УДК 621.3

DOI: https://doi.org/10.15407/techned2020.04.005

РОЗРАХУНОК ПРОФІЛІВ СОЛЕНОЇДІВ ДЛЯ ОТРИМАННЯ СИЛЬНИХ ІМПУЛЬСНИХ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ІЗ ЗАДАНИМ РОЗПОДІЛОМ НА ОСІ

В.М. Михайлов, докт. техн. наук Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова, 2, Харків, 61002, Україна, e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Сформульовано задачу продовження плоскомеридіанного магнітного поля з осі симетрії відносно магнітного потоку та скалярного потенціалу магнітного поля. Аналітичні розв'язки цієї задачі отримано двома методами: методом часткових розв'язків, безперервно залежних від параметра, і за допомогою функції Гріна для магнітного потоку. В першому методі використано інтегральне перетворення Фур'є заданих на осі розподілів індукції магнітного поля. Другий метод побудований на функції Гріна для магнітного потоку кільцевого струму в необмеженому, немагнітному та непровідному просторі. Доведено, що така функція за певної умови є розв'язком задачі продовження магнітного потоку з осі симетрії. Показано застосування систем співвісних кільцевих струмів і функції Гріна, що містить повні еліптичні інтеграли, для розрахунку різних розподілів індукції імпульсного магнітного поля на осі симетрії та відповідних їм профілів масивних одновиткових соленоїдів. Досліджено вплив величини, напрямку, радіусів та розташування вздовжо ссі цих струмів на розподіл індукції. Отримано інтегральні перетворення Фур'є деяких функцій, що розширює можливості першого методу розв'язання задачі. Бібл. 8, рис. 4.

Ключові слова: імпульсне магнітне поле, профіль одновиткового соленоїда, задача продовження поля, функція Гріна, інтегральне перетворення Фур'є.

Вступ. У фізичних експериментах виникає потреба отримання сильних імпульсних магнітних полів за допомогою масивних одновиткових соленоїдів, що представляють собою тіла обертання із радіальним розрізом для струмопідводу [1, 2]. Профілі таких соленоїдів можуть бути визначені розв'язком задачі продовження плоскомеридіанного магнітного поля за заданим розподілом індукції на осі симетрії. Ідея та загальний розв'язок рівняння для скалярного потенціалу такої задачі, отриманий із використанням інтегральних перетворень Фур'є, є у монографії [2]. Проте відсутність в описі задачі граничних умов на осі симетрії ускладнює визначення функції параметру інтегрального перетворення, що входить в інтеграл розв'язку, та функцію потоку, яка потрібна для побудови силових ліній поля, що продовжується.

Мета роботи – опис та аналіз математичних формулювань задачі продовження плоскомеридіанного магнітного поля з осі симетрії за допомогою магнітного потоку і скалярного потенціалу та отримання нових аналітичних розв'язків стосовно визначення профілів масивних одновиткових соленоїдів.

Формулювання та розв'язання задачі відносно магнітного потоку. Нехай у циліндричних координатах r, ψ, z з осі симетрії z, на котрій задана осьова проекція індукції магнітного поля \vec{B} , необхідно продовжити плоскомеридіанне магнітне поле у необмежений, непровідний і немагнітний простір без джерел. Приймаємо допущення квазістаціонарності, а проникненням поля у провідники пристроїв, для котрих будуть використані результати, нехтуємо. Ці допущення дають змогу не враховувати залежність шуканих функцій від часу. Із визначення векторного потенціалу магнітного поля \vec{A} [3] маємо

$$\Phi(r,z) = 2\pi r A_{\psi}(r,z), \qquad B_z(r,z) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad (1,2)$$

[©] Михайлов В.М., 2020 ORCID ID: <u>https://orcid.org/0000-0001-7989-5932</u>

де $\Phi(r, z)$ – магнітний потік, що проходить через кільце радіусу r; $A_{\psi}(r, z)$ – єдина ненульова азимутальна проекція \vec{A} ; $B_z(r, z)$ – осьова проекція \vec{B} .

