quad \eta'_0 = \xi' - \sqrt{\xi'^2 - 1} \approx 0,912432.$$

Ці значення ККД забезпечують параметри оптимального навантаження в оновленій схемі первинного кола на рис. 8

$$X_{HO} = -X_{ab} - \frac{k_I}{2G_P} \approx -12.08265213\text{Om};$$

$$C_{HO} = C1 \approx 263.44372\mu\text{F};$$

$$R_{HO} = R2 = \frac{\sqrt{\xi'^2 - 1}}{2G_P} \approx 41.675561\Omega.$$

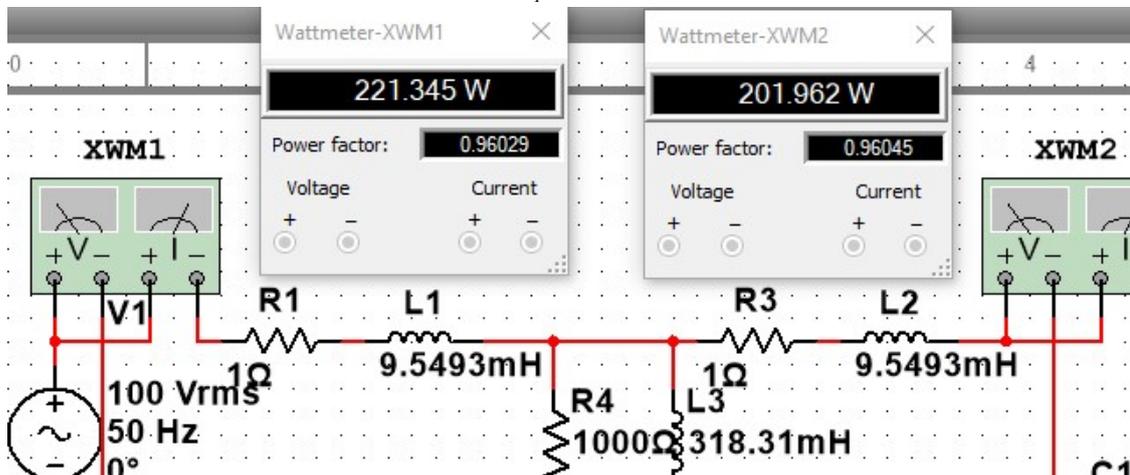


Рис. 8 Комп'ютерна модель трансформатора з підвищеним ККД за оптимального навантаження

Величина максимального ККД за результатами віртуального експерименту

$$\eta'_0 = \frac{201,962}{221,345} = 0,91243082$$

повністю відповідає прогнозованому значенню, що ілюструє можливість підбору параметрів елементів первинного кола синусоїдного струму задля забезпечення максимального ККД шляхом контролю величини фактора енергетичної корекції.

Висновки.

1. Запропоновано модифікацію двополусної заступної схеми лінійного кола синусоїдного струму, що забезпечує лінійні залежності активної та реактивної потужностей від струму навантаження з коефіцієнтами пропорційності, притаманними первинному колу, застосуванням залежних джерел струму, керованих напругами, з дійсними значеннями коефіцієнтів передачі. Це відкриває можливість моделювати в часовій області енергетичні властивості первинного кола за його спрощеною двополусною заступною схемою з безпосереднім вимірюванням енергетичних характеристик.

2. Вперше введено поняття та отримана формула визначення фактора корекції енергетичних характеристик комплексного схемного еквівалента Тевенена, що показує у скільки разів ККД первинного кола синусоїдного струму за максимальної активної потужності навантаження менший за максимальну теоретичну величину у 50%. Вперше показаний взаємно однозначний зв'язок між фактором корекції енергетичних характеристик та максимально досяжним ККД первинного кола, що може перевищувати 50% за оптимального навантаження, потужність якого менша за максимальну.

3. Вперше з використанням параметрів запропонованої двополусної заступної схеми, еквівалентної первинному колу за комплексною потужністю, отримані аналітичні співвідношення для вибору параметрів оптимального навантаження, що забезпечують максимально досяжний ККД первинного кола синусоїдного струму.

4. Комп'ютерне моделювання в часовій області підтвердило повний збіг енергетичних характеристик первинного кола синусоїдного струму та його запропонованої двополусної заступної схеми, коректність визначення фактора корекції енергетичних характеристик та параметрів оптимального навантаження, що забезпечують максимально досяжний ККД, а також можливість збільшення максимального ККД первинного кола синусоїдного струму до бажаного значення шляхом модифікації параметрів його елементів, що ведуть до зменшення фактора корекції енергетичних характеристик.

