

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ДВООБВИТКОВИХ ТРАНСФОРМАТОРАХ У МЕТОДІ ПРЯМИХ

М.С. Сегада^{*}, докт. техн. наук, П.Ф. Гоголюк^{**}, канд. техн. наук, Ю.В. Близнак^{***}
Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. Степана Бандери, 12, Львів, 79013, Україна.
E-mail: mykhailo.s.seheda@lpnu.ua, petro.f.hoholiuk@lpnu.ua, blyznakyura@gmail.com

У методі прямих розроблено математичну модель двообвиткового трансформатора для дослідження швидкоплинних перехідних процесів у його обвитках у вигляді електромагнетного кола з урахуванням основного магнетного потоку, власних і взаємних міжвиткових та міжобвиткових потоків розсіювання, поперечних виткових й поздовжніх міжвиткових ємностей обвиток. Створена модель спрощує інженерні розрахунки швидкоплинних перехідних процесів у обвитках застосуванням методів теорії електромагнітних кіл замість складних для практичного застосування методів математичної фізики. Досліджено перехідні процеси та розподіл напруги в обвитках трансформатора за дії на них перенапруги у вигляді стандартизованого імпульсу. Бібл. 8, рис. 4.

Keywords: математична модель, трансформатор, електричні та магнетні зв'язки, імпульсна перенапруга, перехідні процеси.

I. Вступ. У багатьох працях аналіз швидкоплинних перехідних процесів в обвитках трансформаторів здійснюється на підставі математичних моделей з використанням математичних моделей у звичайних диференційних рівняннях, сформованих на підставі заступних схем із зосередженими параметрами, а перехідну характеристику отримано за допомогою аналізу у часовій області [1]. Також у праці [2] наведено розрахунок параметрів заступної схеми трансформатора та досліджено внутрішні перехідні процеси в обвитках трансформаторів, що описуються звичайними диференційними рівняннями за припущення лінійного розподілу напруги вздовж обвитки.

У роботі [3] наведено аналіз впливу зміни параметрів обвитки еквівалентної заступної схеми трансформатора як кола з розподіленими параметрами на поширення хвилі перенапруги вздовж обвитки трансформатора.

У теперішній час методи аналізу хвильових процесів у обвитках трансформаторів спрямовані на розроблення математичних моделей з урахуванням основного магнетного потоку, власних і взаємних міжвиткових та міжобвиткових потоків розсіювання обвиток трансформаторів [4, 5].

У роботах [6, 7] наведено методи розрахунку хвильових процесів у двообвиткових трансформаторах, на підставі яких можна здійснювати аналіз розподілу напруги вздовж обвиток під час дії на них імпульсної перенапруги. Недоліком таких моделей є складнощі урахування крайових умов для диференційно-інтегральних рівнянь з частинними похідними за наявності кінцевих пристроїв зі зосередженими параметрами.

Метою роботи є розроблення математичної моделі двообвиткових трансформаторів у вигляді заступної схеми зі зосередженими параметрами в методі прямих для дослідження перехідних процесів в обвитках за дії на них імпульсної перенапруги з урахуванням власних і взаємних міжвиткових та міжобвиткових і взаємних потоків розсіювання обвиток, їхніх поздовжніх і поперечних міжвиткових та міжобвиткових ємностей.

II. Математична модель. Математичну модель двообвиткового трансформатора розроблено на підставі математичної моделі аналізу швидкоплинних процесів, що наведено в [6, 7].

Математичні моделі швидкоплинних процесів обвиток трансформатора складаються з двох груп диференційно-інтегральних рівнянь з частинними похідними, які наведено в [7]:

- рівнянь струмів зміщення та витоків, сформованих на підставі принципу неперервності струму;
- рівнянь спадів напруги, сформованих на підставі другого закону Кірхгофа.

