

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНОГО ТА ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ГЕНЕРАТОРІВ З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ

І.П. Кондратенко*, чл.-кор. НАН України, **В.В. Гребеніков****, докт. техн. наук,
Р.В. Гамалія***, канд. ф.-м. наук, **Р.С. Кришук******, канд. техн. наук
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Берестейський, 56, Київ, 03057, Україна. E-mail: dep7ied@ukr.net; elm1153@gmail.com.

Досліджено адекватність спрощеної математичної моделі чисельно-аналітичного методу розрахунку генераторів з постійними магнітами малої потужності для автономних енергетичних систем, що працюють із випрямлячем та активним навантаженням. Об'єктом дослідження є генератори з радіальним розташуванням постійних магнітів на поверхні ротора. Розглянута модель ґрунтується на ідеалізованому представленні повітряного проміжку між ротором і статором та не враховує зубцево-пазову структуру, реальні геометричні розміри постійних магнітів і нелінійні магнітні властивості феромагнітних матеріалів. Задля оцінки адекватності моделі виконано порівняльний аналіз результатів чисельно-аналітичного розрахунку з даними високоточного моделювання методом скінченних елементів у програмному комплексі Ansys Maxwell. Побудовано серію FEM-моделей генератора різного рівня деталізації та складності. У роботі наведено математичні вирази чисельно-аналітичного методу на основі перетворення Фур'є, орієнтовані на комп'ютерну реалізацію. Моделювання виконано з урахуванням електричного кола генератора, що включає трифазний випрямляч і активне навантаження. Проведено розрахунок часових залежностей розподілу магнітного поля та електромагнітного моменту. Визначено похибки розрахунку електромагнітного моменту, отриманого чисельно-аналітичним методом, у порівнянні з FEM-моделями різного ступеня деталізації. Отримані результати демонструють можливості та обмеження спрощеної математичної моделі її підтверджують доцільність її використання для попередніх розрахунків та оптимізації параметрів генераторів з постійними магнітами для автономних систем відновлюваної енергетики. Бібл. 12, рис. 6, табл. 1.

Ключові слова: моделювання, електричний генератор, відновлювана енергетика, постійні магніти, енергетичні характеристики, електромагнітний момент, чисельно-аналітичний метод, метод скінченних елементів.

Вступ. Ефективне використання відновлюваних джерел енергії, зокрема енергії вітру, є одним із пріоритетних напрямів розвитку сучасної енергетики. У складі автономних енергетичних систем широкого застосування набули генератори з постійними магнітами (ПМ) малої потужності, що працюють із випрямлячем та активним навантаженням. Такі генератори характеризуються високим ККД, надійністю та можливістю роботи в умовах змінної швидкості обертання, що робить їх перспективними для автономних вітроенергетичних установок.

Ефективне проєктування генераторів з ПМ потребує точного розрахунку магнітного поля та енергетичних характеристик, що дає змогу оптимізувати геометричні параметри машини та забезпечити стабільну роботу в умовах змінних режимів навантаження. Найбільш точні результати забезпечує чисельне моделювання методом скінченних елементів (FEM) у сучасних програмних комплексах. Водночас розроблення скінченноелементних моделей вимагає значних витрат часу, високої кваліфікації та ретельної перевірки отриманих результатів.

У зв'язку з цим для попередніх інженерних розрахунків і вибору конструктивних параметрів генераторів доцільним є застосування аналітичних та чисельно-аналітичних методів, які дають можливість оперативно оцінити основні характеристики машини без виконання повного FEM-моделювання. Аналогічно до задач проєктування тягових електроприводів [1] такі методи дають

¹ © Кондратенко І.П., Гребеніков В.В., Гамалія Р.В., Кришук Р.С., 2026
ORCID: * <https://orcid.org/0000-0003-1914-1383>; ** <https://orcid.org/0000-0002-1114-1218>;
*** <https://orcid.org/0000-0002-5729-7891>; **** <https://orcid.org/0000-0002-1933-0144>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026



Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>

змогу швидко визначати ключові показники, зокрема, електромагнітні характеристики, щільність моменту та ККД у широкому діапазоні режимів роботи й виконувати попередню оптимізацію геометричних розмірів.

У науковій літературі запропоновано низку методів до аналітичного та чисельно-аналітичного розрахунку електромагнітного поля генераторів з постійними магнітами. Ці методи враховують залежність магнітного поля, струмів і напруги обмоток статора від геометричних параметрів машини та електромагнітних властивостей матеріалів. Так у роботі [2] розроблено метод на основі моделі магнітного потенціалу ротора в поєднанні з магнітною еквівалентною схемою, що дає можливість враховувати ефекти насичення феромагнітних матеріалів. У [3] представлено двовимірний аналітичний розрахунок магнітного поля в повітряному проміжку генератора з використанням векторного магнітного потенціалу та методу розділення змінних. Робота [4] присвячена методу розрахунку на основі скалярного магнітного потенціалу з урахуванням взаємодії полюсів і пазів статора, що забезпечує точне визначення радіальної та тангенціальної складових магнітної індукції. У [5] запропоновано аналітичний метод на основі магнітної еквівалентної схеми з ітераційним визначенням магнітних опорів з урахуванням насичення.

Значний внесок у розвиток аналітичних методів розрахунку електричних машин зроблено співробітниками відділу електромагнітних систем Інституту електродинаміки НАН України. Зокрема, в монографії [6] розглянуто застосування методу інтегральних перетворень для аналізу електромеханічних систем включно з лінійними машинами та машинами радіального магнітного потоку з постійними магнітами. Подальший розвиток аналітичних методів розрахунку машин радіального магнітного потоку з ПМ представлено також у працях [7, 8].

Найпростішим аналітичним підходом до моделювання електричних машин з постійними магнітами є використання двовимірної моделі повітряного проміжку з ідеалізованими поверхнями магнітопроводів ротора та статора. У межах такої моделі матеріали вважаються лінійними, а магнітне поле постійних магнітів і струми статора подаються у вигляді еквівалентних струмових контурів [6–8]. Хоча аналітичні методи дають можливість виконувати розрахунки в кількох областях із заданням граничних умов та враховувати об'ємний розподіл джерел поля, неминучі спрощення геометрії та лінеаризація властивостей матеріалів призводять до певних похибок.

