

**ВДОСКОНАЛЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ  
ТРИОБМОТКОВОЇ АСИНХРОННОЇ МАШИНИ**

Л.І. Мазуренко<sup>1\*</sup>, докт.техн.наук, К.М. Василів<sup>2\*\*</sup>, докт.техн.наук, О.В. Джура<sup>1\*\*\*</sup>, канд.техн.наук

<sup>1</sup> Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Берестейський, 56, Київ-57, 03680, Україна.

E-mail: [3662491@gmail.com](mailto:3662491@gmail.com)

<sup>2</sup> Національний університет „Львівська політехніка”,  
вул. С. Бандери, 12, Львів-13, 79013, Україна.

*У фазних координатах розроблено математичну модель триобмоткової асинхронної машини з двома обмотками на статорі як структурного елемента систем електроприводу та асинхронних генераторів з вентиляним і вентиляно-конденсаторним збудженням для автономних електроенергетичних установок, орієнтовану на явні методи чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь. В моделі враховано наявність кута в просторі між двома обмотками статора в діапазоні 360° та інші найважливіші чинники, що впливають на перебіг електромагнітних процесів, які відбуваються в машині. На базі математичної моделі розроблено програмний код як засіб комп'ютерного моделювання режимів роботи машини, за допомогою якого виконано комп'ютерне тестування на предмет врахування в моделі кута між обмотками статора, результати якого підтверджують здатність розробленої математичної моделі триобмоткової асинхронної машини враховувати як кут між обмотками статора, так і можливе їхнє одночасне та поодинокі живлення під час роботи машини в режимі двигуна. Бібл. 11, рис. 10.*

**Ключові слова:** математична модель, числові методи, програмний код, асинхронна машина, асинхронний генератор, вентиляно-конденсаторне збудження, автономна електроенергетична установка.

**Вступ.** До асинхронних машин (АМ) з двома відокремленими обмотками статора завжди був підвищений інтерес. Це стосується як автономних асинхронних генераторів (АГ) з вентиляним і вентиляно-конденсаторним збудженням (відповідно АГ з ВЗ і АГ з ВКЗ) [1-3], так і асинхронних двигунів (АД). На практиці АМ з числом статорних обмоток більше ніж дві використовуються дуже рідко. Вісі статорних обмоток у просторі триобмоткової АМ (дві статорних і одна роторна обмотки) можуть як збігатися, так і бути зсунутими на деякий кут. Останній варіант доцільний у разі підключення до обох обмоток вентиляних перетворювачів (ВП), які працюють з метою покращення гармонічного складу вихідної напруги генератора та напруги живлення двигуна з часовим зсувом по керуванню [1]. В АД обидві статорні обмотки повинні мати однакову кількість полюсів і живитися від різних трифазних електричних мереж однакової частоти, що дає змогу отримувати на валу двигуна сумарний електромагнітний момент і механічну потужність, а у разі виходу з ладу однієї з мереж живлення двигун продовжує працювати з відповідним навантаженням, що забезпечує надійність роботи приводних механізмів. Крім цього в АД з двома статорними обмотками забезпечується зниження потужності фази, підвищується енергоефективність, появляється можливість багаторівневого керування. Триобмоткові АГ забезпечують на виході змінні напруги різної величини, а у разі використання двох ВП і постійній напрузі проявляють стійкість у динамічних і аварійних режимах. У разі підключення до однієї обмотки ВП, а до іншої – конденсаторів забезпечується як вентиляне, так і конденсаторне збудження, що знижує вартість ВП. За такого розміщення конденсаторів і ВП на обмотках зменшується вплив різних принципів збудження один на одного та забезпечується можливість здійснити початкове конденсаторне збудження. Інші важливі показники АГ з двома обмотками статора аналогічні вказаним для АД.

© Мазуренко Л.І., Василів К.М., Джура О.В., 2023

ORCID ID: \* <https://orcid.org/0000-0002-7059-249X>; \*\* <https://orcid.org/0000-0003-0893-3561>;

\*\*\* <https://orcid.org/0000-0002-0224-3351>

Під час дослідження режимів роботи АМ з двома обмотками статора значну увагу приділено математичному моделюванню, в рамках якого розроблено їхні математичні моделі. В [2] розглянуто автономний АГ з двома обмотками статора, математичну модель якого отримано з використанням ортогональних координат  $dq$  без зсуву обмоток в просторі. До однієї обмотки цього АГ підключений напівпровідниковий регулятор реактивної потужності, до іншої – конденсатори і навантаження. В [4] розглянуто  $dq$ -модель шестифазної АМ, яка фактично є машиною з двома статорними обмотками. Відомі інші наукові праці, в яких розглядаються шестифазні та  $n$ -фазні АМ, в тому числі математичні моделі електроприводів з такими АМ, в  $dq$ -системі координат [5-7].

Використання диференціальних рівнянь АМ в системі координат  $dq$  не дає змоги отримати високу ступінь адекватності результатів реальним електромагнітним процесам за несиметричних навантажень генераторів і несиметрії за фазами вентильно-конденсаторної системи збудження. Вентильні перетворювачі систем збудження і за симетричного навантаження створюють несиметрію в колах статора. Тому для моделювання АМ доцільно використовувати її рівняння в реальних фазних координатах статора. Використання цих координат істотно спрощує процедуру об'єднання моделей АМ і ВП порівняно з використанням системи координат  $dq$ .

