УДК 621.314.057 DOI: https://doi.org/10.15407/techned2020.06.005

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ДВООБМОТКОВИХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

М.С. Сегеда[1], докт.техн.наук, **Є.В. Черемних**[2], докт.фіз.-мат.наук, **П.Ф. Гоголюк**[3], канд.техн.наук, **Т.А. Мазур**[4], канд.техн.наук, **Ю.В. Близнак**[5]
Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна.
E-mail: mseheda@ukr.net, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, mazyr@ukr.net, blyznakyura@gmail.com

Запропоновано математичну модель для дослідження хвильових процесів у двообмоткових трансформаторах з урахуванням електромагнітних зв'язків між витками обмоток і обмотками. Задля розв'язання диференційно-інтегральних рівнянь у частинних похідних запропоновано метод відокремлення змінних. Бібл. 12, рис. 2.
***Ключові слова**:* обмотка трансформатора, математичне моделювання, частинні похідні, розподілені параметри, імпульсна хвиля, хвильові процеси.

I. Вступ. Під час моделювання хвильових процесів в трансформаторах, довжина хвиль яких менша чи співрозмірна з просторовими розмірами трансформатора, виникає необхідність представлення заступної схеми з розподіленими параметрами [1–6]. Розрахунок високочастотних процесів в обмотках трансформаторів з врахуванням розподіленості параметрів набагато складніший у порівнянні зі зосередженими параметрами, тому що виникає необхідність розв'язання рівнянь у частинних похідних [1, 7, 8, 9].

Математичне моделювання хвильових процесів у обмотках трансформатора можна загалом розділити на такі підходи: моделювання методами «білої скриньки», «чорної скриньки» та «сірої скриньки» [10, 11]. Моделювання першим методом вимагає формування математичних моделей елементів електроенергетичної системи (ЕЕС) з урахуванням усіх параметрів заступної схеми елемента, що дає змогу досліджувати його внутрішні процеси.

Моделювання методом «чорної скриньки» не вимагає формування математичної моделі кожного елемента ЕЕС і асоціюється з підходом де координати процесу моделі елемента обчислені чи виміряні на початку й у його кінці. У такому разі використовується метод змінних (координат) стану, який дає змогу аналізувати й синтезувати ЕЕС на електромагнітну сумісність усіх її елементів, а також визначати струми і напругу у будь-який момент часу.

Компромісом цих двох методів є метод «сірої скриньки», який їх об'єднує [3].

Основна мета формування математичної моделі трансформатора на підставі методу «білої скриньки» – це обчислення напруги вздовж обмотки під час дії на них імпульсних перенапруг різної форми та вільних коливань у середині обмоток, що дає змогу координувати їхню ізоляцію.

Аналіз внутрішніх хвильових процесів у обмотках трансформатора доцільно виконувати в такій послідовності: формування диференційних рівнянь, які описують ці процеси на підставі заступної схеми обмотки; задання граничних умов на кінцях обмотки; визначення початкового розподілу напруги вздовж обмотки за дії на неї імпульсу перенапруги; визначення кінцевого розподілу напруги: початковий розподіл напруги вздовж обмотки визначається як суперпозиція кінцевого розподілу напруги та функції вільних коливань для початкового моменту ($t = 0$); розв'язання рівнянь за дії хвилі довільної форми.

ORCID ID: [1]https://orcid.org/0000-0001-8459-5758; [2]https://orcid.org/0000-0002-4621-2426; [3]https://orcid.org/0000-0003-0002-4638; [4]https://orcid.org/0000-0001-5021-4013; [5]https://orcid.org/0000-0002-4914-2283

Хвильові процеси в обмотках трансформатора зумовлюють перенапруги відносно зеЗмлі, а також між витками обмотки та його обмотками.

Амплітуди та градієнти перенапруги обмоток можна зменшити шляхом зменшення внутрішніх коливних напруг в обмотці; дією на імпульс перенапруги, який діє на обмотку; впливом на напруги нейтралі обмоток трансформатора. Ці три чинники є основними в схемах захисту трансформатора від перенапруг.

Для дослідження хвильових процесів у трансформаторах під час дії зовнішніх перенапруг необхідно відтворити форму хвилі. Рівняння, яке характеризує форму імпульсної хвилі, має вигляд [12]

$$e_{імп} = E(e^{-at} - e^{-bt}), \tag{1}$$

де E – максимальне значення напруги хвилі; a і b – параметри хвилі; t – час.

Імпульсна хвиля характеризується такими параметрами: максимальним значенням (амплітуда); тривалістю фронту – частиною хвилі від 0 до E_{max}; довжиною хвилі – частина хвилі від E_{max} до її половини.

Стандартна хвиля приймається за 50% імпульсної напруги з довжиною фронту 1 мкс і довжиною хвилі 50 мкс . Тому необхідно правильно вибрати параметри рівняння (1), якщо a і b мають дійсні значення, то рівняння (1) відтворює хвилю з закругленим фронтом і експонентним «хвостом».

Якщо на обмотку трансформатора, яка знаходиться у кінці лінії електропересилання, набігає імпульс напруги, на підставі першого закону комутації (струм в індуктивності не змінюється стрибком) обмотка в перший момент є як конденсатор з ємністю $C_{обв}$. Виходячи з цього напругу на виводах обмотки можна записати у вигляді

$$u = 2e_{імп}\left(1 - \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{Z_C C_{обв}}t}\right), \tag{2}$$

де Z_C – хвильовий опір лінії електропересилання; $C_{обв}$ – вхідна ємність обмотки; $e_{імп}$ – напруга імпульсної хвилі; $\boldsymbol{t}$ – час.