Системне порівняння результатів спрощених аналітичних моделей [8] з даними високоточного FEM-моделювання в програмних комплексах типу Ansys Maxwell [9] дає змогу визначити межі застосовності аналітичного підходу та оцінити його точність на різних етапах проектування генераторів з постійними магнітами для автономних систем відновлюваної енергетики.

Метою роботи є встановлення адекватності математичної моделі та чисельно-аналітичного методу розрахунку магнітного поля й енергетичних характеристик електричних генераторів з поверхнево розміщеними постійними магнітами на роторі для систем відновлюваної енергетики (з випрямлячем та активним навантаженням) на прикладі генератора малої потужності.

Задля досягнення мети виконано порівняльний аналіз результатів чисельно-аналітичних розрахунків з даними високоточного моделювання методом скінчених елементів у програмному комплексі Ansys Maxwell. Побудовано серію FEM-моделей різного рівня деталізації задля визначення

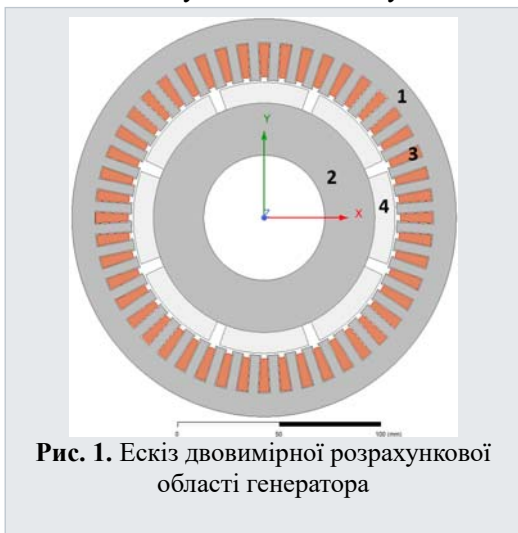


Рис. 1. Ескіз двовимірної розрахункової області генератора

впливу геометричних спрощень на точність розрахунку електромагнітних характеристик генератора. Як основний параметр для порівняння обрано електромагнітний момент, оскільки він є інтегральною характеристикою, що комплексно відображає взаємодію магнітного поля ротора та струмів статора. На відміну від локальних параметрів магнітного поля електромагнітний момент забезпечує більш точну оцінку адекватності моделі та чутливий до впливу вищих гармонік, які виникають внаслідок зубцево-пазової структури статора та особливостей роботи випрямляча.

Опис FEM-моделі. На рис. 1 представлено ескіз двовимірної розрахункової області генератора з трифазною обмоткою статора та поверхнево розміщеними постійними магнітами на роторі. Ця модель використовується задля моделювання методом скінчених елементів у програмі

Ansys Maxwell [9]. На рис. 1 позначено: 1 – магнітопровід статора; 2 – магнітопровід ротора; 3 – пази з обмоткою статора; 4 – постійні магніти.

Модель має такі основні геометричні параметри:

- радіус активної поверхні статора – 66 мм, зовнішній радіус ярма статора – 95,5 мм;
- радіус активної поверхні ротора – 55 мм, внутрішній радіус магнітопроводу ротора – 30 мм;
- висота магнітів – 10 мм, відношення ширини магніту до ширини полюсу по азимутальній координаті – 40/45;
- висота та ширина зубців статора – 17 мм та 4,7 мм відповідно;
- висота та ширина клиноподібних виступів зубців – 1,0 мм та 5,7 мм відповідно.

Частота обертання ротора $v_r(t) = \text{const} = 3000$ об/хв. Для магнітопроводу статора та ротора використано сталь 1008 зі стандартними характеристиками намагнічування з бібліотеки матеріалів Ansys Maxwell, що забезпечує коректне відтворення властивостей феромагнітних матеріалів у моделі. Електромагнітні параметри обмотки: число провідників у пазах – 7, кількість пар полюсів – 4, число пазів на полюс і фазу – 2, коефіцієнт вкорочення кроку – 1.

Модель не містить електропровідних елементів, втрати в сталі не враховуються. В FEM-моделях з зубцево-пазовою структурою статора індуктивність розсіювання пазів враховується автоматично програмним комплексом Ansys Maxwell. Активний опір обмотки розраховано аналітичними методами [10] і враховано в електричній схемі, до якої включено електричну машину (рис. 2). Індуктивність розсіювання та активний опір лобових частин обмотки в даному дослідженні не враховуються.

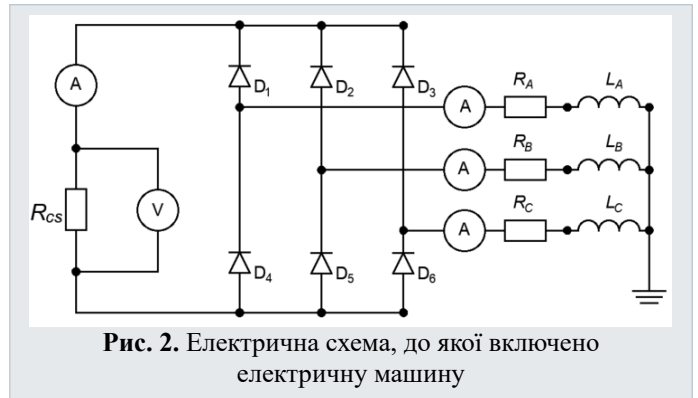


Рис. 2. Електрична схема, до якої включено електричну машину

Задля моделювання реальних умов роботи генератора використано типову схему для автономних систем вітроенергетики з шестидіодним випрямлячем [11] та активним навантаженням (рис. 2) в програмі Ansys Circuit, що разом з Ansys Maxwell входить в комплекс програм Ansys Electronics [9]. Випрямляч (діоди $D_1 \dots D_6$) створює несинусоїдальне навантаження, яке впливає на форму фазних струмів та електромагнітного моменту. Активний опір R_{cs} імітує активне навантаження (табл. 1). Індуктивність L_A, L_B, L_C та активний опір $R_w = R_A = R_B = R_C$ представляють параметри обмотки статора. Ця схема використовується задля врахування впливу випрямляча напруги з активним навантаженням на струми в фазних обмотках генератора, а, відповідно, на магнітне поле та електромагнітний момент.

