

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ
У ДВООБМОТКОВИХ ТРАНСФОРМАТОРАХ**

М.С. Сегеда¹, докт.техн.наук, **Є.В. Черемних**², докт.фіз.-мат.наук, **П.Ф. Гоголюк**³, канд.техн.наук,
Т.А. Мазур⁴, канд.техн.наук, **Ю.В. Близняк**⁵

Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна.

E-mail: mseheda@ukr.net, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, mazyr@ukr.net, blyznakyura@gmail.com

Запропоновано математичну модель для дослідження хвильових процесів у двообмоткових трансформаторах з урахуванням електромагнітних зв'язків між витками обмоток і обмотками. Задля розв'язання диференційно-інтегральних рівнянь у частинних похідних запропоновано метод відокремлення змінних. Бібл. 12, рис. 2.

Ключові слова: обмотка трансформатора, математичне моделювання, частинні похідні, розподілені параметри, імпульсна хвиля, хвильові процеси.

I. Вступ. Під час моделювання хвильових процесів в трансформаторах, довжина хвиль яких менша чи співрозмірна з просторовими розмірами трансформатора, виникає необхідність представлення заступної схеми з розподіленими параметрами [1–6]. Розрахунок високочастотних процесів в обмотках трансформаторів з врахуванням розподіленості параметрів набагато складніший у порівнянні зі зосередженими параметрами, тому що виникає необхідність розв'язання рівнянь у частинних похідних [1, 7, 8, 9].

Математичне моделювання хвильових процесів у обмотках трансформатора можна загалом розділити на такі підходи: моделювання методами «білої скриньки», «чорної скриньки» та «сірої скриньки» [10, 11]. Моделювання першим методом вимагає формування математичних моделей елементів електроенергетичної системи (ЕЕС) з урахуванням усіх параметрів заступної схеми елемента, що дає змогу досліджувати його внутрішні процеси.

Моделювання методом «чорної скриньки» не вимагає формування математичної моделі кожного елемента ЕЕС і асоціюється з підходом де координати процесу моделі елемента обчислені чи виміряні на початку й у його кінці. У такому разі використовується метод змінних (координат) стану, який дає змогу аналізувати й синтезувати ЕЕС на електромагнітну сумісність усіх її елементів, а також визначати струми і напругу у будь-який момент часу.

Компромідом цих двох методів є метод «сірої скриньки», який їх об'єднує [3].

Основна мета формування математичної моделі трансформатора на підставі методу «білої скриньки» – це обчислення напруги вздовж обмотки під час дії на них імпульсних перенапруг різної форми та вільних коливань у середині обмоток, що дає змогу координувати їхню ізоляцію.

Аналіз внутрішніх хвильових процесів у обмотках трансформатора доцільно виконувати в такій послідовності: формування диференціальних рівнянь, які описують ці процеси на підставі заступної схеми обмотки; задання граничних умов на кінцях обмотки; визначення початкового розподілу напруги вздовж обмотки за дії на неї імпульсу перенапруги; визначення кінцевого розподілу напруги: початковий розподіл напруги вздовж обмотки визначається як суперпозиція кінцевого розподілу напруги та функції вільних коливань для початкового моменту ($t = 0$); розв'язання рівнянь за дії хвилі довільної форми.

© Сегеда М.С., Черемних Є.В., Гоголюк П.Ф., Мазур Т.А., Близняк Ю.В., 2020
ORCID ID: ¹<https://orcid.org/0000-0001-8459-5758>; ²<https://orcid.org/0000-0002-4621-2426>;
³<https://orcid.org/0000-0003-0002-4638>; ⁴<https://orcid.org/0000-0001-5021-4013>;
⁵<https://orcid.org/0000-0002-4914-2283>

Хвильові процеси в обмотках трансформатора зумовлюють перенапруги відносно землі, а також між витками обмотки та його обмотками.

Амплітуди та градієнти перенапруги обмоток можна зменшити шляхом зменшення внутрішніх коливних напруг в обмотці; дією на імпульс перенапруги, який діє на обмотку; впливом на напруги нейтралі обмоток трансформатора. Ці три чинники є основними в схемах захисту трансформатора від перенапруг.

Для дослідження хвильових процесів у трансформаторах під час дії зовнішніх перенапруг необхідно відтворити форму хвилі. Рівняння, яке характеризує форму імпульсної хвилі, має вигляд [12]

$$e_{imn} = E(e^{-at} - e^{-bt}), \quad (1)$$

де E – максимальне значення напруги хвилі; a і b – параметри хвилі; t – час.

Імпульсна хвиля характеризується такими параметрами: максимальним значенням (амплітудою); тривалістю фронту – частиною хвилі від 0 до E_{max} ; довжиною хвилі – частина хвилі від E_{max} до її половини.

Стандартна хвиля приймається за 50% імпульсної напруги з довжиною фронту 1 мкс і довжиною хвилі 50 мкс. Тому необхідно правильно вибрати параметри рівняння (1), якщо a і b мають дійсні значення, то рівняння (1) відтворює хвилю з закругленим фронтом і експонентним «хвостом».