Роботу виконано за держбюджетною темою «Дослідження методів підвищення ефективності систем електроживлення з джерелами розосередженої генерації шляхом розроблення нових способів побудови та керування напівпровідниковими компенсаторами збурень і неактивних складових потужності» (шифр «Адаптер-2»), КПКВК 6541030.

1. Thévenin L. Sur un Nouveaux Théoreme d'Electricité Dynamique. *Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences*. Vol. 97. Paris, France: Académie des Sciences, 1883. Pp. 159–161.

2. Бойко В.С., Бойко В.В., Видолоб Ю.Ф., Курило І.А., Шеховцов В.І., Шидловська Н.А. Теоретичні основи електротехніки: Т. 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. 272 с.

3. Коваль Ю.О., Гринченко Л.В., Милютченко І.О., Рибін О.І. Основи теорії кіл: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч. 1. Х.: Компанія СМІТ, 2008. 432 с.

4. Charles K. Alexander, Matthew N.O. Sadiku. *Fundamentals of electric circuits*. New York: McGraw-Hill, 2020. 992 p.

5. Nilsson J.W., Riedel S.A. *Electric Circuits*. Boston, MA, USA: Pearson, 2023. 816 p.

6. Steinmetz C.P. Complex quantities and their use in electrical engineering. *Proceedings of the International Electrical Congress, Held in the City of Chicago, August 21st to 25th, 1893*. New York, USA: American Institute of Electrical Engineers, 1893. Pp. 33–74.

7. Barbi I. Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 113667–113674. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3004026>.

8. Артеменко М.Ю., Петров Д.О., Кутафін Ю.В. Двополусна схема заміщення електричного кола постійного струму з залежними джерелами напруги, еквівалентна за потужністю. *Visnyk NTUU KPI Serii A – Radiotekhnika Radioaparaturbuduvannia*. 2021. Iss. 85. Pp. 5–13. DOI: <https://doi.org/10.20535/RADAP.2021.85.5-13>.

9. Артеменко М.Ю., Чопик В.В., Шаповал І.А., Поліщук С.Й., Бойцов Д.Д. Застосування схемного еквівалента Тевенена-Барбі для оптимізації енергетичних характеристик електричних кіл постійного струму. *Вісті вищих учбових закладів. Радіоелектроніка*. 2024. Т. 67. № 9. С. 554–564. DOI: <https://doi.org/10.20535/S0021347024100030>.
10. Corradini L. General Power-Equivalent Synthesis of Resistive DC Networks. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 160711–160722. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3020652>.
11. Barbi I. Unified Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 178230–178237. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3027489>.
12. Herminio Martinez-Garcia and Encarna Garcia-Vilchez Power-Based Equivalent-Modeling Circuit for DC Linear Time-Invariant Resistive One-Port Networks. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. Pp. 23326–23334. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3057435>.
13. Barbi I. Active and Reactive Power Conservative Extension of the Hoashi-Millman Equivalent Circuit. *IEEE Access*. 2025. Vol. 13. Pp. 213016–213024. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3645010>.
14. Артеменко М.Ю., Кутафін Ю.В., Шаповал І.А., Михальський В.М., Чопик В.В., Поліщук С.Й. Двополюсна заступна схема лінійного електричного кола синусоїдного струму, еквівалентна за комплексною потужністю. *Праці ІЕД НАН України*. 2025. Вип. 72. Рр. 62–70. DOI: <https://doi.org/10.15407/publishing2025.72.062>
15. Hoashi T. The combination theorem of the electrical circuits and its applications. *J. Inst. Electr. Eng.* June 1927. Vol. 467. Pp. 595–610. (in Japanese).
16. Millman J. A Useful Network Theorem. *Proceedings of the IRE*. Sept. 1940. Vol. 28. No 9. Pp. 413–417. DOI: <https://doi.org/10.1109/JRPROC.1940.225885>.

MODIFIED ONE-PORT EQUIVALENT CIRCUIT, EQUIVALENT TO A LINEAR ELECTRICAL AC NETWORK IN TERMS OF COMPLEX POWER, FOR OPTIMISATION AND MEASUREMENT OF ITS ENERGY CHARACTERISTICS

M.Yu. Artemenko¹, Y.V. Kutafin², V.V. Chopyk³, V.M. Mikhalsky³, I.A. Shapoval³, S.Y. Polishchuk³

¹ National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
Beresteyskiy Ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine,

² Academy of Labour, Social Relations and Tourism,
Kiltseva Road, 3-A, Kyiv, 03187, Ukraine

³ Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,
Beresteyskiy Ave., 56, Kyiv, 03057, Ukraine.

E-mail: artemenko_m_ju@ukr.net.