Опис аналітичної моделі. На рис. 3 наведено ескіз моделі генератора (в межах однієї пари полюсів), яка використовується для чисельно-аналітичного розрахунку методом інтегральних перетворень [6, 8]. У моделі замість кожного постійного магніту застосовано два струмові контури j_p на радіусі r_1 . Позиція струмових контурів j_p по азимутальній координаті залежить від заданої частоти обертання v_r об/хв., яка може бути задана або постійною, або змінною в часі. При цьому проміжок між двома такими струмовими контурами еквівалентний кутовій ширині постійного магніту φ_p , а довжина контурів φ_s по осі φ не залежить від висоти постійних магнітів, а обирається максимально малою для локалізації еквівалентного джерела поля лише біля країв уявного магніту:

$$\varphi_s \ll (\varphi_\tau - \varphi_p). \quad (1)$$

Це забезпечує максимально коректне відтворення розподілу магнітної індукції в повітряному проміжку у моделі (рис. 3), де

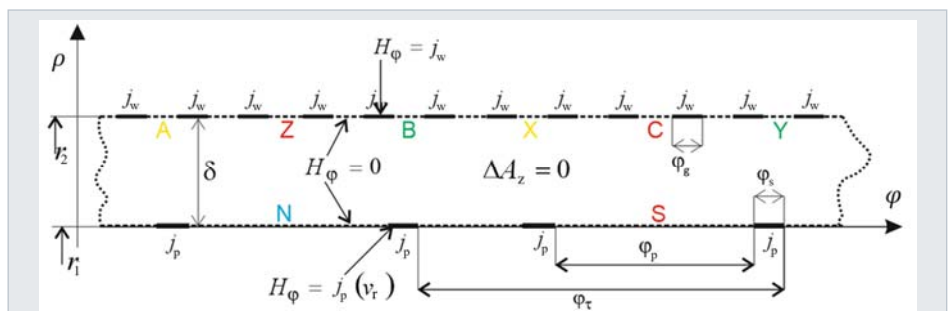


Рис. 3. Ескіз моделі генератора для чисельно-аналітичного розрахунку

джерело магнітного поля задано граничною умовою [8].

Представлення зубцево-пазової зони статора виконано граничними умовами на радіусі r_2 . Сумарний струм кожного пазу представляється лінійним струмовим контуром j_w на поверхні ідеального магнітопроводу статора.

Таблиця 1

Параметр	Значення:	Одиниці:	Опис:
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	Гн/м	магнітна постійна
p	4	-	кількість пар полюсів
q	2	-	пазів на полюс і фазу
m	3	-	кількість фаз статора
r_2	0,066	м	радіус статора
δ_1	0,001	м	повітряний проміжок
h_p	0,010	м	висота магнітів
$k_{\text{фр}}$	40/45	-	перекриття магнітом полюса ротора
b_g	0,0052	м	ширина пазів
l_d	0,130	м	довжина повітряного проміжку
M_p	1003441	А/м	намагніченість магніту
$\mu_{\text{тр}}$	1,045	-	відносна магнітна проникність магнітів
β	1	-	коефіцієнт вкорочення полюсного кроку
w_c	3,5	-	к-сть ефективних витків у котушках 2-шарової обмотки, у половині пазу.
$v_r(t)$	3000	об/хв.	частоту обертання ротора задано сталою в часі для моделювання усталеного режиму роботи генератора
L_g	0,00117	Гн	розсіювання в пазах на фазу
L_e	0	Гн	розсіювання лобових частин на фазу
L_{cs}	0	Гн	індуктивність навантаження
R_w	0,03	Ом	активний опір обмотки на фазу
R_{ce}	50	Ом	активний опір навантаження

Чисельно-аналітичний метод розрахунку. Задля виконання розрахунку індуктивності та індукованої ЕРС у фазних обмотках статора складено програму в системі комп'ютерної алгебри Wolfram [12] на основі наступних виразів (2)...(9) методу розрахунку, викладеного в [8]. Розрахунок виконується у три етапи: визначення розподілу густини струму в контурах статора та ротора за виразами (2)–(4); обчислення індукованої ЕРС та індуктивностей за виразами (5)–(7); розрахунок електромагнітного моменту за виразом (8). Вхідні дані для розрахунку

наведено у табл. 1.

Густина струму в струмових контурах статора та ротора розраховується за виразами

$$j_{pn}(t) = k_{jp} I_p k_{pn}(t), \quad j_{wn}(t) = k_{wj} \sum_{K=1}^m i_K(t) k_{wn}(K), \quad (2)$$

де t – час; $m = 3$ – кількість фаз статора; $i_K(t)$ – струм фази K ($K = A, B, C$), $k_{wn}(K)$ та $k_{pn}(t)$ – коефіцієнти розподілу струмових контурів по азимутальній координаті (обмоткові коефіцієнти [8])

$$k_{wn}(K) = \frac{\sin(0,5n\varphi_g)}{n\pi} \sum_{q_1=0}^{q-1} \sum_{p_1=0}^{p-1} \left(e^{in\theta_{w1}(K)} + e^{in\theta_{w2}(K)} \right) \left(1 - e^{in\varphi_\tau} \right), \quad (3)$$

$$k_{pn}(K) = \frac{\sin(0,5n\varphi_s)}{n\pi} \sum_{p_1=0}^{p-1} e^{in\varphi_r(t)} \left(e^{in\theta_{p1}} + e^{in\theta_{p2}} \right) \left(1 - e^{in\varphi_\tau} \right), \quad (4)$$

де n – параметр перетворення Фур'є [6]; i – уявна одиниця. Інші складові виразів (2)...(7) представлено в табл. 1 та 2. Напряга, індукована постійними магнітами в фазі K обмотки статора, розраховується за виразом

$$u_{pK}(t) = \sum_n \frac{l_d w_{ph} \pi}{pq \varphi_g} E_{pn}(t) k_{wn}^*(K), \quad E_{pn}(t) := -in\omega_r A_{pn}(t), \quad (5)$$