Якщо на обмотку трансформатора, яка знаходиться у кінці лінії електропередавання, набігає імпульс напруги, на підставі першого закону комутації (струм в індуктивності не змінюється стрибком) обмотка в перший момент є як конденсатор з ємністю $C_{обв}$. Виходячи з цього напругу на виводах обмотки можна записати у вигляді

$$u = 2e_{imn} \left(1 - e^{-\frac{t}{Z_C C_{обв}}}\right), \quad (2)$$

де Z_C – хвильовий опір лінії електропередавання; $C_{обв}$ – вхідна ємність обмотки; e_{imn} – напруга імпульсної хвилі; t – час.

Враховуючи, що обмотки ВН 110 кВ трансформатора в середньому мають $C_{обв} = 700$ пф, а хвильовий опір лінії електропередавання $Z_C = 400$ Ом, то напруга на обмотці швидко досягає $2e_{imn}$.

Мета роботи. Розроблення математичної моделі та дослідження хвильових процесів в обмотках високовольтних двообмоткових трансформаторів за дії на них імпульсних перенапруг, розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних методом відокремлення змінних.

II. Математична модель. Математичну модель двообмоткового трансформатора розроблено на підставі запропонованої заступної схеми (рис. 1).

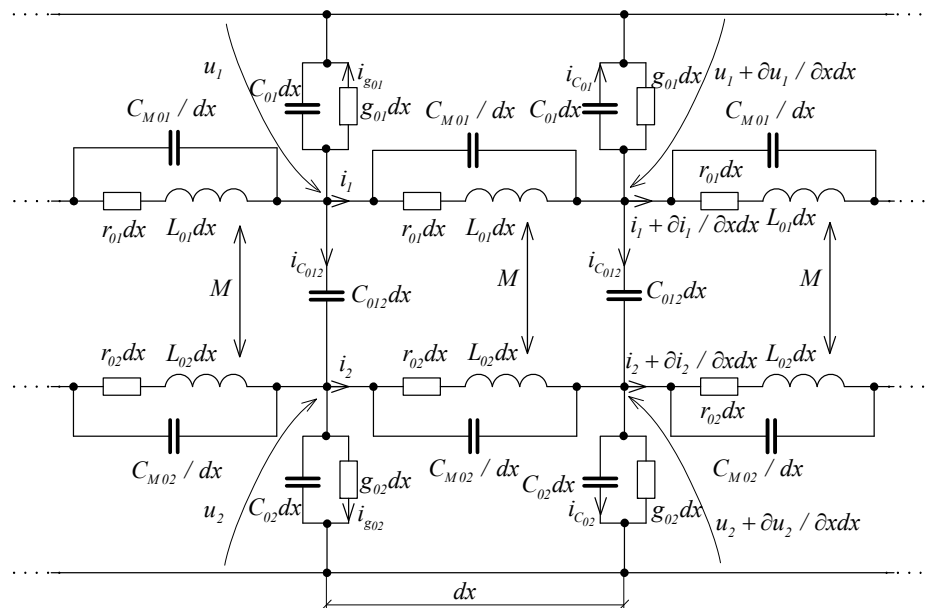


Рис. 1

Диференціальні рівняння зміни струмів, які протікають через обмотки, мають вигляд

$$-\partial i_1(x, t) / \partial x = g_{01} u_1(x, t) + C_{01} \partial u_1(x, t) / \partial t - C_{M01} \partial^3 u_1(x, t) / (\partial x^2 \partial t) + C_{012} \partial(u_1(x, t) - u_2(x, t)) / \partial t; \quad (3)$$

$$-\partial i_2(x, t) / \partial x = g_{02} u_2(x, t) + C_{02} \partial u_2(x, t) / \partial t - C_{M02} \partial^3 u_2(x, t) / (\partial x^2 \partial t) + C_{012} \partial(u_2(x, t) - u_1(x, t)) / \partial t. \quad (4)$$

Спад напруги на одиницю довжини витка обмоток

$$-\partial u_1(x, t) / \partial x = r_{01} i_1(x, t) + \int_0^l M_1(x, s) \partial i_1(s, t) / \partial t ds + L_{01} \partial i_1(x, t) / \partial t + M \partial i_2(x, t) / \partial t; \quad (5)$$

$$-\partial u_2(x, t) / \partial x = r_{02} i_2(x, t) + \int_0^l M_2(x, s) \partial i_2(s, t) / \partial t ds + L_{02} \partial i_2(x, t) / \partial t + M \partial i_1(x, t) / \partial t. \quad (6)$$

Розв'язання рівнянь (3) – (6) запропоновано у зведені крайової задачі щодо хвильових процесів в обмотках трансформатора скінченої довжини до задачі коливань у обмотках нескінченної довжини. З цією метою функції початкових крайових умов продовжуються на відрізок $(-l, 0)$ непарним способом, а потім ще раз періодично на всю нескінчену вісь. Довизначена таким чином крайова задача має крайові та початкові умови на всій нескінченній осі, й на відрізку $(-l, 0)$ вони тотожні початковій крайовій задачі.