Враховуючи, що обмотки ВН 110 кВ трансформатора в середньому мають $C_{обв} = 700$ пф, а хвильовий опір лінії електропересилання $Z_C = 400$ Ом , то напруга на обмотці швидко досягає $2e_{імп}$.

Мета роботи. Розроблення математичної моделі та дослідження хвильових процесів в обмотках високовольтних двообмоткових трансформаторів за дії на них імпульсних перенапруг, розв'язання диференційних рівнянь в частинних похідних методом відокремлення змінних.

ІІ. Математична модель. Математичну модель двообмоткового трансформатора розроблено на підставі запропонованої заступної схеми (рис. 1).

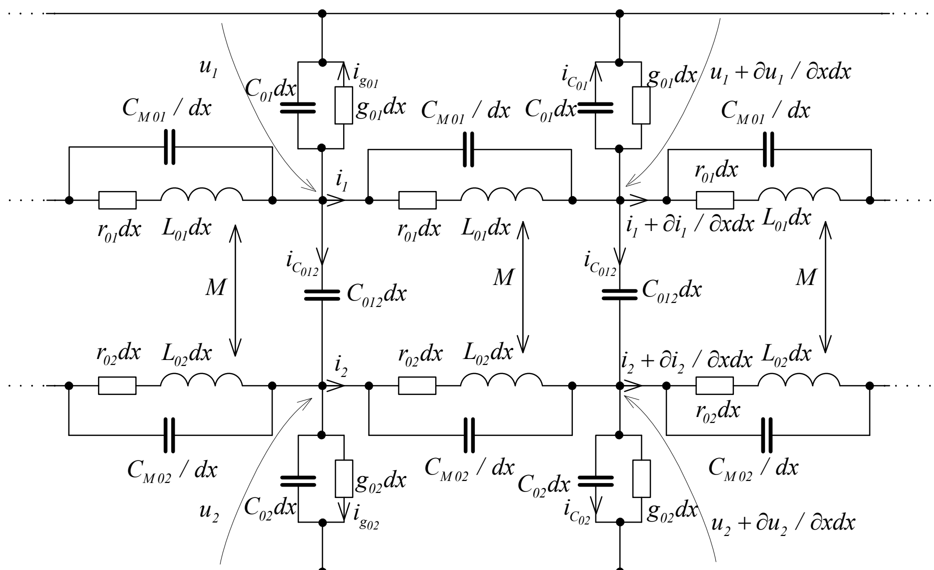

Рис. 1

Диференційні рівняння зміни струмів, які протікають через обмотки, мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&-\partial i_1(x,t)/\partial x = g_{01}u_1(x,t) + C_{01}\partial u_1(x,t)/\partial t - \\
&-C_{M01}\partial^3 u_1(x,t)/(\partial x^2\partial t) + C_{012}\partial(u_1(x,t)-u_2(x,t))/\partial t;
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\partial i_2(x,t)/\partial x = g_{02}u_2(x,t) + C_{02}\partial u_2(x,t)/\partial t - \\
&-C_{M02}\partial^3 u_2(x,t)/(\partial x^2\partial t) + C_{012}\partial(u_2(x,t)-u_1(x,t))/\partial t.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Спад напруги на одиницю довжини витка обмоток

$$-\partial u_1(x,t)/\partial x = r_{01}i_1(x,t) + \int_0^1 M_1(x,s)\partial i_1(s,t)/\partial t ds + L_{01}\partial i_1(x,t)/\partial t + M\partial i_2(x,t)/\partial t; \tag{5}$$

$$-\partial u_2(x,t)/\partial x = r_{02}i_2(x,t) + \int_0^1 M_2(x,s)\partial i_2(s,t)/\partial t ds + L_{02}\partial i_2(x,t)/\partial t + M\partial i_1(x,t)/\partial t. \tag{6}$$

Розв'язання рівнянь (3) – (6) запропоновано у зведені крайової задачі щодо хвильових процесів в обмотках трансформатора скінченої довжини до задачі коливань у обмотках нескінченої довжини. З цією метою функції початкових крайових умов продовжуються на відрізок $(-l, 0)$ непарним способом, а потім ще раз періодично на всю нескінчену вісь. Довизначена таким чином крайова задача має крайові та початкові умови на всій нескінченій осі, й на відрізку $(-l, 0)$ вони тотожні початковій крайовій задачі.