де $k_{wn}^*(K)$ – комплексно-спряжена функція коефіцієнта розподілу (3); $E_{pn}(t)$ – ЕРС внаслідок обертання постійних магнітів на координаті r_2 . Для розрахунку власної ($K' = K''$) та взаємної ($K' \neq K''$) індуктивності використовується вираз

$$L_{K'K''} = -\sum_n \frac{l_d w_{ph} \pi}{p q \varphi_g} \cdot \left(k_{jw} k_{wn} (K') \frac{r_2 (r_1^{2n} + r_2^{2n}) \mu_0}{n (r_1^{2n} - r_2^{2n})} \right) \cdot k_{wn}^* (K''). \quad (6)$$

Коефіцієнти зв'язку між фазами обмотки статора

$$k_K = \frac{L_{K'K''}}{\sqrt{L_{K'K'} \cdot L_{K''K''}}}. \quad (7)$$

Електромагнітний момент ротора відносно статора

$$M(t) = \sum_{K=1}^m i_K(t) u_{pK}(t) / w_r. \quad (8)$$

Таблиця 2

Формула	Опис
$\varphi_z = \varphi_\tau / (mq)$	кут зубцевого кроку
$\varphi_g = \varphi_z k_{gt}$	кут пазу
$\varphi_p = \varphi_\tau k_{\varphi p}$	кут магніту
$r_1 = r_2 - \delta$	радіус магнітопроводу ротора
$\delta = \delta_1 + h_p / \mu_{rp}$	еквівалентний немагнітний проміжок між магнітопроводами
$k_{gt} = b_g / (\varphi_z r_2)$	коефіцієнт паз/зубцевий крок
$\varphi_{sm} = \varphi_\tau (1 - k_{\varphi p}) / 2$	кут максимальної ширини лінійного струмового контуру ротора
$\varphi_s = \varphi_{sm} \cdot 10^{-1}$	кут ширини лінійного струмового контуру
$w_{ph} = 2pqw_c$	кількість витків у фазі
$\varphi_\tau = \pi / p$	кут полюсів
$\omega_r(t) = 2\pi v_r(t) / 60$	кутова частота ротора
$\varphi_r(t) = \int \omega_r(t) dt$	позиція ротора відносно статора
$\varphi_{ph}(K) = (2\varphi_r(K - m)) / m$	початкові координати лінійних струмових контурів
$\theta_{w1}(K) = \varphi_{ph}(K) + 2p_1\varphi_\tau + q_1\varphi_z$	координата струмового контуру верхнього шару двошарової обмотки статора
$\theta_{w2}(K) = \theta_{w1}(K) - \varphi_\tau (1 - \beta)$	координата струмового контуру нижнього шару
$\theta_{p1} = 2\varphi_p$	координата першого контуру
$\theta_{p2} = \theta_{p1} + \varphi_\tau - \varphi_p - \varphi_s$	координата другого контуру
$k_{jw} = Wc / (r_2 \varphi_g)$	коефіцієнт густини струму в контурах статора
$k_{jp} = 1 / r_1 \varphi_s$	коефіцієнт густини струму в контурах ротора
$I_p = M_c h_p$	струм у струмових контурах
$K = 1, 2, \dots, m$	порядковий номер фази
$A_n(t) = A_{pn}(t) + A_{wn}(t)$	магнітний потенціал на координаті r_2
$A_{pn}(t) = j_{pn}(t) \frac{2r_1^{1+n} r_2^n \mu_0}{n (r_1^{2n} - r_2^{2n})}$	магнітний потенціал від магнітного поля постійних магнітів
$A_{wn}(t) = j_{wn}(t) \frac{r_2 (r_1^{2n} + r_2^{2n}) \mu_0}{n (r_1^{2n} - r_2^{2n})}$	магнітний потенціал від магнітного поля струмів статора

У даному дослідженні навантаження представлено активним опором і підключається до виводів обмотки генератора через 6-діодний мостовий випрямляч [11] (рис. 2). Застосовано комбінований підхід: параметри генератора (індукована напруга, індуктивність та коефіцієнти зв'язку) в середовищі Wolfram попередньо визначаються аналітичним методом за виразами (5)...(7). Також додатково виконується розрахунок індуктивності розсіювання пазів L_g , лобових частин L_e та

активного опору обмотки R_w за підручниками задля проєктування електричних машин [10]. Усі результати ($u_{pK}(t)$, $L_{K'K''}$, L_g , L_e , R_w , k_K та опір R_{cs}) експортуються до програми Micro-Cap для знаходження фазних струмів $i_A(t)$, $i_B(t)$, $i_C(t)$ трифазної обмотки генератора. У цій роботі швидкість обертання приймається сталою (відповідно до табл. 1), а часові залежності струмів отримуються з аналізу перехідного процесу електричного кола. Струми в Micro-Cap розраховуються методом перехідних процесів (transient analysis) у заданому проміжку часу та імпортуються назад до аналітичної моделі в середовище Wolfram для подальшого розрахунку електромагнітного моменту (8). На кожному кроці перехідного аналізу параметри машини використовуються для даної (сталой) швидкості, а часова змінність проявляється через струми кола, а не через зміну $w_r(t)$.

Для електричного кола без використання випрямляча напруги, наприклад, з активно-індуктивним навантаженням на кожній фазі (R_{eq} та L_{cs}), електричні струми можуть бути розраховані без використання Micro-Cap за системою рівнянь [8]

$$\begin{cases} (L_{AA} + L_e + L_g + L_{cs})i_A + L_{AB} \frac{di_B}{dt} + L_{AC} \frac{di_C}{dt} + (R_{eq} + R_w)i_A + u_{pA} = 0 \\ (L_{BB} + L_e + L_g + L_{cs})i_B + L_{BA} \frac{di_A}{dt} + L_{BC} \frac{di_C}{dt} + (R_{eq} + R_w)i_B + u_{pB} = 0; \\ (L_{CC} + L_e + L_g + L_{cs})i_C + L_{CA} \frac{di_A}{dt} + L_{CB} \frac{di_B}{dt} + (R_{eq} + R_w)i_C + u_{pC} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Опір трьох опорів R_{eq} (9), який еквівалентний одному опору з випрямлячем (рис. 2), визначено за виразом

$$R_{eq} = R_{cs} \left(\frac{\pi^2}{18} \right), \quad (10)$$

що встановлено на основі співвідношення між вхідною фазною напругою та випрямленою напругою схеми Ларіонова [11].