Рівняння (3) і (4) запишемо так

$$-\partial i_1(x, t) / \partial x = g_{01} u_1(x, t) + (C_{01} - C_{M01} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} + C_{012} \frac{\partial}{\partial t} (u_1(x, t) - u_2(x, t)); \quad (7)$$

$$-\partial i_2(x, t) / \partial x = g_{02} u_2(x, t) + (C_{02} - C_{M02} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} + C_{012} \frac{\partial}{\partial t} (u_2(x, t) - u_1(x, t)). \quad (8)$$

Диференціюємо (7) і (8) за x , отримуємо

$$\partial^2 i_1(x, t) / \partial x^2 = g_{01} (-\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}) + (C_{01} - C_{M01} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}) + C_{012} \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}); \quad (9)$$

$$\partial^2 i_2(x, t) / \partial x^2 = g_{02} (-\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}) + (C_{02} - C_{M02} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}) + C_{012} \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}). \quad (10)$$

Підставляємо (5) і (6) відповідно у (9) і (10) та отримуємо

$$\begin{aligned} \partial^2 i_1(x, t) / \partial x^2 = & g_{01} (r_{01} i_1(x, t) + \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} ds + L_{01} \partial i_1(x, t) / \partial t + M \partial i_2(x, t) / \partial t) + \\ & + (C_{01} - C_{M01} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial t} (r_{01} i_1(x, t) + \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} ds + L_{01} \partial i_1(x, t) / \partial t + M \partial i_2(x, t) / \partial t) + \\ & + C_{012} \frac{\partial}{\partial t} (r_{01} i_1(x, t) + \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} ds + L_{01} \partial i_1(x, t) / \partial t + M \partial i_2(x, t) / \partial t - \end{aligned} \quad (11)$$

$$-r_{02} i_2(x, t) - \int_0^l M_2(x, s) \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} ds - L_{02} \partial i_2(x, t) / \partial t - M \partial i_1(x, t) / \partial t);$$

$$\begin{aligned} \partial^2 i_2(x, t) / \partial x^2 = & g_{02} (r_{02} i_2(x, t) + \int_0^l M_2(x, s) \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} ds + L_{02} \partial i_2(x, t) / \partial t + M \partial i_1(x, t) / \partial t) + \\ & + (C_{02} - C_{M02} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial t} (r_{02} i_2(x, t) + \int_0^l M_2(x, s) \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} ds + L_{02} \partial i_2(x, t) / \partial t + M \partial i_1(x, t) / \partial t) + \\ & + C_{012} \frac{\partial}{\partial t} (r_{02} i_2(x, t) + \int_0^l M_2(x, s) \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} ds + L_{02} \partial i_2(x, t) / \partial t + M \partial i_1(x, t) / \partial t - \end{aligned} \quad (12)$$

$$-r_{01} i_1(x, t) - \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} ds - L_{01} \partial i_1(x, t) / \partial t - M \partial i_2(x, t) / \partial t).$$

З рівнянь (11) і (12) вирази з інтегралами запишемо так

$$F_1(x, t) = g_{01} \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} ds + (C_{01} - C_{M01} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M_1(x, s) \frac{i_1(s, t)}{\partial t} ds +$$

$$+ C_{012} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M_1(x, s) (\frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t}) ds;$$

$$F_2(x, t) = g_{02} \int_0^l M_2(x, s) \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} ds + (C_{02} - C_{M02} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M_2(x, s) \frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} ds +$$

$$+ C_{012} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l M_2(x, s) (\frac{\partial i_2(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t}) ds.$$

Тоді рівняння (11) і (12) приймають вигляд, залишивши у лівій частині i_1 та i_2 і їхні похідні,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (i_1(x, t) + C_{M01} r_{01} \frac{\partial i_1(x, t)}{\partial t} + (C_{M01} M + C_{M01} L_{01}) \partial^2 i_2(x, t) / \partial t^2) - g_{01} r_{01} i_1(x, t) -$$

$$- (g_{01} L_{01} + r_{01} (C_{01} + C_{012})) \frac{\partial i_1(x, t)}{\partial t} + (C_{012} r_{02} - g_{01} M) \frac{\partial i_2(x, t)}{\partial t} +$$

$$+ (C_{012} M - C_{012} L_{01}) \frac{\partial i_1^2(x, t)}{\partial t^2} - (M(C_{01} + C_{012}) - C_{012} L_{02}) \frac{\partial i_2^2(x, t)}{\partial t^2} = F_1(x, t);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (i_2(x, t) + C_{M02} r_{02} \frac{\partial i_2(x, t)}{\partial t} + (C_{M02} M + C_{M02} L_{02}) \partial^2 i_2(x, t) / \partial t^2) - g_{02} r_{02} i_2(x, t) -$$

$$- (g_{02} L_{02} - r_{02} (C_{02} + C_{012})) \frac{\partial i_2(x, t)}{\partial t} + (C_{012} r_{01} - g_{02} M) \frac{\partial i_1(x, t)}{\partial t} +$$

$$+ (C_{012} M - C_{012} L_{02}) \frac{\partial i_2^2(x, t)}{\partial t^2} - (M(C_{02} + C_{012}) - C_{012} L_{01}) \frac{\partial i_1^2(x, t)}{\partial t^2} = F_2(x, t).$$