До формулювання задачі входить рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$
(3)

та граничні умови на осі симетрії

$$\Phi(0,z) = 0, \qquad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big|_{r=0} = 2\pi B_z(0,z). \tag{4,5}$$

Рівняння (3) отримано із першого рівняння електромагнітного поля [3], а потім перетворено з урахуванням (1). Гранична умова (4) виходить з (1) та вимоги обмеженості $A_{\psi}(0, z)$, а в умові (5) $B_z(0, z)$ – задана індукція на осі z.

Для розв'язання задачі (3) – (5) використовуємо метод часткових розв'язків, безперервно залежних від параметру λ [4]. Опускаючи викладки, маємо

$$\Phi(r,z) = 2\sqrt{2\pi}r\int_{0}^{\infty}I_{1}(\lambda r)\frac{1}{\lambda}f(\lambda)d\lambda.$$
(6)

Функція $f(\lambda)$ дорівнює $f_1(\lambda) = F_c(\lambda)\cos(\lambda z)$ або $f_2(\lambda) = F_s(\lambda)\sin(\lambda z)$ відповідно для парних або непарних розподілів $B_z(0, z)$ ($F_c(\lambda)$, $F_s(\lambda)$ – косинус- та синус-перетворення Фур'є $B_z(0, z)$ [4]).

Бачимо, що для визначення магнітного потоку не треба попередньо розв'язувати задачу для скалярного потенціалу [2].

Формулювання та розв'язання задачі для скалярного потенціалу магнітного поля. Скалярний потенціал $\varphi_m(r, z)$ магнітного поля, що продовжується, введемо за допомогою співвідношення $\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi_m$, звідки виходять формули (μ_0 – магнітна стала)

$$B_r(r,z) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial r}, \ B_z(r,z) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}.$$
(7,8)

Класичне формулювання задачі продовження поля для скалярного потенціалу (задача Коші [5]) має складатися із рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0$$
(9)

та граничних умов на осі симетрії

$$\varphi_m(0,z) = f_1(z), \qquad \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial r}\Big|_{r=0} = f_2(z), \qquad (10,11)$$

де $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – задані функції.

У випадку, що розглядається, функція $f_1(z)$ невідома, тому замість (10) використовуємо граничну умову

$$\left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right|_{r=0} = -\frac{1}{\mu_0} B_z(0, z), \tag{12}$$

що містить інформацію щодо заданого розподілу індукції магнітного поля.

Оскільки на осі симетрії поля, що продовжується, $B_r(0, z)=0$, то згідно з (7) гранична умова (11) приймає вигляд

$$\left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$
⁽¹³⁾

Описане формулювання задачі відрізняється від класичного граничною умовою (12). Використовуючи той же метод, що і для визначення $\Phi(r, z)$, отримуємо розв'язок задачі (9), (12) і (13)

$$\varphi_m(r,z) = \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty I_0(\lambda r) \frac{1}{\lambda} f(\lambda) d\lambda \,. \tag{14}$$

У розв'язках (14) і (6) $I_0(\lambda r)$, $I_1(\lambda r)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду нульового та першого порядку. У формулі (14) $f(\lambda)$ дорівнює – $f_2(\lambda)$ або $f_1(\lambda)$ для парного або непарного розподілу $B_z(0, z)$. Правильність розв'язків (6) и (14) підтверджено визначенням магнітного потоку, що проходить через кільце радіусу r с центром на осі z, за допомогою формули (8) і рішення (14). Зауважимо також, що не визначена в монографії [2] функція параметру інтегрального перетворення дорівнює $\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(\lambda)$, де $f(\lambda)$ дорівнює $f_1(\lambda)$ або t, $f_2(\lambda)$ відповідно для парного або непарного скалярного потенціалу, що узгоджується з розв'язком (14).