Задля перевірки чисельно-аналітичного методу в програмі Ansys Maxwell (рис. 1) було реалізовано модель методу скінченних елементів (FEM). Чисельно-аналітичні розрахунки виконувалися за допомогою Wolfram Mathematica/Wolfram System, а аналіз складного електричного кола (рис. 2) для чисельно-аналітичного методу – за допомогою програмного забезпечення Micro-Cap. Результати FEM порівнюються з чисельно-аналітичними результатами в наступному розділі задля перевірки точності чисельно-аналітичного методу шляхом порівняння електромагнітного моменту.

Порівняння результатів чисельно-аналітичного методу з результатами FEM (Ansys Maxwell). Задля верифікації чисельно-аналітичного методу розрахунку електромагнітного моменту

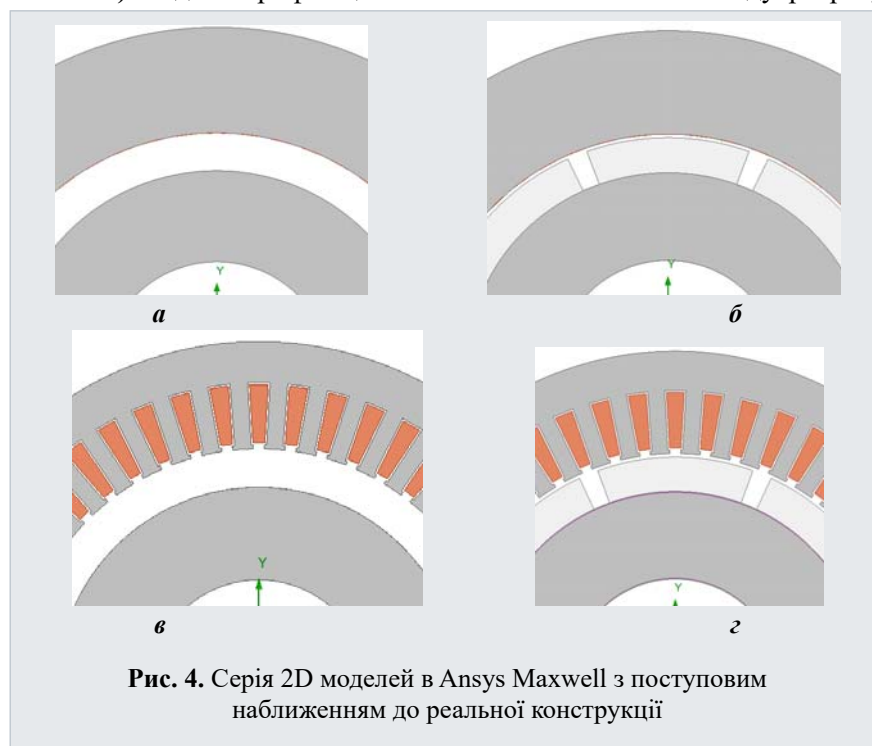


Рис. 4. Серія 2D моделей в Ansys Maxwell з поступовим наближенням до реальної конструкції

генератора проведено порівняння з результатами чисельного моделювання в програмному комплексі Ansys Maxwell. Оскільки чисельно-аналітичний метод базується на спрощеннях (лінеаризація характеристик намагнічування феромагнітних матеріалів, заміна постійних магнітів еквівалентними поверхневими струмами, представлення пазової обмотки тонкими струмовими контурами), задля адекватного порівняння в Ansys Maxwell створено серію 2D моделей з поступовим наближенням до реальної конструкції (рис. 4). На рис. 4 показано двовимірні моделі в Ansys Maxwell 2D: *a* – безпазова модель із

струмовими контурами та безпазова модель із тонкими еквівалентними магнітами; *b* – безпазова модель з реальними магнітами; *v* – модель з пазами та еквівалентними тонкими магнітами; *z* – повні моделі з лінійним залізом та з нелінійним залізом.

Базова модель *a* (рис. 4) в Ansys Maxwell максимально відповідає припущенням аналітичного методу: статор без пазів зі струмовими контурами на поверхні заліза статора товщиною 0,05 мм, відносна магнітна проникність феромагнітних матеріалів прийнята постійною ($\mu_r = 1000$). Ця ж геометрія (рис. 4, *a*) використовується для двох варіантів представлення магнітної системи ротора: з тонкими еквівалентними постійними магнітами товщиною 0,05 мм з еквівалентною намагніченістю $M'_p = M_p (h_p / 0,05)$ (табл. 1) або з еквівалентними струмовими контурами на поверхні ротора замість магнітів (як на рис. 3) з заданим струмом I_p (табл. 2). При цьому еквівалентний немагнітний проміжок δ розраховується відповідно до табл. 2.

Модель *b* (рис. 4) відновлює реальну геометрію постійних магнітів номінальної товщини (10 мм) та реальний немагнітний проміжок ($\delta = \delta_1 + h_p$) у разі збереження безпазової структури статора та лінійних магнітних властивостей заліза. Модель *v* (рис. 4) додає реальну пазову структуру статора з обмоткою, зберігаючи лінійні магнітні властивості заліза. Ця геометрія використовується з тонкими еквівалентними постійними магнітами товщиною 0,05 мм. Повна модель *z* (рис. 4) включає всі геометричні особливості конструкції (пази статора з обмоткою та магніти номінальної товщини). Ця ж геометрія використовується для двох варіантів розрахунку: зберігаючи лінійні магнітні властивості