Рівняння (3) і (4) запишемо так

$$-\partial i_1(x,t)/\partial x = g_{01}u_1(x,t) + (C_{01} - C_{M01}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + C_{012}\frac{\partial}{\partial t}(u_1(x,t)-u_2(x,t)); \tag{7}$$

$$-\partial i_2(x,t)/\partial x = g_{02}u_2(x,t) + (C_{02} - C_{M02}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} + C_{012}\frac{\partial}{\partial t}(u_2(x,t)-u_1(x,t)). \tag{8}$$

Диференціюємо (7) і (8) за $\boldsymbol{x}$, отримуємо

$$\partial^2 i_1(x,t)/\partial x^2 = g_{01}(-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}) + (C_{01} - C_{M01}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}) + C_{012}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}); \tag{9}$$

$$\partial^2 i_2(x,t)/\partial x^2 = g_{02}(-\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}) + (C_{02} - C_{M02}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}) + C_{012}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}). \tag{10}$$

Підставляємо (5) і (6) відповідно у (9) і (10) та отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 i_1(x,t)/\partial x^2 = g_{01}(r_{01}i_1(x,t) + \int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t}ds + L_{01}\partial i_1(x,t)/\partial t + M\partial i_2(x,t)/\partial t) + \\
&+(C_{01} - C_{M01}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial t}(r_{01}i_1(x,t) + \int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t}ds + L_{01}\partial i_1(x,t)/\partial t + M\partial i_2(x,t)/\partial t) + \\
&+C_{012}\frac{\partial}{\partial t}(r_{01}i_1(x,t) + \int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t}ds + L_{01}\partial i_1(x,t)/\partial t + M\partial i_2(x,t)/\partial t - \\
&-r_{02}i_2(x,t) - \int_0^1 M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds - L_{02}\partial i_2(x,t)/\partial t - M\partial i_1(x,t)/\partial t);
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 i_2(x,t)/\partial x^2 = g_{02}(r_{02}i_2(x,t) + \int_0^1 M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds + L_{02}\partial i_2(x,t)/\partial t + M\partial i_1(x,t)/\partial t) + \\
&+(C_{02} - C_{M02}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial t}(r_{02}i_2(x,t) + \int_0^1 M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds + L_{02}\partial i_2(x,t)/\partial t + M\partial i_1(x,t)/\partial t) + \\
&+C_{012}\frac{\partial}{\partial t}(r_{02}i_2(x,t) + \int_0^1 M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds + L_{02}\partial i_2(x,t)/\partial t + M\partial i_1(x,t)/\partial t - \\
&-r_{01}i_1(x,t) - \int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t}ds - L_{01}\partial i_1(x,t)/\partial t - M\partial i_2(x,t)/\partial t).
\end{aligned} \tag{12}
$$

З рівнянь (11) і (12) вирази з інтегралами запишемо так

$$F_1(x,t) = g_{01}\int_0^l M_1(x,s)\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t}ds + (C_{01} - C_{M01}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l M_1(x,s)\frac{i_1(s,t)}{\partial t}ds + $$
$$+ C_{012}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l M_1(x,s)(\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t})ds; \tag{13}$$

$$F_2(x,t) = g_{02}\int_0^l M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds + (C_{02} - C_{M02}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds + $$
$$+ C_{012}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l M_2(x,s)(\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t})ds. \tag{14}$$

Тоді рівняння (11) і (12) приймають вигляд, залишивши у лівій частині i_1 та i_2 і їхні похідні,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(i_1(x,t) + C_{M01}r_{01}\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + (C_{M01}M + C_{M01}L_{01})\partial^2 i_2(x,t)/\partial t^2) - g_{01}r_{01}i_1(x,t) -$$
$$-(g_{01}L_{01} + r_{01}(C_{01} + C_{012}))\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + (C_{012}r_{02} - g_{01}M)\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + \tag{15}$$
$$+(C_{012}M - C_{012}L_{01})\frac{\partial i_1^2(x,t)}{\partial t^2} - (M(C_{01} + C_{012}) - C_{012}L_{02})\frac{\partial i_2^2(x,t)}{\partial t^2} = F_1(x,t);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(i_2(x,t) + C_{M02}r_{02}\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + (C_{M02}M + C_{M02}L_{02})\partial^2 i_2(x,t)/\partial t^2)) - g_{02}r_{02}i_2(x,t) -$$
$$-(g_{02}L_{02} - r_{02}(C_{02} + C_{012}))\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + (C_{012}r_{01} - g_{02}M)\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + \tag{16}$$
$$+(C_{012}M - C_{012}L_{02})\frac{\partial i_2^2(x,t)}{\partial t^2} - (M(C_{02} + C_{012}) - C_{012}L_{01})\frac{\partial i_1^2(x,t)}{\partial t^2} = F_2(x,t).$$

Позначимо для функції $f(x,t)$, заданої на інтервалі $(0, L)$, числа

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{k\pi x}{L})dx, \qquad k = 1,2,..., \tag{17}$$

тоді $f(x,t)$ відновлюється за коефіцієнтами b_k

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x), \qquad x \in (0,L). \tag{18}$$

Позначимо

$$i_1(x,t) = \sum_k^{\infty} C_k(t)\sin(\frac{k\pi}{L}x); \quad i_2(x,t) = \sum_k^{\infty} D_k(t)\sin(\frac{k\pi}{L}x); \quad F_i(x,t) = \sum_k^{\infty} F_{ik}(t)\sin(\frac{k\pi}{L}x), \tag{19}$$

де $i = 1, 2, \quad k = 1, 2, ...$.