Використання функцій Гріна. Функція Гріна для векторного потенціалу плоскомеридіанного магнітного поля \vec{G}_A , що утворюється нескінченно тонким кільцем з одиничним струмом в необмеженому, непровідному і немагнітному просторі, має задовольняти рівнянню (усюди, окрім точок кільця) і граничній умові

rot rot
$$\vec{G}_A = 0$$
, $\vec{G}\Big|_{r=0} = 0$, (15, 16)

а також прямує до нуля на нескінченності.

Це визначення відрізняється від відомого [6] граничною умовою (16). Функція \tilde{G}_A може бути виділена у відомих формулах для векторного потенціалу плоскомеридіанного магнітного поля кільцевого струму I за допомогою співвідношень

$$\vec{A} = I\vec{G}_A, \qquad \qquad \vec{G}_A = \vec{A}\Big|_{I=1}. \tag{17}$$

Оскільки вектори \vec{A} і \vec{G}_A мають тільки по одній проекції, то подібні (17) співвідношення справедливі і для їхніх модулів A и G_A . Крім цього, у відповідності з (1), функція Гріна для магнітного потоку

$$G_{\Phi}(r,z) = 2\pi r G_A(r,z), \qquad G_{\Phi}(r,z) = \Phi(r,z)|_{I=1}.$$
 (18, 19)

Доведемо наступне твердження: функція Гріна $G_{\Phi}(r, z)$ є розв'язком задачі (3) – (5) за умови, що заданий розподіл індукції співпадає з розподілом індукції на осі кільцевого одиничного струму.

Для доведення використаємо відому формулу для векторного потенціалу магнітного поля, що утворюється кільцем радіуса r_M із струмом I і центром в точці $z_M=0$, за $r < r_M$ [7], а також формулою (1). Отримуємо

$$\Phi(r,z) = 2\mu_0 r_M r I \int_0^\infty I_1(kr) K_1(kr_M) \cos(kz) dk , \qquad (20)$$

де $K_1(kr_M)$ – модифікована функція Бесселя другого роду першого порядку; k – параметр.

Очевидно, що магнітний потік (20), а отже, і відповідна йому згідно (19) функція Гріна $G_{\Phi}(r, z)$ задовольняє рівнянню (3) і граничній умові (4). За допомогою формул (2), (20) визначаємо індукцію магнітного поля на осі кільцевого струму

$$B_{z}(0,z) = \frac{\mu_{0}r_{M}I}{\pi} \int_{0}^{\infty} K_{1}(kr_{M})k\cos(kz)dk .$$
(21)

Отримаємо розв'язок задачі (3) – (5) з урахуванням формули (21) у граничній умові (5). Для цього спочатку, вважаючи $k = \lambda$, з (21) знаходимо косинус-перетворення Фур'є $B_z(0,z)$

$$F_{c}(\lambda) = \frac{\mu_{0} r_{M} I}{\sqrt{2\pi}} \lambda K_{1}(\lambda r_{M}).$$
⁽²²⁾

Після підстановки (22) в розв'язок (6) приходимо до формули (20), яка за $I = 1 \epsilon$ функцію Гріна $G_{\Phi}(r, z)$. Твердження доведено. Вочевидь, воно справедливо і у разі розташування центру кільцевого струму в деякій точці $z=z_M$.

Розрахунки полів, що продовжуються, для деяких заданих розподілів індукції. Використовуючи відомі найбільш прості формули для розрахунку A(r, z) і $B_z(0, z)$, що містять повні еліптичні інтеграли [7], маємо розв'язок задачі (3) – (5)

$$\Phi(r,z) = \mu_0 I \sqrt{rr_M} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$
(23)

а також відповідний йому розподіл індукції

$$B_{z}(0,z) = \frac{1}{2} \mu_{0} r_{M}^{2} I \left/ \left[r_{M}^{2} + (z - z_{M})^{2} \right]^{3/2},$$
(24)