Позначимо для функції $f(x, t)$, заданої на інтервалі $(0, L)$, числа

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin(\frac{k\pi x}{L}) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

тоді $f(x, t)$ відновлюється за коефіцієнтами b_k

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L} x), \quad x \in (0, L).$$

Позначимо

$$i_1(x, t) = \sum_k C_k(t) \sin(\frac{k\pi}{L} x); \quad i_2(x, t) = \sum_k D_k(t) \sin(\frac{k\pi}{L} x); \quad F_i(x, t) = \sum_k F_{ik}(t) \sin(\frac{k\pi}{L} x),$$

де $i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots$

Зауважимо, що $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sin(\frac{k\pi}{L} x)) = -(\frac{k\pi}{L})^2 \sin(\frac{k\pi}{L} x)$, тоді з рівнянь (15) і (16) одержимо

$$(C_{012} M - C_{012} L_{01}) \frac{dC_k^2(t)}{dt^2} - ((k\pi/L)^2 C_{M01} r_{01} + (g_{01} L_{01} + r_{01} (C_{01} + C_{012}))) \frac{dC_k(t)}{dt} -$$

$$- (k\pi/L)^2 (C_{M01} M + C_{M01} L_{01}) + (M(C_{01} + C_{012}) - C_{012} L_{02}) \frac{dD_k^2(t)}{dt^2} + (C_{012} r_{02} - g_{01} M) \frac{dD_k(t)}{dt} -$$

$$- ((k\pi/L)^2 + g_{01} r_{01}) C_k(t) = F_{1k}(t);$$

$$(C_{012} M - C_{012} L_{02}) \frac{dD_k^2(t)}{dt^2} - ((k\pi/L)^2 C_{M02} r_{02} + r_{02} (C_{02} + C_{012})) \frac{dD_k(t)}{dt} -$$

$$- (k\pi/L)^2 (C_{M02} M + C_{M02} L_{02}) + (M(C_{02} + C_{012}) - C_{012} L_{01}) \frac{dC_k^2(t)}{dt^2} + (C_{012} r_{01} - g_{02} M) \frac{dC_k(t)}{dt} -$$

$$- ((k\pi/L)^2 + g_{02} r_{02}) D_k(t) = F_{2k}(t),$$

де $k = 1, 2, \dots$.

Запишемо рівняння (20) і (21) у матрично-векторній формі, тобто

$$S_k \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt^2} + P_k \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt} + Q_k \vec{X}_k(t) = \vec{F}_k(t), \quad (22)$$

$$\text{де } \vec{X}_k(t) = \begin{pmatrix} C_k(t) \\ D_k(t) \end{pmatrix}; \vec{F}_k(t) = \begin{pmatrix} F_{1k}(t) \\ F_{2k}(t) \end{pmatrix};$$

$$S_k = \begin{pmatrix} (C_{012}M - C_{012}L_{01}) & -((k\pi/L)^2(C_{M01}M + C_{M01}L_{01}) + (M(C_{01} + C_{012}) - C_{012}L_{02})) \\ -((k\pi/L)^2(C_{M02}M + C_{M02}L_{02}) + (M(C_{02} + C_{012}) - C_{012}L_{01})) & (C_{012}M - C_{012}L_{02}) \end{pmatrix};$$

$$P_k = \begin{pmatrix} -((k\pi/L)^2 C_{M01}r_{01} + (g_{01}L_{01} + r_{01}(C_{01} + C_{012}))) & C_{012}r_{02} - g_{01}M \\ C_{012}r_{01} - g_{02}M & -((k\pi/L)^2 C_{M02}r_{02} + r_{02}(C_{02} + C_{012})) \end{pmatrix};$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} -(\frac{k\pi}{L})^2 - g_{01}r_{01} & 0 \\ 0 & -(\frac{k\pi}{L})^2 - g_{02}r_{02} \end{pmatrix};$$

$k = 1, 2, \dots$

Згідно (17), (18) і (19)

$$F_{ik}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F_i(x, t) \sin(\frac{k\pi}{L} x) dx, \quad (23)$$

де $i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots$

Згідно (17) і (18) отримаємо

$$\begin{aligned} F_1(x, t) = & g_{01} \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial i_1(s, t)}{\partial t} ds + C_{01} \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial^2 i_1(s, t)}{\partial t^2} ds - C_{M01} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l M_1(x, s) \frac{\partial^2 i_1(s, t)}{\partial t^2} ds + \\ & + C_{012} \int_0^l M_1(x, s) (\frac{\partial^2 i_1(s, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 i_2(s, t)}{\partial t^2}) ds = g_{01} \int_0^l M_1(x, s) (\sum_k \frac{dC_k(t)}{dt} \sin(k\pi s / L)) ds + \\ & + C_{01} \int_0^l M_1(x, s) (\sum_k \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \sin(k\pi s / L)) ds - C_{M01} \int_0^l \frac{\partial^2 M_1(x, s)}{\partial x^2} (\sum_k \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \sin(k\pi s / L)) ds + \\ & + C_{012} \int_0^l M_1(x, s) (\sum_k (\frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} - \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2}) \sin(k\pi s / L)) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Зведення диференційно-інтегрального рівняння до диференційного можливо тоді, коли функція $M_1(x, s)$ задовольняє умові

$$\partial^2 M_1(x, s) / \partial x^2 = \gamma_1^2 M_1(x, s), \quad (25)$$

де $\gamma_1 = \sqrt{C_{01} / C_{M01}}$.