Записані на підставі принципу неперервності рівняння струмів зміщення обвиток трансформатора мають вигляд

© Сегада М.С., Гоголюк П.Ф., Близнак Ю.В., 2022

ORCID ID: * <https://orcid.org/0000-0001-8459-5758>; ** <https://orcid.org/0000-0003-0002-4638> ;

*** <https://orcid.org/0000-0002-4914-2283>

$$\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial x} + (C_{120} + C_{10}) \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - C_{120} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - C_{M10} \frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial x} - C_{120} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} + (C_{120} + C_{20}) \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - C_{M20} \frac{\partial^3 u_2(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (2)$$

де $i_1(x,t), i_2(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t)$ – струми та напруги обвиток трансформатора; C_{10}, C_{20}, C_{120} – довжинні власні й взаємні ємності обвиток; C_{M10}, C_{M20} – довжинні міжвиткові ємності обвиток.

Рівняння напруг вздовж обвиток трансформатора на підставі [7] сформуємо у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + \frac{d\psi_{m10}(x,t)}{dt} + L_{\sigma 10} \frac{di_1(x,t)}{dt} + M_{\sigma 0} \frac{di_2(x,t)}{dt} + \int_0^x (M_{\sigma 10}(x,s) \frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + M_{\sigma 210}(x,s) \frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t}) ds + \\ + \int_x^l (M_{\sigma 10}(x,s) \frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + M_{\sigma 210}(x,s) \frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t}) ds + R_{10} i_1(x,t) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + K \frac{d\psi_{m10}(x,t)}{dt} + L_{\sigma 20} \frac{di_2(x,t)}{dt} + M_{\sigma 0} \frac{di_1(x,t)}{dt} + \int_0^x (M_{\sigma 20}(x,s) \frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + M_{\sigma 120}(x,s) \frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t}) ds + \\ + \int_x^l (M_{\sigma 20}(x,s) \frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + M_{\sigma 120}(x,s) \frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t}) ds + R_{20} i_2(x,t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\psi_{m10}(x,t)$ – зведене до первинної обвитки основне потокозчеплення елемента стрижня магнетопроводу; $L_{\sigma 10}, L_{\sigma 20}, M_{\sigma 0}$ – власні та взаємні довжинні індуктивності розсіювання обвиток; $M_{\sigma 10}(x,s), M_{\sigma 20}(x,s), M_{\sigma 120}(x,s), M_{\sigma 210}(x,s)$ – власні та взаємні довжинні міжвиткові індуктивності розсіювання елементів обвиток; l – довжина обвитки; x – поточна довжинна координата; s – поточна координата, за якою визначається відстань від місця x до координати будь якого іншого місця осі обвитки; $K = W_2 / W_1$ – коефіцієнт трансформації трансформатора.

Взявши до уваги, що основний магнетний потік вздовж стрижня магнетопроводу є однаковим, маємо $\partial \psi_{m10}(x,t) / \partial x = 0$. Тоді сформований на підставі закону Ампера зв'язок між основним потокозчепленням і струмами обвиток для будь якої координати x матиме вигляд

$$i_1(x,t) + K i_2(x,t) = i_{m10}(\psi_{m10}(x,t)), \quad (5)$$

де $i_{m10}(\psi_{m10}(x,t))$ – вебер-амперна характеристика ділянки стрижня магнетопроводу.