Зауважимо, що $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(sin(\frac{k\pi}{L}x)) = -(\frac{k\pi}{L})^2 sin(\frac{k\pi}{L}x),$ тоді з рівнянь (15) і (16) одержимо

$$(C_{012}M - C_{012}L_{01})\frac{dC_k^2(t)}{dt^2} - ((k\pi/L)^2 C_{M01}r_{01} + (g_{01}L_{01} + r_{01}(C_{01} + C_{012})))\frac{dC_k(t)}{dt} -$$
$$-(k\pi/L)^2(C_{M01}M + C_{M01}L_{01}) + (M(C_{01} + C_{012}) - C_{012}L_{02}))\frac{dD_k^2(t)}{dt^2} + (C_{012}r_{02} - g_{01}M)\frac{dD_k(t)}{dt} - \tag{20}$$
$$-((k\pi/L)^2 + g_{01}r_{01})C_k(t) = F_{1k}(t);$$

$$(C_{012}M - C_{012}L_{02})\frac{dD_k^2(t)}{dt^2} - ((k\pi/L)^2 C_{M02}r_{02} + r_{02}(C_{02} + C_{012}))\frac{dD_k(t)}{dt} -$$
$$-(k\pi/L)^2(C_{M02}M + C_{M02}L_{02}) + (M(C_{02} + C_{012}) - C_{012}L_{01}))\frac{dC_k^2(t)}{dt^2} + (C_{012}r_{01} - g_{02}M)\frac{dC_k(t)}{dt} - \tag{21}$$
$$-((k\pi/L)^2 + g_{02}r_{02})D_k(t) = F_{2k}(t),$$

де $k = 1, 2, \ldots$.

Запишемо рівняння (20) і (21) у матрично-векторній формі, тобто

$$S_k \frac{d\vec{X}_k^2(t)}{dt^2} + P_k \frac{d\vec{X}_k(t)}{dt} + Q_k \vec{X}_k(t) = \vec{F}_k(t), \tag{22}$$

де $\vec{X}_k(t) = \begin{Vmatrix} C_k(t) \\ D_k(t) \end{Vmatrix}$; $\vec{F}_k(t) = \begin{Vmatrix} F_{1k}(t) \\ F_{2k}(t) \end{Vmatrix}$;

$$S_k = \begin{Vmatrix} (C_{012}M - C_{012}L_{01}) & -(k\pi/L)^2(C_{M01}M + C_{M01}L_{01}) + (M(C_{01} + C_{012}) - C_{012}L_{02}) \\ -(k\pi/L)^2(C_{M02}M + C_{M02}L_{02}) + (M(C_{02} + C_{012}) - C_{012}L_{01}) & (C_{012}M - C_{012}L_{02}) \end{Vmatrix};$$

$$P_k = \begin{Vmatrix} -((k\pi/L)^2 C_{M01}r_{01} + (g_{01}L_{01} + r_{01}(C_{01} + C_{012}))) & C_{012}r_{02} - g_{01}M \\ C_{012}r_{01} - g_{02}M & -((k\pi/L)^2 C_{M02}r_{02} + r_{02}(C_{02} + C_{012})) \end{Vmatrix};$$

$$Q_k = \begin{Vmatrix} -(\frac{k\pi}{L})^2 - g_{01}r_{01} & 0 \\ 0 & -(\frac{k\pi}{L})^2 - g_{02}r_{02} \end{Vmatrix};$$

$k = 1, 2, \ldots$.

Згідно (17), (18) і (19)

$$F_{ik}(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F_i(x,t)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx, \tag{23}$$

де $i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Згідно (17) і (18) отримаємо

$$\begin{aligned} F_1(x,t) &= g_{01}\int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t}ds + C_{01}\int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial^2 i_1(s,t)}{\partial t^2}ds - C_{M01}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^1 M_1(x,s)\frac{\partial^2 i_1(s,t)}{\partial t^2}ds + \\ &+ C_{012}\int_0^1 M_1(x,s)(\frac{\partial^2 i_1(s,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 i_2(s,t)}{\partial t^2})ds = g_{01}\int_0^1 M_1(x,s)(\sum_k^\infty \frac{dC_k(t)}{dt}\sin(k\pi s/L))ds + \\ &+ C_{01}\int_0^1 M_1(x,s)(\sum_k^\infty \frac{d^2C_k(t)}{dt^2}\sin(k\pi s/L))ds - C_{M01}\int_0^1 \frac{\partial^2 M_1(x,s)}{\partial x^2}(\sum_k^\infty \frac{d^2C_k(t)}{dt^2}\sin(k\pi s/L))ds + \\ &+ C_{012}\int_0^1 M_1(x,s)(\sum_k^\infty(\frac{d^2C_k(t)}{dt^2} - \frac{d^2D_k(t)}{dt^2})\sin(k\pi s/L))ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Зведення диференційно-інтегрального рівняння до диференційного можливо тоді, коли функція $M_1(x,s)$ задовольняє умові

$$\partial^2 M_1(x,s)/\partial x^2 = \gamma_1^2 M_1(x,s), \tag{25}$$

де $\gamma_1 = \sqrt{C_{01}/C_{M01}}$.