Тоді з (24) випливає

$$F_1(x, t) = \sum_l \int_0^l M_1(x, s) \sin(\frac{l\pi}{L} s) ds (g_{01} \frac{dC_k(t)}{dt} + (C_{01} - C_{M01}\gamma_1^2 + C_{012}) \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2}). \quad (26)$$

Позначимо

$$\tilde{C}_{012}^{(1)} = C_{01} - C_{M01}\gamma_1^2 + C_{012}, \quad (27)$$

тоді

$$F_1(x, t) = \sum_l \int_0^l M_1(x, s) \sin(\frac{l\pi}{L} s) ds (g_{01} \frac{dC_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(1)} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2}). \quad (28)$$

Підставимо в (23) $i = 1$, отримаємо

$$F_{1k}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F_1(x,t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sum_1^{\infty} \left(\int_0^1 M_1(x,s) \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \left(g_{01} \frac{dC_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(1)} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx. \quad (29)$$

Позначивши

$$m_{kl} = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^1 M_1(x,s) \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad (30)$$

отримаємо

$$F_{1k}(t) = \sum_1^{\infty} m_{kl} \left(g_{01} \frac{dC_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(1)} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} \right). \quad (31)$$

Так як функція $M_1(x,s)$ є спадною, то розв'язати рівняння (25) можна так $M_1(x,s) = M_{01} e^{-\gamma_1|x-s|}$, де M_{01} – власна індуктивність витка первинної обмотки трансформатора.

Тоді з (30) випливає

$$\begin{aligned} m_{kl} &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^1 M_{01} e^{-\gamma_1|x-s|} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^x M_{01} e^{-\gamma_1(x-s)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx + \int_x^1 M_{01} e^{-\gamma_1(s-x)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^x M_{01} e^{-\gamma_1(x-s)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_x^1 M_{01} e^{-\gamma_1(s-x)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = m'_{kl} + m''_{kl}, \end{aligned} \quad (32)$$

де $m'_{kl} = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^x M_{01} e^{-\gamma_1(x-s)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$; $m''_{kl} = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_x^1 M_{01} e^{-\gamma_1(s-x)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$.

Аналогічно до (25) позначимо

$$\partial^2 M_2(x,s) / \partial x^2 = \gamma_2^2 M_2(x,s), \quad (33)$$

де $\gamma_2 = \sqrt{C_{02} / C_{M02}}$.

Далі згідно з (13), (19), (33) рівняння (14) запишемо

$$\begin{aligned} F_2(x,t) &= g_{02} \int_0^1 M_2(x,s) \frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t} ds + (C_{02} - C_{M02} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \int_0^1 M_2(x,s) \frac{\partial^2 i_2(s,t)}{\partial t^2} ds + \\ &+ C_{012} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M_2(x,s) \left(\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t} \right) ds = g_{02} \int_0^1 M_2(x,s) \left(\sum_k^{\infty} \frac{dD_k(t)}{dt} \sin\left(\frac{k\pi}{L}s\right) \right) ds + \\ &+ C_{02} \int_0^1 M_2(x,s) \left(\sum_k^{\infty} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{k\pi}{L}s\right) \right) ds - C_{M02} \int_0^1 \gamma_2^2 M_2(x,s) \left(\frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{k\pi}{L}s\right) \right) ds + \\ &+ C_{012} \int_0^1 M_2(x,s) \sum_k^{\infty} \left(\frac{d^2 D_k(t)}{dt} - \frac{d^2 C_k(t)}{dt} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}s\right) ds = \\ &= \sum_k^{\infty} \left(\int_0^1 M_2(x,s) \sin\left(\frac{k\pi}{L}s\right) ds \right) \left(g_{02} \frac{dD_k(t)}{dt} + (C_{02} - C_{M02} \gamma_2^2 + C_{012}) \frac{d^2 D_k(t)}{dt} - C_{012} \frac{d^2 C_k(t)}{dt} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогічно до (27) позначимо

$$\tilde{C}_{012}^{(2)} = C_{02} - C_{M02} \gamma_2^2 + C_{012}, \quad (35)$$

тоді згідно з (34) і (35)

$$F_2(x,t) = \sum_1^{\infty} \left(\int_0^1 M_2(x,s) \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \left(g_{02} \frac{dD_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(2)} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \right). \quad (36)$$

Підставляємо в (23) $i = 2$, отримуємо

$$F_{2k}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F_2(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\sum_l^{\infty} \left(\int_0^l M_2(x, s) \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \left(g_{02} \frac{dD_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(2)} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx. \quad (37)$$

Позначивши

$$n_{kl} = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^l M_2(x, s) \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad (38)$$

(27) запишемо так

$$F_{2k}(t) = \sum_l^{\infty} n_{kl} \left(g_{02} \frac{dD_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(2)} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \right). \quad (39)$$

Так як функція $M_2(x, s)$ є спадною, то розв'язати рівняння (33) можна так $M_2(x, s) = M_{02} e^{-\gamma_2|x-s|}$, де M_{02} – власна індуктивність витка вторинної обмотки трансформатора.