Сформовану систему диференційно-інтегральних рівнянь з частинними похідними доцільно розв'язувати методом прямих. Для створення математичної моделі в методі прямих [8] просторові частинні похідні в рівняннях (1) – (2) і (3) – (4) замінюємо скінченими різницями вперед з порядком похибки $O(\Delta x)$, а інтеграли – відповідними сумами. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{i_{1k+1}(x_k,t) - i_{1k}(x_k,t)}{\Delta x} + (C_{120} + C_{10}) \frac{du_{1k}(x_k,t)}{dt} - C_{120} \frac{du_{2k}(x_k,t)}{dt} - \\ - C_{M10} \frac{d(u_{1k+1}(x_{k+1},t) - 2u_{1k}(x_k,t) + u_{1k-1}(x_{k-1},t))}{\Delta x^2} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{i_{2k+1}(x_k,t) - i_{2k}(x_k,t)}{\Delta x} + (C_{120} + C_{10}) \frac{du_{2k}(x_k,t)}{dt} - C_{120} \frac{du_{1k}(x_k,t)}{dt} - \\ - C_{M10} \frac{d(u_{2k+1}(x_{k+1},t) - 2u_{2k}(x_k,t) + u_{2k-1}(x_{k-1},t))}{\Delta x^2} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{1k+1}(x_k, t) - u_{1k}(x_k, t)}{\Delta x} + \frac{d\psi_{m1k}(x_k, t)}{dt} + L_{\sigma 10k} \frac{di_1(x_k, t)}{dt} + M_{\sigma 0k} \frac{di_2(x_k, t)}{dt} + \\ & \sum_{i \neq k}^{m-1} \left(M_{\sigma 10ki}(x_k) \frac{di_{1k}(x_k, t)}{dt} + M_{\sigma 210ki}(x_k) \frac{di_{2k}(x_k, t)}{dt} \right) + \\ & + \sum_{i \neq k}^{m-1} \left(M_{\sigma 10ki}(x_k) \frac{di_{1k}(x_k, t)}{dt} + M_{\sigma 210ki}(x_k) \frac{di_{2k}(x_k, t)}{dt} \right) + r_{10} i_{1k}(x_k, t) = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{2k+1}(x_k, t) - u_{2k}(x_k, t)}{\Delta x} + K \frac{d\psi_{m1k}(x_k, t)}{dt} + L_{\sigma 20k} \frac{di_2(x_k, t)}{dt} + M_{\sigma 0k} \frac{di_1(x_k, t)}{dt} + \\ & + \sum_{i \neq k}^{m-1} \left(M_{\sigma 20ki}(x_k) \frac{di_{2k}(x_k, t)}{dt} + M_{\sigma 210ki}(x_k) \frac{di_{1k}(x_k, t)}{dt} \right) + \\ & + \sum_{i \neq k}^{m-1} \left(M_{\sigma 20ki}(x_k) \frac{di_{2k}(x_k, t)}{dt} + M_{\sigma 210ki}(x_k) \frac{di_{1k}(x_k, t)}{dt} \right) + r_{20} i_{2k}(x_k, t) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де $k = \overline{1, m-2}$, m – кількість точок дискретизації довжинної координати x вздовж осі обвитки.

На підставі рівнянь (5) – (9) синтезовано заступну схему трансформатора, яку наведено на рис. 1. Схема складається з п'яти ланок ($m=6$) з відображенням електромагнетних зв'язків між елементами обмоток і магнетопроводом трансформатора. Зазначимо, що синтез схеми можливий за нехтування в рівняннях (6) і (7) членами, в які входить друга похідна напруги за координатою x .

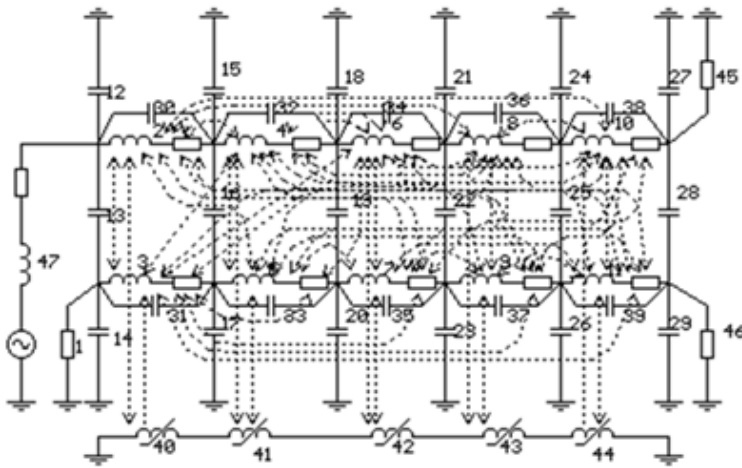


Рис. 1

Для прикладу візьмемо п'ятиланкову заступну схему трансформатора, що складається з 12 незалежних вузлів і 47 віток (5 – магнетних опорів, 11 – резистивно-індуктивних, 3 – резистивних опори, 22 – ємностей, 10 – магнетних зв'язків між обвитками та стрижнем магнетопроводу й 45 взаємоіндуктивностей розсіювання). У схемі на рис. 1 вітка 47 враховує резистивний опір і індуктивність кола поширення імпульсу напруги між джерелом та первинною обвиткою трансформатора, а резистивний опір вітки 45 відтворює режим нейтралі первинної обвитки. Для вторинної обвитки нейтраль прийнято ізольованою. Крайові умови для рівнянь (6) – (9) отримуються дискретизацією рівнянь кінцевих пристроїв: вітки 1, 45, 46 і 47.