Тоді з (24) випливає

$$F_1(x,t) = \sum_l^\infty(\int_0^1 M_1(x,s)\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)(g_{01}\frac{dC_k(t)}{dt} + (C_{01} - C_{M01}\gamma_1^2 + C_{012})\frac{d^2C_k(t)}{dt^2} - C_{012}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}). \tag{26}$$

Позначимо

$$\widetilde{C}_{012}^{(1)} = C_{01} - C_{M01}\gamma_1^2 + C_{012}, \tag{27}$$

тоді

$$F_1(x,t) = \sum_l^\infty(\int_0^1 M_1(x,s)\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)(g_{01}\frac{dC_k(t)}{dt} + \widetilde{C}_{012}^{(1)}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2} - C_{012}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}). \tag{28}$$

Підставимо в (23) $i = 1$, отримаємо

$$F_{1k}(t)=\frac{2}{L}\int_0^L F_1(x,t)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L\sum_l^{\infty}(\int_0^1 M_1(x,s)\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)(g_{01}\frac{dC_k(t)}{dt}+ \\ +\widetilde{C}_{012}^{(1)}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2}-C_{012}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2})\sin(\frac{k\pi}{L}x))dx. \qquad (29)$$

Позначивши

$$m_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^1 M_1(x,s)\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx, \qquad (30)$$

отримаємо

$$F_{1k}(t)=\sum_l^{\infty}m_{kl}(g_{01}\frac{dC_k(t)}{dt}+\widetilde{C}_{012}^{(1)}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2}-C_{012}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}). \qquad (31)$$

Так як функція $M_1(x,s)$ є спадною, то розв’язати рівняння (25) можна так $M_1(x,s)=M_{01}e^{-\gamma_1|x-s|}$, де M_{01} – власна індуктивність витка первинної обмотки трансформатора.

Тоді з (30) випливає

$$m_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^1 M_{01}e^{-\gamma_1|x-s|}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx= \\ =\frac{2}{L}\int_0^L((\int_0^x M_{01}e^{-\gamma_1(x-s)}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx+\int_x^1 M_{01}e^{-\gamma_1(s-x)}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x))= \\ =\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^x M_{01}e^{-\gamma_1(x-s)}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx+\frac{2}{L}\int_0^L(\int_x^1 M_{01}e^{-\gamma_1(s-x)}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)=m'_{kl}+m''_{kl}, \qquad (32)$$

де $m'_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^x M_{01}e^{-\gamma_1(x-s)}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx;\ m''_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_x^1 M_{01}e^{-\gamma_1(x-s)}\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx.$

Аналогічно до (25) позначимо

$$\partial^2M_2(x,s)/\partial x^2=\gamma_2^2M_2(x,s), \qquad (33)$$

де $\gamma_2=\sqrt{C_{02}/C_{M02}}$.

Далі згідно з (13), (19), (33) рівняння (14) запишемо

$$F_2(x,t)=g_{02}\int_0^1 M_2(x,s)\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}ds+(C_{02}-C_{M02}\frac{\partial^2}{\partial x^2})\int_0^1 M_2(x,s)\frac{\partial^2 i_2(s,t)}{\partial t^2}ds+ \\ +C_{012}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 M_2(x,s)(\frac{\partial i_2(s,t)}{\partial t}-\frac{\partial i_1(s,t)}{\partial t})ds=g_{02}\int_0^1 M_2(x,s)(\sum_k^{\infty}\frac{dD_k(t)}{dt}\sin(\frac{k\pi}{L}s))ds+ \\ +C_{02}\int_0^1 M_2(x,s)(\sum_k^{\infty}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}\sin(\frac{k\pi}{L}))ds-C_{M02}\int_0^1\gamma_2^2M_2(x,s)(\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}\sin(\frac{k\pi}{L}s))ds+ \\ +C_{012}\int_0^1 M_2(x,s)\sum_k^{\infty}(\frac{d^2D_k(t)}{dt}-\frac{d^2C_k(t)}{dt})\sin(\frac{k\pi}{L}s)ds= \\ =\sum_k^{\infty}(\int_0^1 M_2(x,s)\sin(\frac{k\pi}{L}s)ds)(g_{02}\frac{dD_k(t)}{dt}+(C_{02}-C_{M02}\gamma_2^2+C_{012})\frac{d^2D_k(t)}{dt}-C_{012}\frac{d^2C_k(t)}{dt})). \qquad (34)$$

Аналогічно до (27) позначимо

$$\widetilde{C}_{012}^{(2)}=C_{02}-C_{M02}\gamma_2^2+C_{012}, \qquad (35)$$

тоді згідно з (34) і (35)

$$F_2(x,t)==\sum_l^{\infty}(\int_0^1 M_2(x,s)\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)(g_{02}\frac{dD_k(t)}{dt}+\widetilde{C}_{012}^{(2)}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}-C_{012}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2}). \qquad (36)$$

Підставляємо в (23) $i=2$, отримуємо

$$F_{2k}(t)=\frac{2}{L}\int_0^L F_2(x,t)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L(\sum_l^\infty(\int_0^l M_2(x,s)\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)(g_{02}\frac{dD_k(t)}{dt}+\widetilde{C}_{012}^{(2)}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}-$$
$$-C_{012}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2})\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx. \tag{37}$$

Позначивши

$$n_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^1 M_2(x,s)\sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx, \tag{38}$$

(27) запишемо так

$$F_{2k}(t)=\sum_l^\infty n_{kl}(g_{02}\frac{dD_k(t)}{dt}+\widetilde{C}_{012}^{(2)}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}-C_{012}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2}). \tag{39}$$

Так як функція $M_2(x,s)$ є спадною, то розв'язати рівняння (33) можна так $M_2(x,s)=M_{02}e^{-\gamma_2|x-s|}$, де M_{02} – власна індуктивність витка вторинної обмотки трансформатора.