На сьогодні вже наявні математичні моделі АМ з двома обмотками на статорі (АМзДОС) в фазних координатах статора. В [8] наведено математичну модель, яка призначена для аналізу режимів роботи електроприводів (ЕП) агрегатів власних потреб (АВП) електростанцій (димотягів та ін.). Такі ЕП дають змогу регулювати продуктивність АВП зміною частоти обертання АМ перемиканням на обмотку статора з іншою кількістю полюсів.

В математичній моделі АГ з двома обмотками на статорі в фазних координатах [1] враховано тільки одне взаємне розміщення цих обмоток – кут зсуву між ними в просторі дорівнює нулю градусів. Таке вихідне допущення стосовно взаємного розміщення в просторі двох обмоток статора АГ створює істотні обмеження стосовно можливості вивчення та аналізу закономірностей електромагнітних та електромеханічних (ЕМ і ЕМХ) процесів, які відбуваються в такому АГ, в контексті впливу значення кута між обмотками на перебіг цих процесів, адже виконання таких досліджень та аналіз їхніх результатів в літературних джерелах ще не зафіксовано.

Математичну модель [9] розроблено виходячи з припущення, що взаємний кут зсуву двох обмоток статора АМ має лише одне значення, яке дорівнює  $30^\circ$ . Вона не враховує нелінійність електромагнітних зв'язків. Модель в її остаточному варіанті подається в ортогональних обертових координатах  $(x, y)$ , що абсолютно однозначно є недоцільно через зниження рівня адекватності моделі, бо математичні моделі, створені в таких абстрактних координатах як  $(x, y)$  чи  $(d, q)$ , не дають змоги, на що було вказано раніше, враховувати несиметричність електричних контурів обмоток статора. Це дає підставу стверджувати, що розробка математичної моделі АМзДОС з врахуванням кута їх взаємного зсуву є актуальною науково-практичною проблемою.

**Метою роботи** є розроблення вдосконаленої математичної моделі триобмоткової АМ в фазних координатах статора та її тестування на придатність враховувати кут зсуву в просторі статорних обмоток та одночасне їхнє живлення під час роботи машини в режимі двигуна.

**Виклад основного матеріалу.** Математичну модель АМзДОС розробимо на базі теорії математичного моделювання електромашинно-вентильних систем (ЕМВС) [10] з використанням базових положень [11] та математичних моделей електричних мереж і вимикачів [8]. Цю модель побудуємо за модульним принципом [10], відповідно до якого вона формується у вигляді багатополюсника, який слугує структурним елементом математичної моделі довільної ЕМВС, в тому числі і АГ з ВЗ і ВКЗ.

Сама математична модель АМзДОС є системою диференціальних рівнянь у фазних координатах, яка окрім кута зсуву в просторі обмоток статора дає змогу врахувати несиметричність та електромагнітні зв'язки всіх контурів обмоток, а також вплив на перебіг ЕМіЕМХ процесів, які відбуваються в АМ, з боку інших структурних елементів ЕМВС, до якої входять машина.

З метою перевірки придатності математичної моделі для аналізу процесів в АМзДОС, враховуючи оборотність машини (здатність працювати в режимах двигуна та генератора), виконаємо цей аналіз для електротехнічного комплексу (ЕТК), електричну схему якого зображено на рис. 1.

На рис. 1 написами  $M_1, M_2$  позначено першу та другу трифазні електричні мережі;  $B_1, B_2$  – перший та другий трифазні вимикачі, а літерою  $D$  – АМзДОС. Літерами  $E, i, \varphi$  позначено електрорушійні сили (ЕРС), струми та потенціали, а у верхньому індексі при них в круглих дужках позначено належність певних координат до першого чи другого з однотипових структурних елементів

(мереж та вимикачів). Числами в нижніх індексах потенціалів  $\varphi$  позначено номери незалежних вузлів (0 стосується залежних вузлів), а в ЕРС і струмах порядкові номери цих координат в межах кожного із структурних елементів. Літерами  $M, B, D$  в нижніх індексах струмів позначено належність до зовнішніх струмів електричних мереж, вимикачів та АМЗДОС. Літерами  $E$  та  $K$  в нижніх індексах позначені внутрішні струми електричних мереж та вимикачів, а індексами  $S$  та  $R$  – належність до внутрішніх струмів статора та ротора АМЗДОС.

Отже, математичною моделлю ЕТК на базі АМЗДОС є система диференціальних рівнянь електричного стану для схеми рис. 1, яка описує електромагнітні процеси всієї схеми, сумісно з диференціальним рівнянням механічного стану, яке описує електромеханічні процеси, що відбуваються в АМЗДОС. Система диференціальних рівнянь електричного стану записана у фазних координатах і разом з диференціальним рівнянням механічного стану орієнтована на явні методи чисельного інтегрування. Кожен із структурних елементів схеми рис. 1 представлений рівняннями зовнішніх гілок багатополосника, записаними за другим законом Кірхгофа, які згідно з [10] для кожного структурного елемента схеми рис. 1 мають такий вигляд:

$$p i_j + G_j \cdot \varphi_j + C_j = 0 \quad (j = M1, M2, B1, B2, D), \quad (1)$$

де  $p = d/dt$  – оператор диференціювання за часом  $t$ ;  $i_j$  – вектор струмів зовнішніх гілок;  $G_j$  – матриця коефіцієнтів;  $\varphi_j$  – вектор потенціалів зовнішніх вузлів;  $C_j$  – вектор вільних членів  $j$ -го структурного елемента схеми рис. 1.