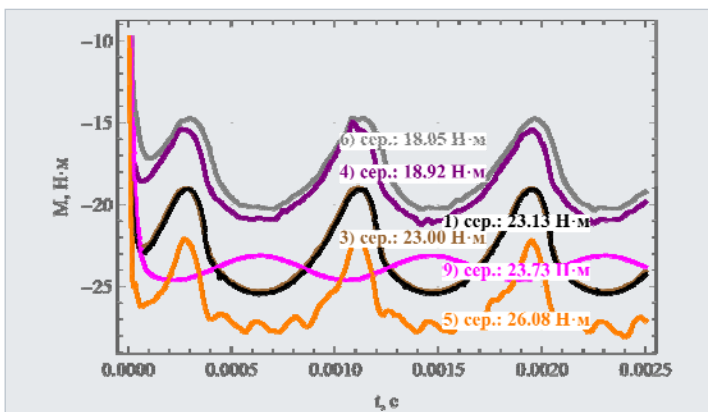


Рис. 5. Момент без врахування пазів в моделях Ansys Maxwell з різним ступенем спрощення (3-7, табл. 3), а також чисельно-аналітичного методу (1, 9, табл. 3)

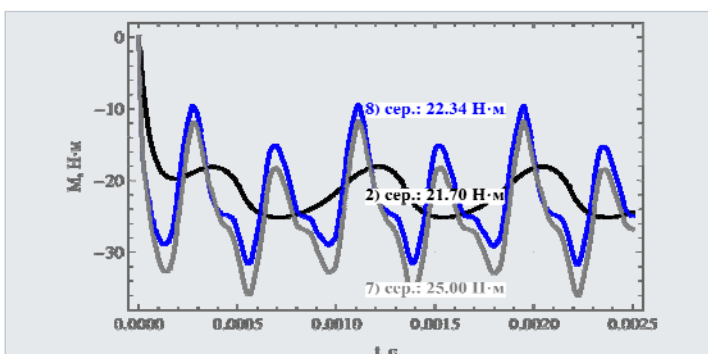


Рис. 6. Момент в Ansys Maxwell з лінійним (7, табл. 3) та нелінійним (8, табл. 3) залізом і з пазами в статорі, а також момент чисельно-аналітичного методу (2, табл. 3) з урахуванням індуктивності розсіювання пазів

заліза та з урахуванням нелінійної кривої намагнічування $B-H$ феромагнітного матеріалу магнітопроводів (сталь 1008 бібліотеки Ansys Maxwell), що дає змогу врахувати вплив ефекту магнітного насичення на розрахунок електромагнітного моменту генератора. Такий послідовний підхід дає можливість не лише оцінити точність аналітичного методу, але й кількісно визначити вплив кожного спрощення на результати розрахунку електромагнітного моменту генератора.

На рис. 5 та рис. 6 представлено часові залежності електромагнітного моменту генератора в межах електричного напівперіоду (0 мс...2,5 мс), розраховані різними методами: Ansys Maxwell 2D (для 4 моделей на рис. 4) та чисельно-аналітичний метод за виразами (2)...(8) для моделі на рис. 3 (яка відповідає моделі *a* на рис. 4). Результати демонструють чітку кореляцію між ступенем спрощення моделі та характером кривих моменту. Аналітичний метод показує відмінне узгодження з безпазовою моделлю із струмовими контурами j_p в Ansys Maxwell (модель *a*, рис. 4). Результати порівняння середніх значень електромагнітного моменту за період наведено в табл. 3.

Аналітичний метод показує відмінне узгодження з безпазовою моделлю в Ansys Maxwell (1 та 3, табл. 3).

Відносна похибка становить лише 0,6%, що підтверджує коректність програмної реалізації аналітичного методу за виразами (2)...(8) з електричною схемою з 6 діодами [11] (рис. 2) у програмі Micro-Cap.

Таблиця 3

№	Модель	Характеристика моделі	Момент, Н·м	Відхилення від повної FEM, %
1	Аналітична модель, рис. 3	Без врахування L_g (табл. 1), з схемою рис. 2 в Micro-Cap	23,13	+3,5
2	Аналітична модель, рис. 3	З урахуванням L_g (табл. 1), з схемою рис. 2 в Micro-Cap	21,70	-2,9
3	FEM модель <i>a</i> , рис. 4	Струмові контури, без пазів	23,00	+3,0
4	FEM модель <i>a</i> , рис. 4	Тонкі магніти, без пазів	18,92	-15,3
5	FEM модель <i>b</i> , рис. 4	Повнорозмірні магніти, без пазів	26,08	+16,7
6	FEM модель <i>b</i> , рис. 4	Тонкі магніти, з пазами статора	18,05	-19,2
7	FEM модель <i>z</i> , рис. 4	Повна, лінійне залізо ($\mu = \text{const}$)	25,00	+11,9
8	FEM модель <i>z</i> , рис. 4	Повна, нелінійне залізо $\mu(B)$	22,34	базова
9	Аналітична модель (рис. 3)	Без врахування L_g , з схемою за виразом (9)	23,73	+6,2

Представлення магнітів струмовими контурами (3, табл. 3) показує точніший результат відносно повної моделі (7, табл. 3) у порівнянні з використанням тонких еквівалентних магнітів (4, табл. 3). Тому ідея представлення магнітного поля постійних магнітів з допомогою граничної умови на поверхні ідеального магнітопроводу ротора виглядає недоцільною. Похибка від заміни повнорозмірних магнітів (5, табл. 3) струмовими контурами (3, табл. 3) становить (-11,8)%. Наявність зубцево-пазової структури статора (6, табл. 3) призводить до зменшення моменту на 4,6% порівняно з моделлю без пазів (4, табл. 3). Неврахування кривої намагнічування сталі магнітопроводів ротора і статора збільшує момент на 11,9% (7 та 8 в табл. 3).

Загалом, спрощення від повної FEM-моделі з лінійними магнітними властивостями (7, табл. 3) до простої аналітичної моделі (рис. 3, рис. 6) дає похибку розрахунку -8% (порівняння середнього моменту 25,00 Н·м та 23,00 Н·м). Ця похибка є результатом комплексного впливу всіх геометричних спрощень: заміни реальних магнітів струмовими контурами, відсутності зубцево-пазової структури в аналітичній моделі, а також неврахування індуктивності розсіювання пазів в електричному колі простої моделі. У разі врахування нелінійної кривої намагнічування феромагнітних матеріалів у повній FEM-моделі середній момент зменшується до 22,34 Н·м (рис. 6, табл. 3).