Тоді з (38) випливає

$$n_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^l M_{02}e^{-\gamma_2|x-s|}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx=$$
$$=\frac{2}{L}\int_0^L((\int_0^x M_{02}e^{-\gamma_2(x-s)}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx+\int_x^l M_{02}e^{-\gamma_2(s-x)}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x))= \tag{40}$$
$$=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^x M_{02}e^{-\gamma_2(x-s)}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx+\frac{2}{L}\int_0^L(\int_x^l M_{02}e^{-\gamma_2(s-x)}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)=n'_{kl}+n''_{kl},$$

де $n'_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_0^x M_{02}e^{-\gamma_2(x-s)}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx;\quad n''_{kl}=\frac{2}{L}\int_0^L(\int_x^l M_{02}e^{-\gamma_2(x-s)}\,sin(\frac{l\pi}{L}s)ds)\,sin(\frac{k\pi}{L}x)dx.$

Розглянемо праву частину рівнянь (20) і (21) та згідно (13) і (14), використовуючи (18), (20), (26) і (36), запишемо

$$\vec{F}_k(t)=\left\|\begin{matrix}F_{1k}(t)\\F_{2k}(t)\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\sum_l^\infty m_{kl}(g_{01}\frac{dC_k(t)}{dt}+\widetilde{C}_{012}^{(1)}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2}-C_{012}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2})\\ \sum_l^\infty n_{kl}(g_{02}\frac{dD_k(t)}{dt}+\widetilde{C}_{012}^{(2)}\frac{d^2D_k(t)}{dt^2}-C_{012}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2})\end{matrix}\right\|=$$
$$=\left\|\begin{matrix}\sum_l^\infty m_{kl}g_{01} & 0\\ 0 & \sum_l^\infty n_{kl}g_{02}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{dC_k(t)}{dt}\\ \frac{dD_k(t)}{dt}\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}\sum_l^\infty m_{kl}\widetilde{C}_{012}^{(1)} & -\sum_l^\infty m_{kl}C_{012}\\ -\sum_l^\infty n_{kl}C_{012} & \sum_l^\infty n_{kl}\widetilde{C}_{012}^{(2)}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{d^2C_k(t)}{dt^2}\\ \frac{d^2D_k(t)}{dt^2}\end{matrix}\right\|= \tag{41}$$
$$=G\frac{d\vec{X}_k(t)}{dt}+H\frac{d^2\vec{X}_k(t)}{dt^2},$$

де $G=\left\|\begin{matrix}\sum_l^\infty m_{kl}g_{01} & 0\\ 0 & \sum_l^\infty n_{kl}g_{02}\end{matrix}\right\|;\qquad H=\left\|\begin{matrix}\sum_l^\infty m_{kl}\widetilde{C}_{012}^{(1)} & -\sum_l^\infty m_{kl}C_{012}\\ -\sum_l^\infty n_{kl}C_{012} & \sum_l^\infty n_{kl}\widetilde{C}_{012}^{(2)}\end{matrix}\right\|.$

Згідно (23), підставляючи рівняння (7) і (8), а також враховуючи відповідно рівняння (5) і (6), одержуємо

$$\vec{F}_k(t)=\left\|\begin{matrix}F_{1k}(t)\\F_{2k}(t)\end{matrix}\right\|=\frac{2}{L}\int_0^L\left\|\begin{matrix}F_{1k}(x,t)\\F_{2k}(x,t)\end{matrix}\right\|sin(\frac{k\pi}{L}x)dx=G\frac{d\vec{X}_k(t)}{dt}+H\frac{d^2\vec{X}_k(t)}{dt^2}. \tag{42}$$

Отже рівняння (22) запишемо так

$$S_k\frac{d\vec{X}_k^2(t)}{dt^2}+P_k\frac{d\vec{X}_k(t)}{dt}+Q_k\vec{X}_k(t)=G\frac{d\vec{X}_k(t)}{dt}+H\frac{d^2\vec{X}_k(t)}{dt^2}, \tag{43}$$

де $k = 1, 2, \ldots$.

Позначимо змінний вектор

$$\vec{X}_k(t) = (C_k(t),\, D_k(t))^T \;\in\; R^2, \tag{44}$$

де $C_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L i_1(x,t)\sin(\frac{k\pi x}{L})dx;\;\; dC_k(t)/dt = \frac{2}{L}\int_0^L \partial i_1(x,t)/dt\,\sin(\frac{k\pi x}{L})dx;$

$D_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L i_2(x,t)\sin(\frac{k\pi x}{L})dx;\;\; dD_k(t)/dt = \frac{2}{L}\int_0^L \partial i_2(x,t)/dt\,\sin(\frac{k\pi x}{L})dx;$

$k = 1, 2, \ldots$.

Зафіксуємо $N = \text{const}$ і введемо сталі матриці S, P, Q, G, H розміру $2N \times 2N$.