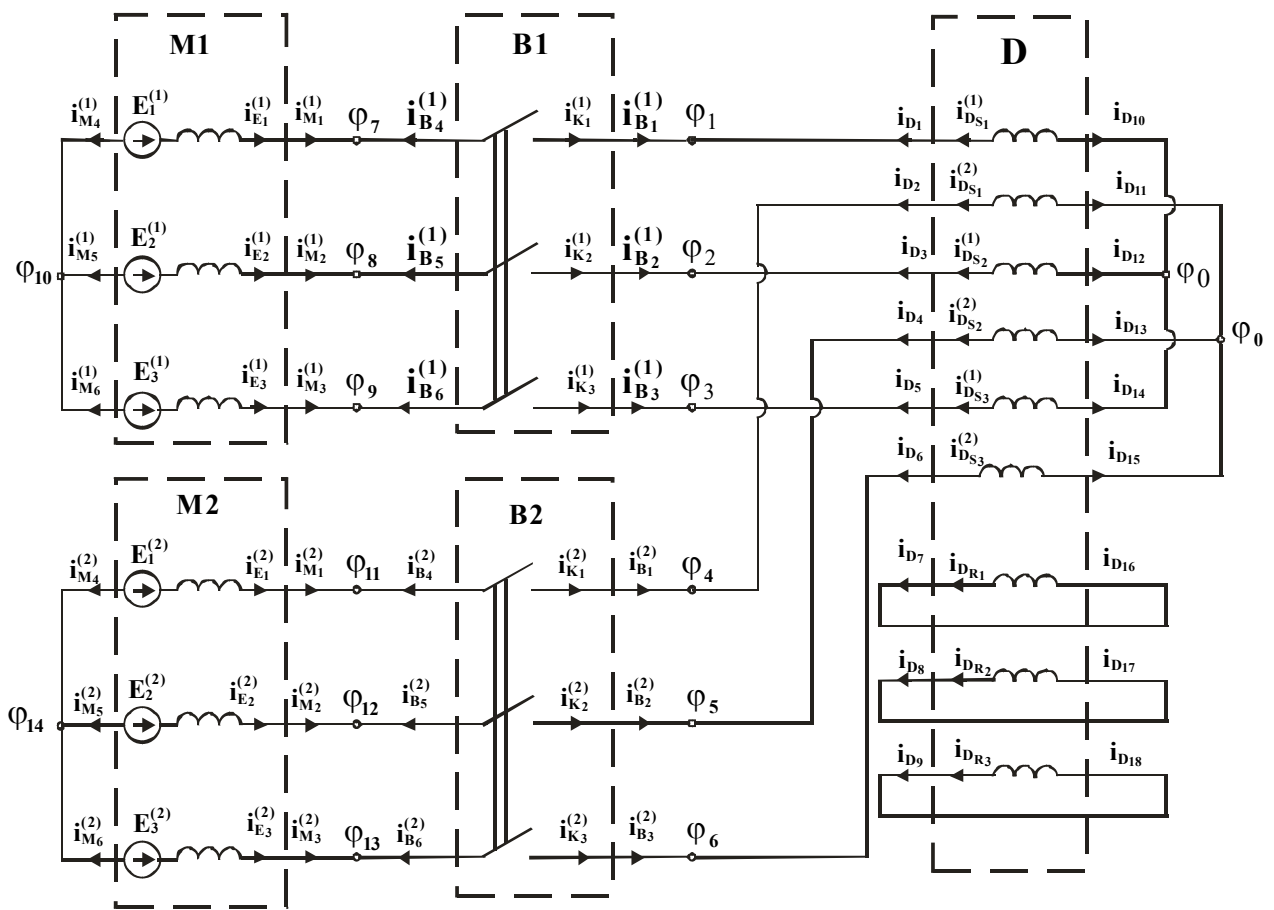


Рис. 1

З погляду наукової новизни однозначно очевидно, що принципово важливо максимально докладно розглянути запропоновану математичну модель АМЗДОС. Отже, система диференціальних рівнянь зовнішніх гілок АМЗДОС в матричній формі має вигляд

$$p i_D + \Gamma_D \cdot \varphi_D + C_D = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } i_D = (i_{D1}, i_{D2}, i_{D3}, i_{D4}, i_{D5}, i_{D6}, i_{D7}, i_{D8}, i_{D9}, i_{D10}, i_{D11}, i_{D12}, i_{D13}, i_{D14}, i_{D15}, i_{D16}, i_{D17}, i_{D18}) \quad (3)$$