Тоді з (38) випливає

$$\begin{aligned} n_{kl} &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^l M_{02} e^{-\gamma_2|x-s|} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^x M_{02} e^{-\gamma_2(x-s)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx + \int_x^l M_{02} e^{-\gamma_2(s-x)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^x M_{02} e^{-\gamma_2(x-s)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^l M_{02} e^{-\gamma_2(s-x)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = n'_{kl} + n''_{kl}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{де } n'_{kl} = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^x M_{02} e^{-\gamma_2(x-s)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx; \quad n''_{kl} = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\int_0^l M_{02} e^{-\gamma_2(s-x)} \sin\left(\frac{l\pi}{L}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Розглянемо праву частину рівнянь (20) і (21) та згідно (13) і (14), використовуючи (18), (20), (26) і (36), запишемо

$$\begin{aligned} \vec{F}_k(t) &= \begin{pmatrix} F_{1k}(t) \\ F_{2k}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_l^{\infty} m_{kl} \left(g_{01} \frac{dC_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(1)} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} \right) \\ \sum_l^{\infty} n_{kl} \left(g_{02} \frac{dD_k(t)}{dt} + \tilde{C}_{012}^{(2)} \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} - C_{012} \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_l^{\infty} m_{kl} g_{01} & 0 \\ 0 & \sum_l^{\infty} n_{kl} g_{02} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| \frac{dC_k(t)}{dt} \right\| \\ \left\| \frac{dD_k(t)}{dt} \right\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_l^{\infty} m_{kl} \tilde{C}_{012}^{(1)} & -\sum_l^{\infty} m_{kl} C_{012} \\ -\sum_l^{\infty} n_{kl} C_{012} & \sum_l^{\infty} n_{kl} \tilde{C}_{012}^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| \frac{d^2 C_k(t)}{dt^2} \right\| \\ \left\| \frac{d^2 D_k(t)}{dt^2} \right\| \end{pmatrix} = \\ &= G \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt} + H \frac{d^2 \vec{X}_k(t)}{dt^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{де } G = \begin{pmatrix} \sum_l^{\infty} m_{kl} g_{01} & 0 \\ 0 & \sum_l^{\infty} n_{kl} g_{02} \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} \sum_l^{\infty} m_{kl} \tilde{C}_{012}^{(1)} & -\sum_l^{\infty} m_{kl} C_{012} \\ -\sum_l^{\infty} n_{kl} C_{012} & \sum_l^{\infty} n_{kl} \tilde{C}_{012}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Згідно (23), підставляючи рівняння (7) і (8), а також враховуючи відповідно рівняння (5) і (6), одержуємо

$$\vec{F}_k(t) = \begin{pmatrix} F_{1k}(t) \\ F_{2k}(t) \end{pmatrix} = \frac{2}{L} \int_0^L \begin{pmatrix} F_{1k}(x, t) \\ F_{2k}(x, t) \end{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = G \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt} + H \frac{d^2 \vec{X}_k(t)}{dt^2}. \quad (42)$$

Отже рівняння (22) запишемо так

$$S_k \frac{d\vec{X}_k^2(t)}{dt^2} + P_k \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt} + Q_k \vec{X}_k(t) = G \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt} + H \frac{d^2 \vec{X}_k(t)}{dt^2}, \quad (43)$$

де $k=1, 2, \dots$.

Позначимо змінний вектор

$$\vec{X}_k(t) = (C_k(t), D_k(t))^T \in R^2, \quad (44)$$

$$\text{де } C_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L i_1(x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx; \quad dC_k(t)/dt = \frac{2}{L} \int_0^L \partial i_1(x, t) / dt \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx;$$

$$D_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L i_2(x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx; \quad dD_k(t)/dt = \frac{2}{L} \int_0^L \partial i_2(x, t) / dt \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx;$$

$k=1, 2, \dots$.

Зафіксуємо $N = \text{const}$ і введемо сталі матриці S, P, Q, G, H розміру $2N \times 2N$.

Позначимо невідомий розв'язок через вектор розмірністю $2N$, тобто

$$\vec{X}(t) = (X_1, X_2, \dots, X_{2N})^T. \quad (45)$$

Рівняння (43) запишемо так

$$S \frac{d\vec{X}^2(t)}{dt^2} + P \frac{d\vec{X}(t)}{dt} + Q\vec{X}(t) = G \frac{d\vec{X}(t)}{dt} + H \frac{d^2\vec{X}(t)}{dt^2}. \quad (46)$$

$$(S - H) \frac{d\vec{X}^2(t)}{dt^2} = (G - P) \frac{d\vec{X}(t)}{dt} - Q\vec{X}(t); \quad (47)$$

$$\frac{d^2\vec{X}(t)}{dt^2} = (S - H)^{-1}(G - P) \frac{d\vec{X}(t)}{dt} - (S - H)^{-1}Q\vec{X}(t) = A \frac{d\vec{X}(t)}{dt} - B\vec{X}(t), \quad (48)$$

де $A = (S - H)^{-1}(G - P)$; $B = (S - H)^{-1}Q$.