Позначимо невідомий розв’язок через вектор розмірністю $2N$, тобто

$$\vec{X}(t) = (X_1,\, X_2,\, \cdots, X_{2N})^T . \tag{45}$$

Рівняння (43) запишемо так

$$S\frac{d\vec{X}^2(t)}{dt^2} + P\frac{d\vec{X}(t)}{dt} + Q\vec{X}(t) = G\frac{d\vec{X}(t)}{dt} + H\frac{d^2\vec{X}(t)}{dt^2}. \tag{46}$$

$$(S - H)\frac{d\vec{X}^2(t)}{dt^2} = (G - P)\frac{d\vec{X}(t)}{dt} - Q\vec{X}(t); \tag{47}$$

$$\frac{d^2\vec{X}(t)}{dt^2} = (S - H)^{-1}(G - P)\frac{d\vec{X}(t)}{dt} - (S - H)^{-1}Q\vec{X}(t) = A\frac{d\vec{X}(t)}{dt} - B\vec{X}(t), \tag{48}$$

де $A = (S - H)^{-1}(G - P);\quad B = (S - H)^{-1}Q.$

Здійснимо заміну невідомих $\vec{Y}_1(t) = \vec{X}(t)$ та $\vec{Y}_2(t) = d\vec{X}(t)/dt$, тоді враховуючи (48) отримаємо

$$d\vec{Y}_1(t)/dt = Y_2(t); \tag{49}$$

$$d\vec{Y}_2(t)/dt = d^2\vec{X}(t)/dt^2 = A\vec{Y}_2(t) - B\vec{Y}_1(t) \tag{50}$$

або

$$\begin{Vmatrix} d\vec{Y}_1(t)/dt \\ d\vec{Y}_2(t)/dt \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -B & A \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{Vmatrix}. \tag{51}$$

З (49) і (50) отримуємо

$$\begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -B & A \end{Vmatrix} \times \int_0^t \begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(\tau) \\ \vec{Y}_2(\tau) \end{Vmatrix} d\tau + \begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(0) \\ \vec{Y}_2(0) \end{Vmatrix}. \tag{52}$$

Введемо оператор

$$\tilde{A}\begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -B & A \end{Vmatrix} \times \int_0^t \begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(\tau) \\ \vec{Y}_2(\tau) \end{Vmatrix} d\tau , \tag{53}$$

тоді

$$(1 - \tilde{A})\begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(0) \\ \vec{Y}_2(0) \end{Vmatrix}. \tag{54}$$

З (53) отримаємо

$$\begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(t) \\ \vec{Y}_2(t) \end{Vmatrix} = (1 - \tilde{A})^{-1}\begin{Vmatrix} \vec{Y}_1(0) \\ \vec{Y}_2(0) \end{Vmatrix} \tag{55}$$

і знаходимо розв’язок $\vec{Y}_1(t) = \vec{X}(t)$ рівняння (48).

Графік зміни струму первинної обмотки $i_1(x, t)$ показано на рис. 2.

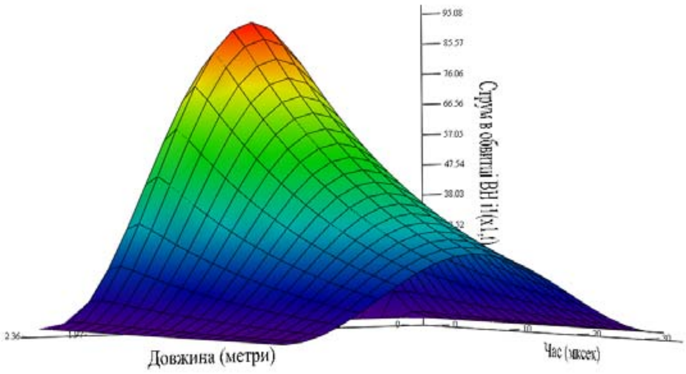

Рис. 2

Такий підхід усуває необхідність урахування крайових умов. Задля розв'язання задачі аналізу хвильових процесів достатньо визначення тільки початкових умов на відрізку $(0, l)$.

III. Висновки. Запропонований метод дає змогу досліджувати високочастотні хвильові процеси в обмотках двообмоткових трансформаторів з урахуванням залежності напруги та струму від відстані й часу, забезпечує можливість урахування співвідношення між інтервалом часу поширення електромагнітних хвиль уздовж усієї довжини обмотки й інтервалом часу, впродовж якого струм і напруга змінюються значно суттєвіше від їхньої зміни під час процесу, що розглядається.

1. Кириленко О.В., Сегеда М.С., Буткевич О.Ф., Мазур Т.А. Математичне моделювання в електроенергетиці. Львів: Львівська політехніка, 2013. 608 с.
2. Исаев Ю.Н., Старцева Е.В., Щекотуев А.В. Исследование волновых процессов обмоток трансформатора как цепи с распределенными параметрами. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2015. Т. 326. № 8. С. 29-35.
3. Lavrinovich V.A., Isaev Y.N., Mytnikov A.V. Advanced control state technology of transformer. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2013. Vol. 5. Iss. 17. No 4. Pp. 94-98.
4. Mikulović J.Č., Šekara T.B. The Numerical Method of Inverse Laplace Transform for Calculation of Overvoltages in Power Transformers and Test Results. *Serbian Journal of Electrical Engineering*. 2014. Vol. 11. No 2. Pp. 243-256.
5. Bontidean S. G., Badic M., Iordache M., Galan N. Simulations and experimental tests on the distribution of overvoltage within transformer windings. *UPB Scientific Bulletin, Series C: Electrical Engineering and Computer Science.* 2015. Vol. 77. Iss. 3.
6. de Azevedo A.C., Rezende I., Delaiba A.C., Oliveira C., de Carvalho B.C., de S. Bronzeado H. Investigation of transformer electromagnetic forces caused by external faults using FEM. *IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*. Venezuela, Latin America, 2006. Pp. 1-6.
7. Сегеда М.С., Черемних Є.В., Мазур Т.А. Математичне моделювання вільних коливань напруги в обмотках трансформаторів з урахуванням взаємоіндукції між витками під час імпульсних перенапруг. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2013. № 1 (133). С. 68-76.
8. Сегеда М.С., Черемних Є. В., Хімюк І.В., Мазур Т.А., Курулишин О.М. Математичне моделювання розподілу напруги вздовж обмотки трансформатора під час імпульсних перенапруг. *Технічна електродинаміка*. 2015. № 6. С. 8-11.
9. Hoholyuk O., Byczkowska-Lipinska L. Mathematical models of transformers for electromagnetic transient process simulation. *Przeglad Electrotechniczny*. 2008. No 6. Pp. 278-280.
10. Seheda M.S., Mazur T.A., Kurylyshyn O.M. Mathematical model for investigation of wave processes in high-voltage double winding transformers. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE).* Lviv, Ukraine, September 2-5, 2015. Pp. 165-167.
11. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. Cigre. April, 2014.
12. Бьюлей Л.В. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах. М.-Л.: ОНТИ, 1938. 288 с.