– вектор струмів зовнішніх гілок;

$$\varphi_D = (\varphi_{D1}, \varphi_{D2}, \varphi_{D3}, \varphi_{D4}, \varphi_{D5}, \varphi_{D6}, \varphi_{D7}, \varphi_{D8}, \varphi_{D9}, \varphi_{D10}, \varphi_{D11}, \varphi_{D12}, \varphi_{D13}, \varphi_{D14}, \varphi_{D15}, \varphi_{D16}, \varphi_{D17}, \varphi_{D18}) \quad (4)$$

– вектор потенціалів зовнішніх вузлів;

$$\Gamma_D = \begin{bmatrix} L_D^{-1} & -L_D^{-1} \\ -L_D^{-1} & L_D^{-1} \end{bmatrix}; \quad C_D = \begin{bmatrix} L_D^{-1} \\ -L_D^{-1} \end{bmatrix} \cdot E_D \quad (5)$$

– матриця коефіцієнтів і вектор вільних членів, в яких

$$L_D = \begin{bmatrix} L_{S,S} & L_{S,R} \\ L_{R,S} & L_{R,R} \end{bmatrix} \quad (6)$$

– матриця індуктивностей АМЗДОС, а  $L_{S,S}, L_{S,R}, L_{R,S}, L_{R,R}$  – матриці: власних індуктивностей контурів статора, взаємних індуктивностей між контурами статора і ротора, взаємних індуктивностей між контурами ротора і статора та матриця власних індуктивностей контурів ротора, відповідно.

Матриці  $L_{S,S}, L_{S,R}, L_{R,S}, L_{R,R}$  мають таку структуру

$$L_{S,S} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot \\ \cdot \cos(0) + & \cdot \cos(-\alpha) + & \cdot \cos(-\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - \rho) + & \cdot \cos(-2\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + \\ + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} \\ L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot \\ \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + & \cdot \cos(0) + & \cdot \cos(-\alpha) + & \cdot \cos(-\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - \rho) + & \cdot \cos(-2\rho) + \\ + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} \\ L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot \\ \cdot \cos(-2\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + & \cdot \cos(0) + & \cdot \cos(-\alpha) + & \cdot \cos(-\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - \rho) + \\ + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} \\ L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot \\ \cdot \cos(-\alpha - \rho) + & \cdot \cos(-2\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + & \cdot \cos(0) + & \cdot \cos(-\alpha) + & \cdot \cos(-\rho) + \\ + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} \\ L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot & L_1^{(1)} \cdot \\ \cdot \cos(-\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - \rho) + & \cdot \cos(-2\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + & \cdot \cos(0) + & \cdot \cos(-\alpha) + \\ + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} & + L_{02}^{(1)} \\ L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot & L_1^{(2)} \cdot \\ \cdot \cos(-\alpha) + & \cdot \cos(-\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - \rho) + & \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + & \cdot \cos(-\alpha - 2\rho) + & \cdot \cos(0) + \\ + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} & + L_{02}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де

$$L_1^{(1)} = (L_m^{(1)} + L_\sigma^{(1)}), \quad L_{02}^{(1)} = \frac{L_0^{(1)}}{2}, \quad L_1^{(2)} = (L_m^{(2)} + L_\sigma^{(2)}), \quad L_{02}^{(2)} = \frac{L_0^{(2)}}{2}, \quad (8)$$

а  $L_m^{(1)}, L_\sigma^{(1)}, L_0^{(1)}, L_m^{(2)}, L_\sigma^{(2)}, L_0^{(2)}$  – взаємоіндуктивність, індуктивність розсіювання та індуктивність нульової послідовності першої та другої обмоток статора;  $\alpha$  – кут між обмотками статора в просторі,  $\rho = \pi \cdot 2/3$

$$L_{R,R} = \frac{2}{3 \cdot K_i^2} \cdot \begin{bmatrix} L_R + \frac{L_{0R}}{2} & \frac{-L_R + L_{0R}}{2} & \frac{-L_R + L_{0R}}{2} \\ \frac{-L_R + L_{0R}}{2} & L_R + \frac{L_{0R}}{2} & \frac{-L_R + L_{0R}}{2} \\ \frac{-L_R + L_{0R}}{2} & \frac{-L_R + L_{0R}}{2} & L_R + \frac{L_{0R}}{2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де  $L_R = L_m^{(1)} + L_m^{(2)} + L_{\sigma R}$ , а  $L_{\sigma R}, L_{0R}$  – індуктивність розсіювання та індуктивність нульової послідовності ротора, приведені до обмотки статора;  $K_i = (K^{(1)} + K^{(2)})/2$ , а  $K^{(1)}, K^{(2)}$  – відношення кількості витків першої та другої обмоток статора до кількості витків обмотки ротора.