Здійснимо заміну невідомих $\vec{Y}_1(t) = \vec{X}(t)$ та $\vec{Y}_2(t) = d\vec{X}(t)/dt$, тоді враховуючи (48) отримаємо

$$d\vec{Y}_1(t)/dt = \vec{Y}_2(t); \quad (49)$$

$$d\vec{Y}_2(t)/dt = d^2\vec{X}(t)/dt^2 = A\vec{Y}_2(t) - B\vec{Y}_1(t) \quad (50)$$

або

$$\begin{pmatrix} d\vec{Y}_1(t)/dt \\ d\vec{Y}_2(t)/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{pmatrix}. \quad (51)$$

З (49) і (50) отримуємо

$$\begin{pmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & A \end{pmatrix} \times \int_0^t \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(\tau) \\ \vec{Y}_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(0) \\ \vec{Y}_2(0) \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Введемо оператор

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & A \end{pmatrix} \times \int_0^t \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(\tau) \\ \vec{Y}_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (53)$$

тоді

$$(I - \tilde{A}) \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(0) \\ \vec{Y}_2(0) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

З (53) отримуємо

$$\begin{pmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{pmatrix} = (I - \tilde{A})^{-1} \begin{pmatrix} \vec{Y}_1(0) \\ \vec{Y}_2(0) \end{pmatrix} \quad (55)$$

і знаходимо розв'язок $\vec{Y}_1(t) = \vec{X}(t)$ рівняння (48).

Графік зміни струму первинної обмотки $i_1(x, t)$ показано на рис. 2.

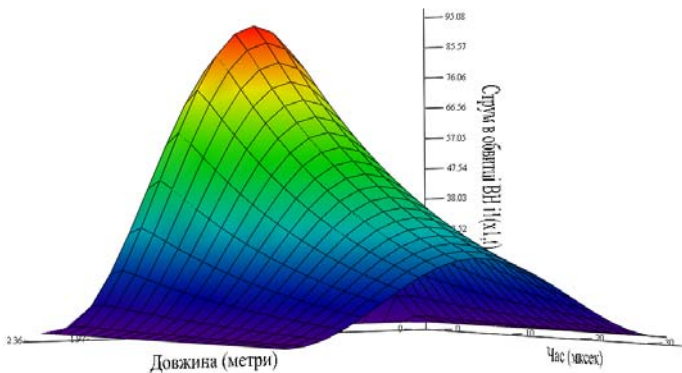


Рис. 2

Такий підхід усуває необхідність урахування крайових умов. Задля розв'язання задачі аналізу хвильових процесів достатньо визначення тільки початкових умов на відрізку $(0, l)$.

III. Висновки. Запропонований метод дає змогу досліджувати високочастотні хвильові процеси в обмотках двообмоткових трансформаторів з урахуванням залежності напруги та струму від відстані й часу, забезпечує можливість урахування співвідношення між інтервалом часу поширення електромагнітних хвиль уздовж усієї довжини обмотки й інтервалом часу, впродовж якого струм і напруга змінюються значно суттєвіше від їхньої зміни під час процесу, що розглядається.

1. Кириленко О.В., Сегеда М.С., Буткевич О.Ф., Мазур Т.А. Математичне моделювання в електроенергетиці. Львів: Львівська політехніка, 2013. 608 с.
2. Исаев Ю.Н., Старцева Е.В., Щекотуев А.В. Исследование волновых процессов обмоток трансформатора как цепи с распределенными параметрами. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2015. Т. 326. № 8. С. 29-35.
3. Lavrinovich V.A., Isaev Y.N., Mytnikov A.V. Advanced control state technology of transformer. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2013. Vol. 5. Iss. 17. No 4. Pp. 94-98.
4. Mikulović J.Č., Šekara T.B. The Numerical Method of Inverse Laplace Transform for Calculation of Overvoltages in Power Transformers and Test Results. *Serbian Journal of Electrical Engineering*. 2014. Vol. 11. No 2. Pp. 243-256.
5. Bontidean S. G., Badic M., Iordache M., Galan N. Simulations and experimental tests on the distribution of overvoltage within transformer windings. *UPB Scientific Bulletin, Series C: Electrical Engineering and Computer Science*. 2015. Vol. 77. Iss. 3.
6. de Azevedo A.C., Rezende I., Delaiba A.C., Oliveira C., de Carvalho B.C., de S. Bronzeado H. Investigation of transformer electromagnetic forces caused by external faults using FEM. *IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*. Venezuela, Latin America, 2006. Pp. 1-6.
7. Сегеда М.С., Черемних Є.В., Мазур Т.А. Математичне моделювання вільних коливань напруги в обмотках трансформаторів з урахуванням взаємодії між витками під час імпульсних перенапруг. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2013. № 1 (133). С. 68-76.
8. Сегеда М.С., Черемних Є. В., Хімюк І.В., Мазур Т.А., Курулишин О.М. Математичне моделювання розподілу напруги вздовж обмотки трансформатора під час імпульсних перенапруг. *Технічна електродинаміка*. 2015. № 6. С. 8-11.
9. Hoholyuk O., Byczkowska-Lipinska L. Mathematical models of transformers for electromagnetic transient process simulation. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2008. No 6. Pp. 278-280.
10. Sehedra M.S., Mazur T.A., Kurylyshyn O.M. Mathematical model for investigation of wave processes in high-voltage double winding transformers. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*. Lviv, Ukraine, September 2-5, 2015. Pp. 165-167.
11. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. *Cigre*. April, 2014.
12. Бьюлей Л.В. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах. М.-Л.: ОНТИ, 1938. 288 с.