Програмну реалізацію розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь, складеної для схеми на рис. 1, в методі незалежних координат для трансформатора ТД 16000/115/35 здійснено в програмному середовищі MathCAD 15.

На рис. 2 наведено результати розрахунку у відносних одиницях розподілу напруги для

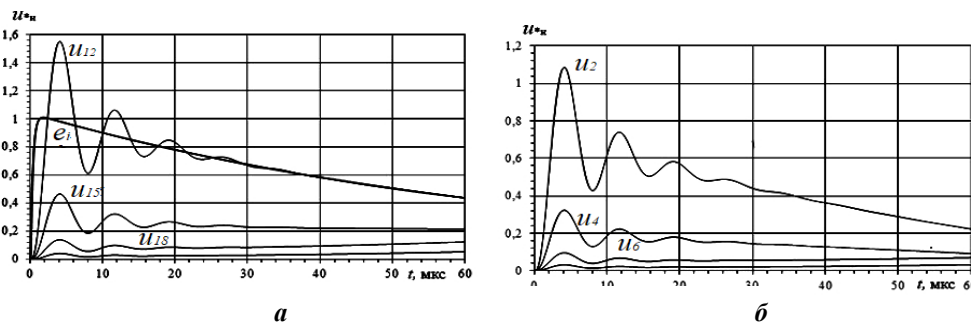


Рис. 2

первинної обвитки (а – відносно землі: вітки 12, 15, 18, 21; б – поздовжній розподіл: вітки 2, 4, 6, 8) за наявності індуктивності й резистивного опору у вітці 47 за дії перенапруги у вигляді стандартизованого імпульсу

e_i 1,5/50 мкс з одиничною амплітудою. Нейтраль первинної обвитки уземлено, а вторинної – ізольовано.

На рис. 3 наведено розподіл напруги для вторинної обвитки (*a* – відносно землі: вітки 14, 17, 20, 23; *б* – поздовжній, міжвитковий розподіл напруги: вітки 31, 33, 35, 37).

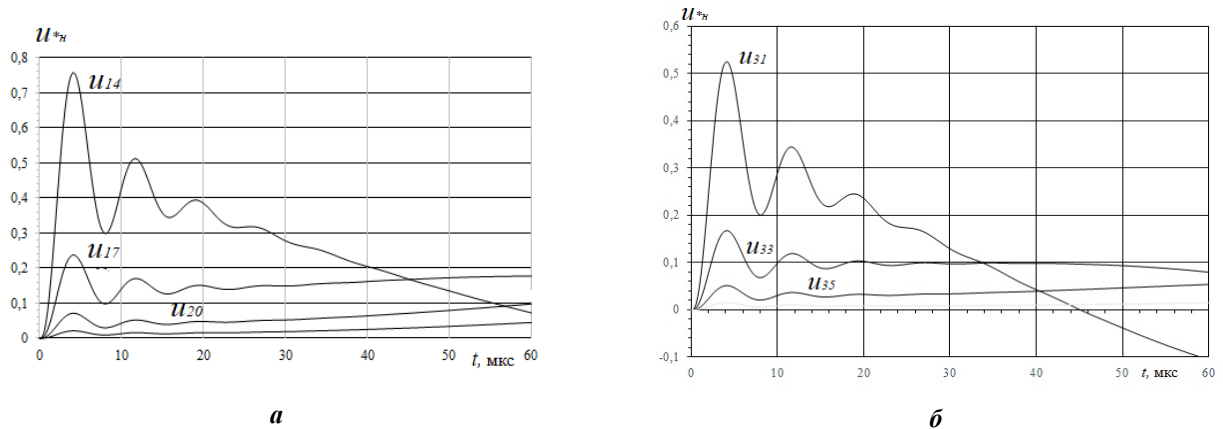


Рис. 3

На рис. 4 наведено результати розрахунку розподілу напруги первинної обвитки (*a* – відносно землі, *б* – поздовжній, міжвитковий розподіл) за наявності тільки резистивного опору у вітті 1.