$$L_{S,R} = \begin{bmatrix} a^{(1)} \cdot \cos \gamma^{(1)} & a^{(1)} \cdot \cos(\gamma^{(1)} - \rho) & a^{(1)} \cdot \cos(\gamma^{(1)} - 2 \cdot \rho) \\ a^{(2)} \cdot \cos(\gamma^{(2)} - 2 \cdot \rho)^{(2)} & a^{(2)} \cdot \cos \gamma^{(2)} & a^{(2)} \cdot \cos(\gamma^{(2)} - \rho)^{(2)} \\ a^{(1)} \cdot \cos(\gamma^{(1)} - 2 \cdot \rho) & a^{(1)} \cdot \cos \gamma^{(1)} & a^{(1)} \cdot \cos(\gamma^{(1)} - \rho) \\ a^{(2)} \cdot \cos(\gamma^{(2)} - \rho) & a^{(2)} \cdot \cos(\gamma^{(2)} - 2 \cdot \rho) & a^{(2)} \cdot \cos \gamma^{(2)} \\ a^{(1)} \cdot \cos(\gamma^{(1)} - \rho) & a^{(1)} \cdot \cos(\gamma^{(1)} - 2 \cdot \rho) & a^{(1)} \cdot \cos \gamma^{(1)} \\ a^{(2)} \cdot \cos \gamma^{(2)} & a^{(2)} \cdot \cos(\gamma^{(2)} - \rho) & a^{(2)} \cdot \cos(\gamma^{(2)} - 2 \cdot \rho) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де  $a^{(1)} = (2 \cdot L_m^{(1)}) / (3 \cdot K^{(1)})$ ,  $a^{(2)} = (2 \cdot L_m^{(2)}) / (3 \cdot K^{(2)})$ .

Матриця  $L_{R,S}$  є транспонованою стосовно матриці  $L_{S,R}$  ( $L_{R,S} = L_{S,R}^t$ ).

Вектор  $E_D$  з (5) має таку структуру  $E_D = R_D \cdot i_D + L'_D \cdot \dot{i}_D$ , де  $R_D = \text{diag}(R_{D_{S_1}}^{(1)}, R_{D_{S_1}}^{(2)}, R_{D_{S_2}}^{(1)}, R_{D_{S_2}}^{(2)}, R_{D_{S_3}}^{(1)}, R_{D_{S_3}}^{(2)}, R_{D_{R_1}}, R_{D_{R_2}}, R_{D_{R_3}})$  – діагональна матриця активних опорів контурів статора і ротора,  $i_D = (i_{D_{S_1}}^{(1)}, i_{D_{S_1}}^{(2)}, i_{D_{S_2}}^{(1)}, i_{D_{S_2}}^{(2)}, i_{D_{S_3}}^{(1)}, i_{D_{S_3}}^{(2)}, i_{D_{R_1}}, i_{D_{R_2}}, i_{D_{R_3}})$  – вектор струмів контурів статора і ротора АМЗДОС, а матриця  $L'_D$  має таку структуру  $L'_D = \begin{bmatrix} 0 & L'_{S,R} \\ L'_{R,S} & 0 \end{bmatrix}$ , в якій матриця  $L'_{S,R}$  є похідною матриці  $L_{S,R}$  (10) за кутами повороту ротора  $\gamma_D^{(1)}$ ,  $\gamma_D^{(2)}$  стосовно обмоток статора та має такий вигляд:

$$L'_{S,R} = \begin{bmatrix} b^{(1)} \cdot \sin \gamma^{(1)} & b^{(1)} \cdot \sin(\gamma^{(1)} - \rho) & b^{(1)} \cdot \sin(\gamma^{(1)} - 2 \cdot \rho) \\ b^{(2)} \cdot \sin(\gamma^{(2)} - 2 \cdot \rho)^{(2)} & b^{(2)} \cdot \sin \gamma^{(2)} & b^{(2)} \cdot \sin(\gamma^{(2)} - \rho)^{(2)} \\ b^{(1)} \cdot \sin(\gamma^{(1)} - 2 \cdot \rho) & b^{(1)} \cdot \sin \gamma^{(1)} & b^{(1)} \cdot \sin(\gamma^{(1)} - \rho) \\ b^{(2)} \cdot \sin(\gamma^{(2)} - \rho) & b^{(2)} \cdot \sin(\gamma^{(2)} - 2 \cdot \rho) & b^{(2)} \cdot \sin \gamma^{(2)} \\ b^{(1)} \cdot \sin(\gamma^{(1)} - \rho) & b^{(1)} \cdot \sin(\gamma^{(1)} - 2 \cdot \rho) & b^{(1)} \cdot \sin \gamma^{(1)} \\ b^{(2)} \cdot \sin \gamma^{(2)} & b^{(2)} \cdot \sin(\gamma^{(2)} - \rho) & b^{(2)} \cdot \sin(\gamma^{(2)} - 2 \cdot \rho) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де  $b^{(1)} = (2 \cdot L_m^{(1)} \cdot \omega_D \cdot p_0^{(1)}) / (3 \cdot K^{(1)})$ ,  $b^{(2)} = (2 \cdot L_m^{(2)} \cdot \omega_D \cdot p_0^{(2)}) / (3 \cdot K^{(2)})$ , а  $\omega_D, p_0^{(1)}, p_0^{(2)}$  – механічна частота обертання ротора та кількість пар полюсів першої та другої обмоток статора, відповідно. Матриця  $L'_{R,S}$  є транспонованою стосовно матриці  $L'_{S,R}$ .

Математичні моделі решти структурних елементів значно простіші, але мають аналогічну структуру.