де K(k), E(k) – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду модуля k

$$k = 2\sqrt{\frac{rr_M}{(r+r_M)^2 + (z-z_M)^2}}$$

В силу лінійності задачі (3) – (5) її розв'язком є і сума магнітних потоків

$$\Phi(r,z) = \sum_{k=1}^{k=n} \Phi_k(r,z), \qquad (25)$$

що утворюються системою *n* співвісних кільцевих струмів I_k , $k = \overline{1, n}$, розташованих вздовж осі *z*, за умови, що заданий розподіл індукції співпадає з розподілом індукції магнітного поля на осі цієї системи струмів

$$B_{z}(0,z) = \frac{1}{2} \mu_{0} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\pm I_{k} r_{Mk}^{2}}{\left[r_{Mk}^{2} + \left(z - z_{Mk} \right)^{2} \right]^{3/2}},$$
(26)

де $\Phi_k(r,z)$, r_{Mk} , z_{Mk} – магнітний потік, радіус и осьова координата центра k-го кільцевого струму.

У формулі (25) кожний доданок визначається за формулою (23), де треба прийняти $I = \pm I_k$, $r_M = r_{Mk}$. $z_M = z_{Mk}$. Струми I_k є алгебраїчними величинами: знак плюс мають струми, що співпадають за напрямом із ортом $\vec{1}_{w}$, мінус – струми протилежного напряму.

У найпростішому випадку двох однакових за величиною та радіусом кільцевих струмів, симетрично розташованих відносно точки z=0 (n=2, $r_{M1}=r_{M2}=r_{M}$, $z_{M2}=-z_{M}$), формула (26) приймає вигляд

$$B_{z}(0,z) = \frac{1}{2}\mu_{0}Ir_{M}^{2}\left[\left(r_{M}^{2} + (z - z_{M})^{2}\right)^{-3/2} \pm \left(r_{M}^{2} + (z + z_{M})^{2}\right)^{-3/2}\right].$$
(27)

Знаки плюс або мінус між доданками у квадратних дужках відповідають струмам однакового напряму та парному або струмам протилежних напрямів та непарному розподілам $B_z(0, z)$. Використовуючи перший метод розв'язку задачі для магнітного потоку та відому формулу для векторного потенціалу \vec{A} кільцевого струму з модифікованими функціями Бесселя [7], знаходимо косинус- і синус-перетворення Фур'є функцій у квадратних дужках формули (27)

$$\frac{F_c(\lambda)}{F_s(\lambda)} = \frac{2}{r_M} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda K_1(\lambda r_M) \begin{cases} \cos(\lambda z_M) \\ \sin(\lambda z_M) \end{cases} .$$
(28)

3 (28) при $z_M = 0$ після поділу на 2 отримаємо $F_c(\lambda)$ функції $(r_M^2 + z^2)^{-3/2}$. Зауважимо, що отримані перетворення Фур'є відсутні у довіднику [8].



нітного поля $\Phi = \text{const}$, що розраховані за формулами (25) для n = 2, (27) за зміни радіусів, положення, величини та напряму кільцевих струмів. Величини, позначені зірочками, є безрозмірними та визначені полілом вілповідних розмірних величин на базисну довжину l_{6} , струм *I*_б, індукцію *B*_б, і магнітний потік Φ_{5} ($B_{5} = \mu_{0}$ I_{5} / l_{5} , $\Phi_{\delta} = \mu_0 I_{\delta} l_{\delta}$). На рис. 1, *a* i 2, *a* показані парні та непарні розподіли індукції за $r_M^* = 1$ і різних z_M^* : на рис. 1, *а* для кривих *1-4 z*_{*M*}*= 0.5; 0.75; 1.0; 1.5; на рис. 2, а – для кривих *1-3 z_M**= 0.1; 0.5; 1.0. Зменшення відстані між кільцевими струмами однакового напряму призводить до

8

Рис. 1

ISSN 1607-7970. Техн. електродинаміка. 2020. № 4

збільшення індукції в середній частині розподілу (рис. 1, а), а у випадку струмів протилежного на-