Якщо в чисельно-аналітичному методі розрахунку додатково врахувати індуктивність розсіювання пазів в електричному колі за методами [10] (2, табл. 3), розрахункове значення моменту становить 21,70 Н·м (рис. 6), що дає похибку менше 3% відносно повної FEM-моделі з нелінійними властивостями матеріалів (порівняння 2 та 8 у табл. 3).

На обох рисунках (рис. 5 і рис. 6) помітний вплив 6-діодного випрямляча напруги, який спричиняє триразове просідання електромагнітного моменту протягом одного електричного напівперіоду. Цей ефект найбільш виражений на кривих моделей без пазів (рис. 5). У повній моделі (7 та 8 у табл. 3) на кривих моменту (рис. 6) додатково проявляються зубцеві гармоніки, період яких у $2m$ разів менший за електричний напівперіод струму в фазах обмотки статора.

Виконано моделювання аналітичним методом без випрямляча напруги з трьома еквівалентними резисторами R_{eq} (10) з використанням рівняння (9) для знаходження струмів у фазах обмотки статора замість моделювання електричного кола в програмі Micro-Cap. Встановлено криву з середнім моментом 23,73 Н·м (9, табл. 3) без впливу гармонік від випрямляча напруги, яка є синусоїдою з мінімальним і максимальним значеннями – відповідно 23,1 і 24,6 Н·м (рис. 5). Порівнюючи криві на рис. 5 з середніми моментами 23,73 Н·м та 23,13 Н·м (9 та 1 у табл. 3), відхилення становить 2,6%. Тому для виконання попередніх наближених розрахунків генератора (рис. 1) з незначною похибкою є можливість використовувати чисельно-аналітичний метод розрахунку та рівняння (9) з еквівалентним опором (10) замість електричної схеми в Micro-Cap (рис. 2).

Висновки. У роботі проведено встановлення адекватності чисельно-аналітичного методу розрахунку електромагнітних характеристик генераторів з постійними магнітами шляхом системного порівняння з результатами моделювання методом скінченних елементів (FEM) у програмному комплексі Ansys Maxwell.

Встановлено, що чисельно-аналітичний метод, заснований на методі інтегральних перетворень з урахуванням комплексного впливу всіх застосованих геометричних спрощень,

демонструє достатньо високу точність ($\pm 3,5\%$) під час розрахунку середнього за період електромагнітного моменту порівняно з повною двовимірною моделлю в Ansys Maxwell. Порівняння з ідентичною до аналітичної моделлю в Ansys Maxwell показало відмінне узгодження результатів з відносною похибкою 0,6%, що підтверджує коректність аналітичного розв'язання рівняння магнітного поля, програмної реалізації чисельних розрахунків разом з програмою Micro-Cap задля виконання розрахунків трифазного електричного кола.

Заміна постійних магнітів реальних розмірів еквівалентними струмовими контурами на поверхні магнітопроводу ротора призводить до похибки 11,8%. При цьому використання дуже тонких еквівалентних магнітів на поверхні ротора в FEM-моделях дає ще більшу похибку (27,5%). Це свідчить про перевагу представлення магнітів з допомогою граничних умов максимально короткими лінійними струмовими контурами на краях уявних магнітів.

Для попередніх розрахунків генератора у випадку активно-індуктивного навантаження на виході трифазного випрямляча струму є можливість з достатньою точністю (похибка 6,2 %) використати спрощену електричну схему без трифазного випрямляча, але з трьома еквівалентними резисторами та індуктивністю на кожній фазі, що дасть змогу не використовувати програму Micro-Cap задля розрахунку трифазного електричного кола.

Результати дослідження підтверджують адекватність та придатність чисельно-аналітичного методу для попередніх розрахунків і вибору конструктивних параметрів генераторів з радіальним розташуванням постійних магнітів. Метод простий у використанні (за попередньої реалізації його у вигляді простої комп'ютерної програми), забезпечує достатню точність за значно менших обчислювальних витратах та менших витратах часу на виконання FEM-моделювання, що робить його ефективним інструментом для оптимізації конструкції електричної машини на етапі проектування.

Встановлені межі застосовності методу: чисельно-аналітичний метод є найбільш ефективним для машин з відносно рівномірним немагнітним проміжком та безпазовою або слабкопазовою структурою статора. Для машин з вираженою зубцево-пазовою структурою та значним магнітним насиченням метод забезпечує попередні оцінки з подальшим уточненням за допомогою FEM. Напрямою подальшого розвитку методу є введення додаткових коефіцієнтів, які можуть збільшити точність розрахунку за певних умов. Наприклад, коефіцієнти Картера та насичення магнітопроводів для розширення діапазону застосовності.

Робота фінансується державною програмою «Розроблення електромеханічного устаткування підвищеної енергоефективності та надійності, систем діагностики об'єктів електроенергетики» («Агрегат-4») (відомча прикладна, державний реєстраційний номер 0125U000010).

1. Zhu Z.Q., Howe D. Electrical machines and drives for electric, hybrid, and fuel cell vehicles. *Proceedings of the IEEE*. April, 2007. Vol. 95. Iss. 4. Pp. 746-765. DOI: <https://doi.org/10.1109/JPROC.2006.892482>.
2. Wu S., Shi T., Guo L., Wang H., Xia C. Accurate Analytical Method for Magnetic Field Calculation of Interior PM Motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 2021. Vol. 36. No 1. Pp. 325-337. DOI: <https://doi.org/10.1109/TEC.2020.3000753>.
3. Polinder H., Hoesijmakers M.J. Analytic calculation of the magnetic field in PM machines. IAS-97. Conference Record of the 1997 IEEE Industry Applications Conference Thirty-Second *Industry Applications Society Annual Meeting*. New Orleans, LA, USA, October 5-9, 1997. Pp. 35-41. DOI: <https://doi.org/10.1109/IAS.1997.643005>.
4. Liu Z.J., Li J.T. Accurate Prediction of Magnetic Field and Magnetic Forces in Permanent Magnet Motors Using an Analytical Solution. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 2008. Vol. 23. No 3. Pp. 717-726. DOI: <https://doi.org/10.1109/TEC.2008.926034>.
5. Elosegui I., Martinez-Iturralde M., Rico A.G., Florez J., Echeverria J.M., Fontan L. Analytical design of synchronous permanent magnet motor/generators. IEEE International Symposium on *Industrial Electronics (ISIE)*, Vigo, Spain, June 4-7, 2007. Pp. 1165-1170. DOI: <https://doi.org/10.1109/ISIE.2007.4374763>.
6. Ращепкин А.П., Кондратенко И.П., Карлов А.Н. Электромагнитное силовое воздействие на жидкий металл в кристаллизаторах сортовых машин непрерывного литья заготовок: монография. К.: Институт электродинамики НАН Украины, 2018. 314 с.
7. Ращепкин А.П., Кондратенко И.П., Карлов О.М., Кришук Р.С. Магнітоелектричний перетворювач енергії морських хвиль. *Технічна електродинаміка*. 2021. № 4. С. 25-34. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2021.04.025>.
8. Кондратенко И.П., Кришук Р.С. Математична модель магнітоелектричної машини. *Технічна електродинаміка*. 2024. № 2. С. 52-61. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2024.02.052>.
9. Ansys Maxwell. Low-Frequency Electromagnetic Simulation. URL: <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-maxwell> (дата доступу 20.01.2026).
10. Копылов И.П., Горяинов Ф.А., Клоков Б.К., Морозкин В.П., Токарев Б.Ф. Проектирование электрических машин. М.: Энергия, 1980. 496 с.