Алгоритм розрахунку електромагнітних процесів ЕТК на базі АМЗДОС передбачає такі основні дії:

- 1) ввід вхідних даних структурних елементів, на підставі яких формуються коефіцієнти їхніх зовнішніх рівнянь;
- 2) ввід початкових умов, вектора (13);
- 3) з коефіцієнтів зовнішніх рівнянь виду (1) і матриць інцидентії структурних елементів формується загальна система рівнянь електричного стану в базисі потенціалів незалежних вузлів схеми рис. 1, яка має такий вигляд

$$A \cdot \varphi + B = 0, \quad (12)$$

де  $A$  – матриця коефіцієнтів;  $\varphi$  – вектор потенціалів незалежних вузлів схеми рис. 1;  $B$  – вектор вільних членів;

- 4) на зворотному ході на підставі вектора потенціалів зовнішніх вузлів схеми  $\varphi$ , отриманого розв'язком системи (12), з рівнянь типу (1) та (2) визначаються вектори похідних координат (вектори

інтегрування) структурних елементів, які входять до системи диференціальних рівнянь під знаком похідної (струми внутрішніх гілок структурних елементів, електричні кути повороту та механічна частота обертання ротора), з яких формується повний вектор інтегрування  $pV=dV/dt$ , останній елемент якого дорівнює 1 ( $pV_{nv}=1$ ). Сам вектор  $V$  слугує як початковими умовами, так і результатом інтегрування системи диференціальних рівнянь водночас та називається вектором інтегрованих змінних і має структуру

$$V = (i_{D_{S1}}^{(1)}, i_{D_{S1}}^{(2)}, i_{D_{S2}}^{(1)}, i_{D_{S2}}^{(2)}, i_{D_{S3}}^{(1)}, i_{D_{S3}}^{(2)}, i_{D_{R1}}, i_{D_{R2}}, i_{D_{R3}}, \gamma_D^{(1)}, \gamma_D^{(2)}, \omega_D, i_{K1}^{(1)}, i_{K2}^{(1)}, i_{K3}^{(1)}, i_{K1}^{(2)}, i_{K2}^{(2)}, i_{K3}^{(2)}, i_{E1}^{(1)}, i_{E2}^{(1)}, i_{E3}^{(1)}, i_{E1}^{(2)}, i_{E2}^{(2)}, i_{E3}^{(2)}, t); \quad (13)$$

5) на підставі початкових умов, вектора  $V$  (13), кроку інтегрування  $\Delta t$  та вектора інтегрування  $pV=dV/dt$  одним із явних методів чисельного інтегрування визначається нове значення вектора  $V$  (13) на поточному кроці, які слугують і результатом моделювання, і початковими умовами для наступного кроку інтегрування;

б) результати інтегрування виводяться у файл інформації;

7) цей процес виконується до виходу поточного часу інтегрування  $t$  за межі заданого кінцевого часу інтегрування  $t_k$  ( $t \leq t_k$ ).

На підставі наведеної вище математичної моделі та алгоритму розроблено програмний код для комп'ютерного моделювання ЕМ і ЕМХ процесів, які відбуваються в ЕТК на базі АМЗДОС. Вимоги, які поставлені в [1] як до АМЗДОС, так і до її математичної моделі, полягають в отриманні індукованих фазних напруг у неробочій обмотці (на яку напруга від своєї мережі не подається), зсунутих на кут  $\alpha \neq 0$  стосовно цих же напруг для  $\alpha=0$ . З метою тестування як математичної моделі, так і програмного коду на предмет відповідності базовим функціям АМЗДОС виконано моделювання таких режимів роботи:

1) на першу обмотку статора АМЗДОС вимикачем В1 подавалася напруга від мережі М1 за розімкненого вимикача В2, що дало змогу отримати індуковані в другій обмотці фазні напруги в режимі її неробочого ходу включно з всіма іншими координатами схеми рис. 1 (струмами, напругами і т. ін.) для низки заданих значень кута  $\alpha$  зсуву між обмотками статора;

2) аналогічне моделювання виконано для під'єднаної до мережі М2 другої обмотки та відімкненої першої;

3) виконано моделювання за пунктами 1) та 2) в режимі почергової роботи обмоток статора на статичне навантаження (замість неробочого ходу), яке тут моделюється електричними мережами з нульовим значення їхніх ЕРС та відповідними статичному навантаженню параметрами (фазними індуктивністю та активним опором);

Виходячи з поставленої задачі, критично важливо отримати фазні напруги в неробочій обмотці, які індукуються струмами підключеної до мережі обмотки, та перевірити на предмет зсуву цих напруг за фазою на величину заданого значення кута взаємного зсуву статорних обмоток ( $\alpha \neq 0^\circ$ ) стосовно фази цих же напруг за відсутності зсуву обмоток статора ( $\alpha=0^\circ$ ).

Нижче наведено результати комп'ютерного моделювання електромагнітних процесів ЕТК на базі АМЗДОС з активною (увімкненою на мережу М1) першою та відімкненою від мережі М2 другою обмотками статора. На рис. 2 зображено розрахункові залежності напруги  $u_1^{(1*)} = \varphi_1$  першої фази (фази

А) першої обмотки та напруги  $u_1^{(2)} = \varphi_4$  першої фази другої обмотки статора АМЗДОС для кута  $\alpha=90^\circ$ .