1 розподілу (рис. 1, *a*), а у випадку струмів протилежного напряму – до зменшення її амплітудних значень (рис. 2, *a*). На рис 1, δ и 2, δ наведено симетричні відносно осі r^* силові лінії за $z_{M1}^*=z_{M2}^*=0.5$ для парного (для ліній *1*-6 $\Phi^*=0.2 - 1.2$ з кроком 0.2) та непарного (для ліній *1*-6 $\Phi^*=0.1 - 0.6$ з кроком 0.1) розподілів індукції (жирними точками на рис.1, δ ; 2, δ і 4 показано розташування кільцевих струмів). Парний розподіл забезпечується одним соленоїдом, а непарний – двома із струмами протилежного напряму, профілі яких обмежені зображеними силовими лініями. Зауважимо також, що парний розподіл і силові лінії, що зображено на рис. 1, *a* (крива *1*) і δ , відповідають відомим кільцям Гельмгольца.

Зміною величин і напрямів струмів, що протікають в симетричній ($r_{M1}*=r_{M2}*=1$; $I_1*=1$; рис. 3, *а* для кривої $I I_2*=1.5$; 2 - -1.5; 3 - 0.5; 4 - -0.5), а також в несиметричній ($r_{M1}*=1$; $I_1*=1$; рис. 3, *б*, для кривих $I,2 - r_{M2}*=0.5$; 3,4 - 1.5; для кривих $I,3 I_2*=1$; I,3 - -1) системах двох кільцевих струмів (формула (26), n=2, $z_{M1}*=z_{M2}*=1$) отримуємо різні розподіли індукції, які не є парними або непарними та можуть представляти інтерес для експериментів із плазмою [1]. На рис. 4, *а* показано силові лінії магнітного поля, відповідні на рис. 3, *а* кривій I (для ліній $I-7 \Phi^*= 0.2-1.4$ з кроком 0.2; 8 - 2.0) і кривій 2 (для ліній $I-9 \Phi^*= 0.2$; 0.4; 0.6; 1.0; 0; -0.2; -0.4; -0.6; -1.0).

Висновки. Функція Гріна магнітного потоку кільцевого струму в необмеженому, немагнітному і непровідному просторі, а також сума добутків величин струмів на таку функцію, що відповідна сукупності співвісних кільцевих струмів, є розв'язками задачі продовження плоскомерідианного магнітного поля з осі симетрії, якщо заданий розподіл індукції співпадає з розподілом індукції на осі кільцевого струму або сукупності таких струмів. Радіуси, координати центрів, величини, напрями та число кільцевих струмів є параметрами розподілу індукції магнітного поля на осі симетрії, змінюючи котрі можна отримати заданий розподіл, а потім за допомогою розв'язків задачі продовження поля розрахувати силові лінії та визначити профілі одного або двох масивних одновиткових соленоїдів.

- 1. Дашук П.Н., Зайенц С.Л., Комельков В.С, Кучинской Г.С., Николаевская Н.Н., Шкуропат П.И., Шнеерсон Г.А. Техника больших импульсных токов и магнитных полей. М.: Атомиздат, 1970. 472 с.
- **2.** Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М.: Энергоатомиздат, 1992. 416 с.
- 3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т. 2. Л.: Энергоиздат, 1981. 416 с.
- 4. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. 420 с.
- 5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962. 352 с.
- 6. Михайлов В.М. Функції Гріна плоскомеридіанних електричних та магнітних полів над плоскою граничною поверхнею. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 5-9. DOI: https://doi.org/10.15407/techned2018.04.005
- 7. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- 8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