УДК 621.314.057

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХОБМОТОЧНЫХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

М.С. Сегеда, докт. техн. наук, **Є. В. Черемних**, докт. ф.-м. наук, **П.Ф. Гоголюк**, канд. техн. наук, **Т.А. Мазур**, канд. техн. наук, **Ю.В. Блызнак**

Национальный университет «Львовская политехника»,
ул. С. Бандеры 12, Львов, 79013, Украина.

E-mail: mseheda@ukr.net, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, mazyr@ukr.net, blyznakyura@gmail.com

Разработана математическая модель для исследования волновых процессов в двухобмоточных трансформаторах с учетом электромагнитных связей между витками обмотки и между обмотками. Для решения дифференциально-интегральных уравнений в частных производных предложен метод разделения переменных. Библ. 12, рис. 2.

Ключевые слова: обмотка трансформатора, математическое моделирование, частные производные, распределенные параметры, импульсная волна, волновые процессы.

MATHEMATICAL MODEL OF WAVE PROCESSES IN TWO-WINDING TRANSFORMERS

M.S. Seheda, Ye.V. Cheremnykh, P.F. Gogolyuk, T.A. Mazur, Y.V. Blyznak
Lviv Polytechnic National University,
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine.

E-mail: mseheda@ukr.net, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, mazyr@ukr.net, blyznakyura@gmail.com

A mathematical model has been developed to study the wave processes of two-winding transformers, taking into account the electromagnetic connections between the turns of the winding and between the windings. To solve differential-integral equations in partial derivatives, a method of separation of variables is proposed. References 12, figures 2.

Keywords: transformer winding, mathematical modeling, partial derivatives, distributed parameters, impulse wave, wave processes.

1. Kyrylenko O.V., Seheda M.S., Butkevych O.F., Mazur T.A. Mathematical Modeling in Electric Power Engineering. Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2013. 608 p. (Ukr)
2. Isaev Y.N., Startseva E.V., Schekotuev A.V. Investigation of wave processes of transformer windings as electric circuit with distributed parameters. *Izvestiya Tomskogo Politehnicheskogo universiteta. Inzhiniering energoresursov*. 2015. Vol. 326. No 8. Pp. 29-35. (Rus)
3. Lavrinovich V.A., Isaev Y.N., Mytnikov A.V. Advanced control state technology of transformer. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2013. Vol. 5. Iss. 17. No 4. Pp. 94-98.
4. Mikulović J. Č., Šekara T. B. The Numerical Method of Inverse Laplace Transform for Calculation of Overvoltages in Power Transformers and Test Results. *Serbian Journal of Electrical Engineering*. 2014. Vol. 11. No 2. Pp. 243-256.
5. Bontidean S. G., Badic M., Iordache M., Galan N. Simulations and experimental tests on the distribution of overvoltage within transformer windings. *U.P.B. Sci. Bull. Series C*. 2015. Vol. 77. Iss. 3.
6. de Azevedo A.C., Rezende I., Delaiba A.C., Oliveira C., de Carvalho B.C., de Bronzeado H.S. Investigation of transformer electromagnetic forces caused by external faults using FEM. *IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*. Venezuela, Latin America, 2006. Pp. 1-6.
7. Seheda M.S., Cheremnykh Y.V., Mazur T.A. Mathematical modeling of free voltage oscillations on transformer windings into account winds mutual induction under surge overvoltages. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2013. No 1 (133). Pp. 68-76. (Ukr)
8. Seheda M.S., Cheremnykh Y.V., Chimjk I.V., Mazur T.A., Kurylyshyn O.M. Mathematical modelling of stress distribution along the winding transformers under impulse surges. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2015. No 6. Pp. 8-11. (Ukr)
9. Hoholyuk O., Byczkowska-Lipinska L. Mathematical models of transformers for electromagnetic transient process simulation. *Przegląd Electrotechniczny*. 2008. No 6. Pp. 278-280.
10. Seheda M.S., Mazur T.A., Kurylyshyn O.M. Mathematical model for investigation of wave processes in high-voltage double winding transformers. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*. Lviv, Ukraine, September 2–5, 2015. Pp. 165-167.
11. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. *Cigre*. April, 2014.
12. Bewley L.B. Traveling waves on transmission systems. Moskwa-Leningrad: ONTI, 1938. 288 p.

Надійшла 02.08.2019
Остаточний варіант 29.07.2020