Зіркою у верхньому індексі позначено активну (під напругою) фазу. З цього рисунку виразно видно, що фази цих двох напруг відрізняються на величину кута  $\alpha=90^\circ$ . На рис. 3 зображено розрахункові залежності миттєвої фазної напруги першої фази другої обмотки

$u_{10^\circ}^{(2)} = \varphi_{40^\circ}$ ,  $u_{90^\circ}^{(2)} = \varphi_{490^\circ}$ ,  $u_{180^\circ}^{(2)} = \varphi_{4180^\circ}$ ,  $u_{270^\circ}^{(2)} = \varphi_{4270^\circ}$ ,  $u_{360^\circ}^{(2)}$  для таких значень кута  $\alpha$ :  $\alpha=0^\circ$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $\alpha=180^\circ$ ,  $\alpha=270^\circ$ ,  $\alpha=360^\circ$ . Характер кривих на рис. 3 виразно відображає динаміку зсуву фази напруги другої обмотки в процесі зміни кута  $\alpha$  в межах від  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , що однозначно відповідає фізиці електромагнітних процесів, які відбуваються в АМЗДОС, та виразно вказує на відповідність вимогам, що ставляться в [1] як до самої АМЗДОС, так і до її математичної моделі.

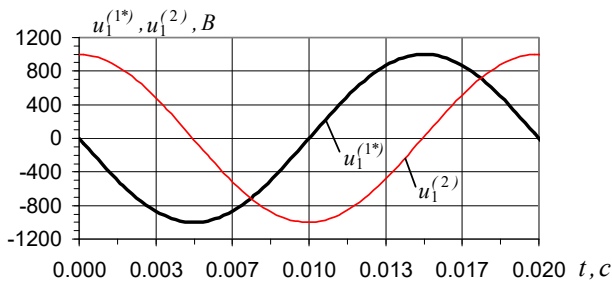


Рис. 2

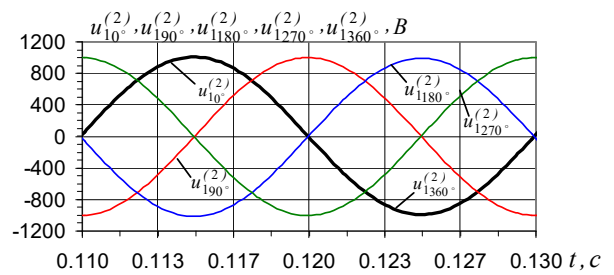


Рис. 3

Аналогічно виконано комп'ютерне моделювання електромагнітних процесів, які відбуваються в ЕТК на базі АМЗДОС з активною (увімкненою на мережу М2) другою та відімкненою від мережі М1 першою обмотками статора. На рис. 4 зображено розрахункові залежності напруги  $u_1^{(1)} = \varphi_1$  першої фази першої обмотки та напруги  $u_1^{(2*)} = \varphi_4$  першої фази другої обмотки статора АМЗДОС для кута  $\alpha=90^\circ$ . Характер кривих на цьому рисунку також вказує на те, що фази цих двох напруг відрізняються на величину кута  $\alpha=90^\circ$ .

На рис. 5 зображено розрахункові залежності фазної напруги першої фази першої обмотки  $u_{10}^{(1)} = \varphi_{10}$ ,  $u_{190}^{(1)} = \varphi_{190}$ ,  $u_{1180}^{(1)} = \varphi_{1180}$ ,  $u_{1270}^{(1)} = \varphi_{1270}$ ,  $u_{1360}^{(1)}$  також для таких самих значень кута  $\alpha$ :  $\alpha=0^\circ$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $\alpha=180^\circ$ ,  $\alpha=270^\circ$ ,  $\alpha=360^\circ$ .

Як і на рис. 3, характер кривих на рис. 5 аналогічно відображає динаміку зсуву фази напруги першої обмотки в процесі зміни кута  $\alpha$  в межах від  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , що також відповідає фізиці електромагнітних процесів, які відбуваються в АМЗДОС. Характер кривих фазних напруг на рис. 3 та рис. 5 відрізняється лише напрямком зсуву фаз напруг, який є протилежним. Це пояснюється тим, що відлік кута  $\alpha$  ведеться від першої обмотки, але він є протилежним, якщо робити його від другої обмотки.