The article proposes a modified structure for the one-port equivalent circuit of linear electric AC networks that reproduces the complex power of the primary circuit and enables time-domain simulation in common computer software. An energy correction factor is introduced, which quantitatively characterises the decrease in the real efficiency of the primary circuit at maximum load power compared to the limit value of 50% for the classical Thevenin circuit equivalent. A one-to-one relationship of this factor with the maximum achievable efficiency of the primary circuit, which can exceed 50% at optimal load, is shown. Using the parameters of the proposed one-port equivalent circuit, analytical relations for calculating the optimal load parameters are obtained. The reliability of the theoretical results is confirmed by computer simulation in the Multisim environment on the example of a linear transformer model, which demonstrated a complete coincidence of the optimised energy characteristics of the primary AC network and its one-port equivalent circuit. References 16, figures 8.

Keywords: one-port equivalent circuit; complex power; Thevenin equivalent; efficiency; optimal load; sinusoidal current circuits

1. Thévenin L. Sur un Nouveaux Théoreme d'Electricité Dynamique. *Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences*. Vol. 97. Paris, France: Académie des Sciences, 1883. Pp. 159–161.

2. Boyko V.S., Boyko V.V., Vydolob Yu.F., Kurylo I.A., Shekhovtsov V.I., Shidlovska N.A. Theoretical foundations of electrical engineering: Vol. 1: Established modes of linear electric circuits with concentrated parameters. Kyiv: IVC Vydavnytstvo Politekhnik, 2004. 272 p. (Ukr).

3. Koval Yu.O., Grinchenko L.V., Mylyutchenko I.O., Rybin O.I. Fundamentals of the Theory of Circles: Textbook for Students of Higher Educational Institutions. Part 1. Kharkiv: CMIT, 2008. 432 p. (Ukr).

4. Charles K. Alexander, Matthew N.O. Sadiku. Fundamentals of electric circuits. New York: McGraw-Hill, 2020. 992 p.

5. Nilsson J.W., Riedel S.A. Electric Circuits. Boston, MA, USA: Pearson, 2023. 816 p.

6. Steinmetz C.P. Complex quantities and their use in electrical engineering. Proceedings of the *International Electrical Congress*, Held in the City of Chicago, August 21st to 25th, 1893. New York, USA: American Institute of

Electrical Engineers, 1893. Pp. 33–74.

7. Barbi I. Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 113667–113674. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3004026>.

8. Artemenko M.Yu., Petrov D.O., Kutafin Yu.V. Two-pole scheme of substitution of an electric circuit of direct current with dependent voltage sources, equivalent in power. *Visnyk NTUU KPI Seriya – Radiotekhnika Radioaparotobuduvannia*. 2021. Iss. 85. Pp. 5–13. DOI: <https://doi.org/10.20535/RADAP.2021.85.5-13>. (Ukr).

9. Artemenko M.Yu., Chopyk V.V., Shapoval I.A., Polishchuk S.Y., Boytsov D.D. Application of the Thévenin-Barbie circuit equivalent for optimization of energy characteristics of DC electrical circuits. *Visti vyschih uchovyh zakladiv. Radioelektronika*. 2024. Vol. 67. No 9. Pp. 554–564. DOI: <https://doi.org/10.20535/S0021347024100030> (Ukr).

10. Corradini L. General Power-Equivalent Synthesis of Resistive DC Networks. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 160711–160722. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3020652>.

11. Barbi I. Unified Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 178230–178237. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3027489>.

12. Herminio Martinez-Garcia and Encarna Garcia-Vilchez Power-Based Equivalent-Modeling Circuit for DC Linear Time-Invariant Resistive One-Port Networks. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. Pp. 23326–23334. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3057435>.

13. Barbi I. Active and Reactive Power Conservative Extension of the Hoashi-Millman Equivalent Circuit. *IEEE Access*. 2025. Vol. 13. Pp. 213016–213024. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3645010>.

14. Artemenko M.Yu., Kutafin Yu.V., Shapoval I.A., Mykhalskyi V.M., Chopyk V.V., Polishchuk S.Y. One-port complex power conservative equivalent circuit of linear AC electrical network. *Pratsi Instytutu elektrodynamiky NAN Ukrainy*. 2025. Vol. 72, Pp. 62–70. DOI: <https://doi.org/10.15407/publishing2025.72.062>. (Ukr)

15. Hoashi T. The combination theorem of the electrical circuits and its applications. *J. Inst. Electr. Eng.* June 1927. Vol. 467. Pp. 595–610. (in Japanese).

16. Millman J. A Useful Network Theorem. *Proceedings of the IRE*. Sept. 1940. Vol. 28. No 9. Pp. 413–417. DOI: <https://doi.org/10.1109/JRPROC.1940.225885>.

Надійшла 23.01.2026

Прийнята 31.01.2026