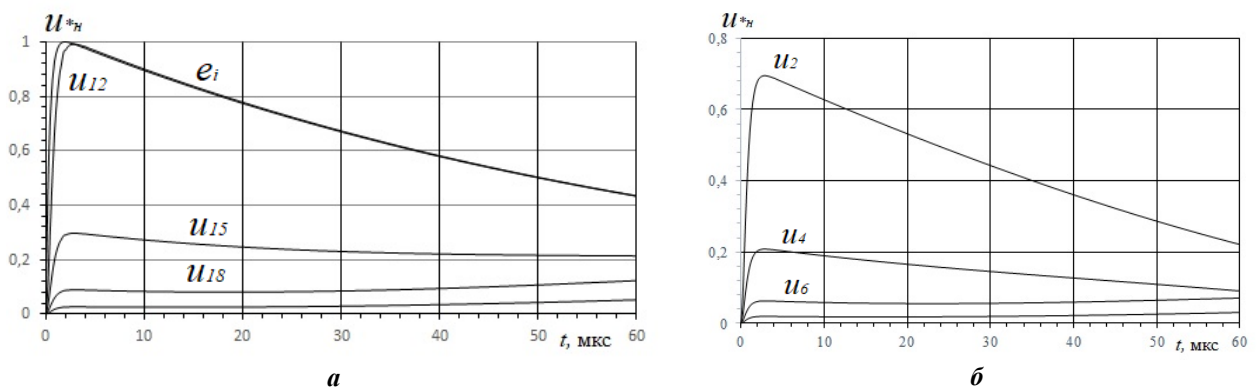


Рис. 4

З отриманих графіків випливає, що розподіл напруги вздовж обвиток суттєво нерівномірний, найбільші градієнти напруги є на початку обвиток, що збігається з результатами експериментів.

Висновки. На підставі методу прямих для системи диференційно-інтегральних рівнянь з частинними похідними розроблено математичну модель для дослідження швидкоплинних перехідних процесів у силових двообвиткових трансформаторах у вигляді заступної схеми, що складається з елементів електромагнітного кола, з урахуванням основного магнетного потоку, власних і взаємних міжвиткових та міжобвиткових магнетних потоків розсіювання, поперечних і поздовжніх міжвиткових ємностей обвиток. Такий підхід під час інженерних розрахунків швидкоплинних перехідних процесів у трансформаторах дає змогу використання методів теорії електромагнітних кіл замість складних для практичного застосування методів математичної фізики.

Досліджено розподіл напруги вздовж обвиток двообвиткового трансформатора та показано, що найбільший градієнт напруги має місце на початку обвиток з боку набігання імпульсу. Запропонована математична модель дає змогу моделювання перенапруг в обвитках трансформаторів, на підставі яких можна розробляти засоби захисту від перенапруг і координувати їхню ізоляцію.

1. Župan T., Trkulja B., Štih Ž. Power transformer winding model for lightning impulse testing. *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 202. Pp. 297-304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.717>

2. Lavrinovich V.A., Isaev Y.N., Mytnikov A.V. Advanced control state technology of transformer. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2013. Vol. 5. Iss. 17. No 4. Pp. 94-98.

3. Deaconu D., Chirilă A.-I., Năvrănescu V., Ghiță C., Răchițeanu A., Viișoreanu A.-M. The Influence of Parameters of a Power Transformer Winding Equivalent Distributed Circuit Model on Atmospheric Overvoltage Wave

Internal Propagation along the Windings. International Conference and Exposition on *Electrical And Power Engineering* (EPE). Iasi, Romania, October 22-23, 2020. Pp. 507-512. DOI: <https://doi.org/10.1109/EPE50722.2020.9305584>.

4. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. Part 1: Expertise. Joint Working Group A2/C4.39. CIGRE Brochure 577A, April 2014. 176 p. URL: http://xmlopez.webs.uvigo.es/Html/Info/2014_Electrical_Transients_Part1_Expertise.pdf (accessed at 12.05.2022).

5. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. Part 2: Case Studies. Joint Working Group A2/C4.39. CIGRE Brochure 577B, April 2014. 124 p. URL: http://xmlopez.webs.uvigo.es/Html/Info/2014_Electrical_Transients_Part2_Expertise.pdf (accessed at 12.05.2022).

6. Сегада М.С., Черемних Є.В., Гоголюк П.Ф., Мазур Т.А., Близнак Ю.В. Математична модель хвильових процесів у двообмоткових трансформаторах. *Технічна електродинаміка*. 2020. № 6. С. 5-14. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2020.06.005>.

7. Sehed M.S., Cheremnykh Y.V., Gogolyuk P.F., Blyznak Y.V. Mathematical modeling of wave processes in two-winding transformers taking into account the main magnetic flux. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2021. No 5 (185). Pp. 80-86. DOI: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2021-5/080>.

8. Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite Elements and Approximation. Dover Publications, NY, 2013. 352 p.

MATHEMATICAL MODEL FOR ANALYSIS OF TRANSIENT IN TWO-WINDINGS TRANSFORMERS IN THE STRAIGHTS METHOD

M.S. Sehed, P.F. Gogolyuk, Y.V. Blyznak

Lviv Polytechnic National University,

12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine.

E-mail: mykhailo.s.sehed@lpnu.ua; petro.f.hoholiuk@lpnu.ua; blyznakyura@gmail.com

A mathematical model of a two-winding transformer for research of fast transient processes in windings in the form of an electromagnetic circuit, taking into account the main magnetic flux, own and mutual interturns and interwinding dissipation fluxes, transverse turns and longitudinal interwinding capacitances of the winding, is developed by using the straights method. The created model simplifies engineering calculations of fast transient processes in windings by applying the methods of the theory of electromagnetic circuits instead of the methods of mathematical physics, which are difficult for practical application. Transient processes and voltage distribution in transformer windings, under the action of pulse overvoltage in the form of a standardized pulse, are researched. References 8, figures 4.

Keywords: mathematical model, transformer, electrical and magnetic connections, pulse overvoltage, transients.

1. Župan T., Trkulja B., Štih Ž. Power transformer winding model for lightning impulse testing. *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 202. Pp. 297-304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.717>

2. Lavrinovich V.A., Isaev Y.N., Mytnikov A.V. Advanced control state technology of transformer. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2013. Vol. 5. Iss. 17. No 4. Pp. 94-98.

3. Deaconu D., Chirilă A.-I., Năvrădescu V., Ghiță C., Răchitanu A., Viișoreanu A.-M. The Influence of Parameters of a Power Transformer Winding Equivalent Distributed Circuit Model on Atmospheric Overvoltage Wave Internal Propagation along the Windings. International Conference and Exposition on *Electrical And Power Engineering* (EPE). Iasi, Romania, October 22-23, 2020. Pp. 507-512. DOI: <https://doi.org/10.1109/EPE50722.2020.9305584>.

4. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. Part 1: Expertise. Joint Working Group A2/C4.39. CIGRE Brochure 577A, April 2014. 176 p. URL: http://xmlopez.webs.uvigo.es/Html/Info/2014_Electrical_Transients_Part1_Expertise.pdf (accessed at 12.05.2022).

5. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System. Part 2: Case Studies. Joint Working Group A2/C4.39. CIGRE Brochure 577B, April 2014. 124 p. URL: http://xmlopez.webs.uvigo.es/Html/Info/2014_Electrical_Transients_Part2_Expertise.pdf (accessed at 12.05.2022).

6. Sehed M. S., Cheremnykh Y.V., Gogolyuk P.F., Mazur T.A., Blyznak Y.V. Mathematical model of wave processes in two-winding transformers. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2020. No 6. Pp. 5-14. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2020.06.005>. (Ukr)

7. Sehed M.S., Cheremnykh Y.V., Gogolyuk P.F., Blyznak Y.V. Mathematical modeling of wave processes in two-winding transformers taking into account the main magnetic flux. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2021. No 5 (185). Pp. 80-86. DOI: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2021-5/080>.

8. Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite Elements and Approximation. Dover Publications, NY, 2013. 352 p.

Надійшла 01.06.2022
Остаточний варіант 14.07.2022