11. Руденко В.С., Сенько В.И., Чиженко И.М. Основы преобразовательной техники. М: Высшая школа, 1980. 424 с.
12. Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/> (дата доступу 20.01.2026).

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL AND NUMERICAL-ANALYTICAL MODELING OF PERMANENT MAGNET GENERATORS

I.P. Kondratenko, V.V. Grebenikov, R.V. Gamaliia, R.S. Kryshchuk,
Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
56 Beresteyskiy Ave., Kyiv, 03057, Ukraine. E-mail: dep7ied@ukr.net; elm1153@gmail.com.

The paper investigates the adequacy of a simplified mathematical model of a numerical-analytical method for calculating low-power permanent magnet generators for autonomous power systems operating with a rectifier and active load. The object of study is generators with radial arrangement of permanent magnets on the rotor surface. The model considered is based on an idealized representation of the air gap between the rotor and stator and does not take into account the tooth-and-groove structure, the actual geometric dimensions of the permanent magnets, and the nonlinear magnetic properties of ferromagnetic materials. To assess the adequacy of the model, a comparative analysis of the results of numerical-analytical calculations with the data of high-precision modeling using the finite element method in the Ansys Maxwell software package was performed. A series of FEM models of generators with varying levels of detail and complexity were constructed. The paper presents mathematical expressions of the numerical-analytical method based on the Fourier transform, oriented towards computer implementation. The modeling was performed taking into account the electrical circuit of the generator, which includes a three-phase rectifier and an active load. The time dependencies of the magnetic field distribution and electromagnetic torque were calculated. The errors in the calculation of the electromagnetic torque obtained by the numerical-analytical method were determined in comparison with FEM models of varying degrees of detail. The results demonstrate the capabilities and limitations of the simplified mathematical model and confirm the feasibility of its use for preliminary calculations and optimization of the parameters of permanent magnet generators for autonomous renewable energy systems. References 12, figures 6, tables 3.

Keywords: modeling, electric generator, renewable energy, permanent magnets, energy characteristics, electromagnetic torque, numerical-analytical method, finite element method.

1. Zhu Z.Q., Howe D. Electrical machines and drives for electric, hybrid, and fuel cell vehicles. *Proceedings of the IEEE*. April, 2007. Vol. 95. Iss. 4. Pp. 746-765. DOI: <https://doi.org/10.1109/JPROC.2006.892482>.
2. Wu S., Shi T., Guo L., Wang H., Xia C. Accurate Analytical Method for Magnetic Field Calculation of Interior PM Motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 2021. Vol. 36. No 1. Pp. 325-337. DOI: <https://doi.org/10.1109/TEC.2020.3000753>.
3. Polinder H., Hoeijmakers M.J. Analytic calculation of the magnetic field in PM machines. IAS-97. Conference Record of the 1997 IEEE Industry Applications Conference Thirty-Second *Industry Applications Society Annual Meeting*, New Orleans, LA, USA, October 5-9, 1997. Pp. 35-41. DOI: <https://doi.org/10.1109/IAS.1997.643005>
4. Liu Z.J., Li J.T. Accurate Prediction of Magnetic Field and Magnetic Forces in Permanent Magnet Motors Using an Analytical Solution. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 2008. Vol. 23. No 3. Pp. 717-726. DOI: <https://doi.org/10.1109/TEC.2008.926034>.
5. Elosegui I., Martinez-Iturralde M., Rico A.G., Florez J., Echeverria J.M., Fontan L. Analytical design of synchronous permanent magnet motor/generators. IEEE International Symposium on *Industrial Electronics (ISIE)*, Vigo, Spain, June 4-7, 2007. Pp. 1165-1170. DOI: <https://doi.org/10.1109/ISIE.2007.4374763>.
6. Raschepkin A.P., Kondratenko I.P., Karlov O.M. Electromagnetic force impact on liquid metal in crystallizers of continuous casting machines for billets. Kyiv: Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2018. 314 p. (Rus)
7. Raschepkin A.P., Kondratenko I.P., Karlov A.N., Kryshchuk R.S. Magneto-electric energy converter of sea waves. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2021. No 4. Pp. 25-34. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2021.04.025> (Ukr)
8. Kondratenko I.P., Kryshchuk R.S. Mathematical model of a magnetoelectric machine. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2024. No 2. Pp. 52-61. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2024.02.052> (Ukr)
9. Ansys Maxwell. Low-Frequency Electromagnetic Simulation. URL: <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-maxwell> (accessed at 20.01.2026).
10. Kopylov I. P., Goryainov F. A., Klokov B. K., Morozkin V. P., Tokarev B. F. Design of electrical machines. Moskva: Energiia, 1980. 496 p. (Rus)
11. Rudenko V.S., Senko V.I., Chizhenko I.M. Fundamentals of Conversion Technology. Moskva: Vysshaya shkola, 1980. 424 p. (Rus)
12. Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/> (accessed at 20.01.2026).

Надійшла 10.12.2025
Прийнята 16.02.2026