УДК 621.314.057

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХОБМОТОЧНЫХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

М.С. Сегеда, докт. техн. наук, **Є. В. Черемних,** докт. ф.-м. наук, **П.Ф. Гоголюк,** канд. техн. наук,
Т.А Мазур, канд. техн. наук, **Ю.В. Блызнак**
Национальный университет «Львовская политехника»,
ул. С. Бандеры 12, Львов, 79013, Украина.
E-mail: mseheda@ukr.net, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, mazyr@ukr.net, blyznakyura@gmail.com

Разработана математическая модель для исследования волновых процессов в двухобмоточных трансформаторах с учетом электромагнитных связей между витками обмотки и между обмотками. Для решения дифференциально-интегральных уравнений в частных производных предложен метод разделения переменных. Библ. 12, рис. 2.

Ключевые слова: обмотка трансформатора, математическое моделирование, частные производные, распределенные параметры, импульсная волна, волновые процессы.

MATHEMATICAL MODEL OF WAVE PROCESSES IN TWO-WINDING TRANSFORMERS

M.S. Seheda, Ye.V. Cheremnykh, P.F. Gogolyuk, T.A. Mazur, Y.V. Blyznak
Lviv Polytechnic National University,
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine.
E-mail: mseheda@ukr.net, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, mazyr@ukr.net, blyznakyura@gmail.com

A mathematical model has been developed to study the wave processes of two-winding transformers, taking into account the electromagnetic connections between the turns of the winding and between the windings. To solve differential-integral equations in partial derivatives, a method of separation of variables is proposed. References 12, figures 2.
Keywords: transformer winding, mathematical modeling, partial derivatives, distributed parameters, impulse wave, wave processes.

1. Kyrylenko O.V., Seheda M.S., Butkevych O.F., Mazur T.A. Mathematical Modeling in Electric Power Engineering. Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2013. 608 p. (Ukr)
2. Isaev Y.N., Startseva E.V., Schekotuev A.V. Investigation of wave processes of transformer windings as electric circuit with distributed parameters. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniering energoresursov*. 2015. Vol. 326. No 8. Pp. 29-35. (Rus)
3. Lavrinovich V.A., Isaev Y.N., Mytnikov A.V. Advanced control state technology of transformer. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2013. Vol. 5. Iss. 17. No 4. Pp. 94-98.
4. Mikulović J. Č., Šekara T. B. The Numerical Method of Inverse Laplace Transform for Calculation of Overvoltages in Power Transformers and Test Results. *Serbian Journal of Electrical Engineering.* 2014. Vol. 11. No 2. Pp. 243-256.
5. Bontidean S. G., Badic M., Iordache M., Galan N. Simulations and experimental tests on the distribution of overvoltage within transformer windings. *U.P.B. Sci. Bull*. Series C. 2015. Vol. 77. Iss. 3.
6. de Azevedo A.C., Rezende I., Delaiba A.C., Oliveira C., de Carvalho B.C., de Bronzeado H.S. Investigation of transformer electromagnetic forces caused by external faults using FEM. *IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*. Venezuela, Latin America, 2006. Pp. 1-6.
7. Seheda M.S., Cheremnykh Y.V., Mazur T.A. Mathematical modeling of free voltage oscillations on transformer windings into accout winds mutual induction under surge overvoltages. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2013. No 1 (133). Pp. 68-76. (Ukr)
8. Seheda M.S., Cheremnykh Y.V., Chimjk I.V., Mazur T.A., Kurylyshyn O.M. Mathematical modelling of stress distribution along the winding transformers under impulse surges. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2015. No 6. Pp. 8-11. (Ukr)
9. Hoholyuk O., Byczkowska-Lipinska L. Mathematical models of transformers for electromagnetic transient process simulation. *Przeglad Electrotechniczny*. 2008. No 6. Pp. 278-280.
10. Seheda M.S., Mazur T.A, Kurylyshyn O.M. Mathematical model for investigation of wave processes in high-voltage double winding transformers. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*. Lviv, Ukraine, September 2–5, 2015. Pp. 165-167.
11**.** Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. Cigre. April, 2014.
12. Bewley L.B. Traveling waves on transmission systems. Moskwa-Leningrad: ONTI, 1938. 288 p.

Надійшла 02.08.2019
Остаточний варіант 29.07.2020