УДК 621.3 РАСЧЕТ ПРОФИЛЕЙ СОЛЕНОИДОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СИЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НА ОСИ В.М. Михайлов*, докт. техн. наук Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, Харьков, 61002, Украина, e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Приведены математические формулировки задачи продолжения плоскомеридианного магнитного поля с оси симметрии относительно магнитного потока и скалярного потенциала магнитного поля. Аналитические решения этой задачи получены двумя методами: методом частных решений, непрерывно зависящих от параметра, и при помощи функции Грина для магнитного потока. В первом методе использованы интегральные преобразования Фурье заданных на оси распределений индукции магнитного поля. Второй метод основан на функции Грина для магнитного потока кольцевого тока в неограниченном немагнитном и непроводящем пространстве. Доказано, что такая функция при определенном условии является решением задачи продолжения магнитного потока с оси симметрии. Показано применение системы соосных кольцевых токов и функции Грина, содержащей полные эллиптические интегралы, для расчета различных распределений индукции импульсного магнитного поля на оси симметрии и соответствующих им профилей массивных одновитковых соленоидов. Исследовано влияние величины и направления, радиусов и положения вдоль оси этих токов на распределение индукции. Получены интегральные преобразования Фурье некоторых функций, расширяющие возможности первого метода решения задачи. Библ. 8, рис. 4.

Ключевые слова: импульсное магнитное поле, профиль одновиткового соленоида, задача продолжения поля, функция Грина, интегральное преобразование Фурье.

CALCULATION OF PROFILES OF SOLENOIDS FOR GENERATION OF HIGH PULSE MAGNETIC FIELDS WITH GIVEN DISTRIBUTION ON AXIS

V.M. Mikhailov

National technical university «Kharkiv polytechnic institute», 2, Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine, e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Mathematical formulations of magnetic field continuation from axis of symmetry for magnetic flux and scalar magnetic potential are described. Analytical solutions of the problem are obtained by two methods. The first method is based on partial solutions, which depend on parameter continuously, and Fourier's transformations of given magnetic induction distributions on the axis. In the second method Green's function for magnetic flux of annular current in unlimited non-conducting and nonmagnetic space is used. It is proved, that this function is solution of magnetic flux continuation from axis of symmetry under certain condition. The application of coaxial annular currents and Green's function, which contains complete elliptic integrals, for calculation of different pulse magnetic induction distributions on axis of symmetry and corresponding profiles of massive single-turn solenoids is shown. Influence of value and direction, radiuses and location of these currents on magnetic induction distribution is investigated. Integral Fourier's transformations for some function are founded that extend scope for application of the first method problem solution. References 8, figures 4.

Keywords: pulse magnetic field, profile of single-turn solenoid, field continuation problem, Green's function, Fourier's integral transformation.

- 1. Dashuk P.N., Zaients S.L., Komelkov V.S., Kuchinskoi G.S., Nikolaevskaia N.N., Shkuropat P.I., Shneerson G.A. High pulse current and magnetic field technique. Moskva: Atomizdat, 1970. 472 p. (Rus)
- 2. Shneerson G.A. Fields and transients in the equipment of superpower currents. Moskva: Energoatomizdat, 1992. 416 p. (Rus)
- 3. Neiman L.R., Demirchian K.S. Theoretical fundamentals of electrical engineering. Vol 2. Leningrad: Energoizdat, 1982. 416 p. (Rus)
- 4. Lebedev N.N., Skalskaia I.P., Ufliand Ia.S. Compilation of mathematical physics problems. Moskva: GITTL, 1955. 420 p. (Rus)
- 5. Lavrentev M.M. About certain incorrect problems of mathematical physics. Novosibirsk, 1962. 352 p. (Rus)
- 6. Mikhailov V.M. Green's functions of axisymmetric electric and magnetic fields above flat boundary surface. *Tekhnichna elektrodynamika*. 2018. No 4. Pp. 5-9. (Ukr)
- 7. Smait V. Electrostatics and Electrodynamics. Moskva: Inostrannaia Literatura, 1954. 604 p. (Rus)
- 8. Bronshtein I.N., Semendiaev K.A. Handbook of mathematics for engineers and students of technical universities. Moskva: Nauka, 1986. 544 p. (Rus)

Надійшла 28.02.2020 Остаточний варіант 12.05.2020