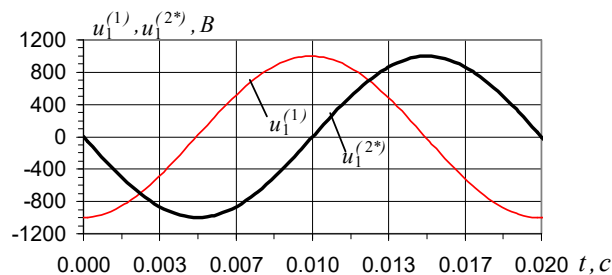


Рис. 4

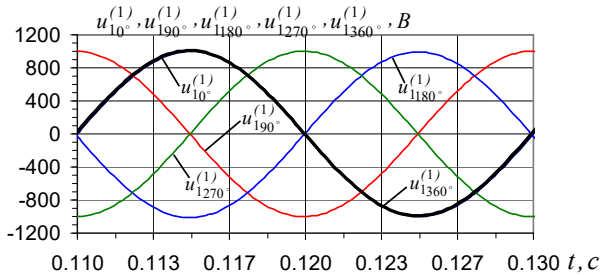


Рис. 5

Статорні обмотки можуть бути підключеними кожна до своєї окремої трифазної електричної мережі живлення відповідними вимикачами (рис. 1) в довільній комбінації. Це означає, що АДЗДОС може працювати як з довільною однією, так і з двома одночасно увімкненими обмотками статора. В математичній моделі електротехнічного комплексу за схемою рис. 1 передбачена також можливість розімкненого стану обох вимикачів В1 і В2. В цьому разі обидві обмотки статора відімкнені, що означає вимкнення двигуна взагалі.

Для моделювання ЕМіЕМХ процесів, які відбуваються в АДЗДОС, що працює в складі ЕТК за схемою рис. 1, прийемо такий режим роботи АДЗДОС, який визначається заданими графіками стану вимикачів В1, В2. В цьому контексті графік стану вимикача В1 першої обмотки статора АДЗДОС описується ступінчатою функцією перемикавання, зображеною на рис. 6, де по осі абсцис  $t$  відкладено поточний час в секундах, а по осі ординат – ступінчата функція перемикавання, яка може набувати значення одиниці “1” або нуля “0”, що відповідає увімкненому або вимкненому стану вимикача В1.

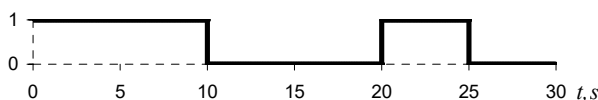


Рис. 6

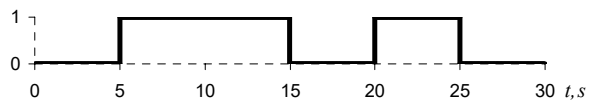


Рис. 7

Аналогічно на рис. 7 зображено графік стану вимикача В2 другої обмотки статора АДзДОС. З цих графіків видно, що на двох проміжках часу від 5 до 10 та від 20 до 25 секунд в робочому стані

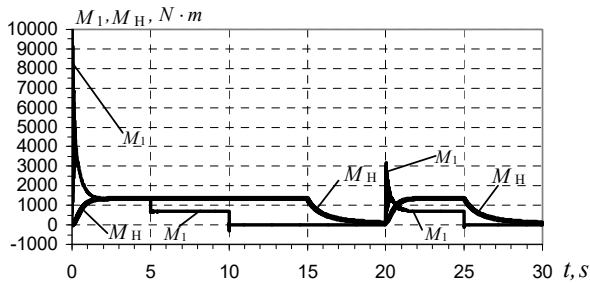


Рис. 8

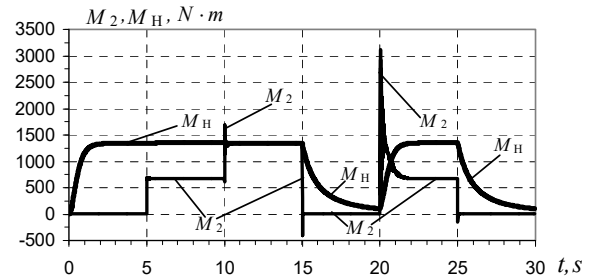


Рис. 9

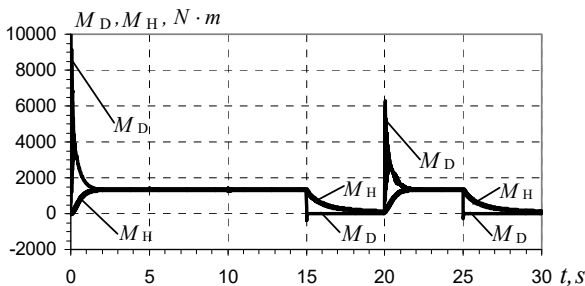


Рис. 10

перебувають одночасно обидві статорні обмотки, а на двох інших проміжках часу від 15 до 20 та від 25 до 30 секунд обидва вимикачі розімкнені, що означає відключення двигуна взагалі. Прийнято також, що АДзДС приводить в рух механізм з вентиляторною характеристикою. З погляду практики це актуально для агрегатів власних потреб теплових електростанцій.

Результатом моделювання слугують розрахункові залежності від часу  $t$  електромагнітних моментів  $M_1$ ,  $M_2$  АДзДОС,

отриманих від кожної з двох обмоток статора та сумарного електромагнітного моменту двигуна  $M_D = M_1 + M_2$ , а також механічного моменту опору виконавчого агрегату  $M_H$ . Загалом до результатів математичного моделювання входять і всі решті координати АМзДОС: розрахункові залежності від часу  $t$  фазних струмів обмоток статора та їхніх зображувальних векторів (амплітуд), фазних струмів ротора, фазних напруг статора і ротора та їхніх зображувальних векторів, а також електричного кута та механічної кутової частоти обертання ротора. В наведених нижче результатах моделювання акцентуємо увагу лише на електромеханічних координатах:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_D = M_1 + M_2$  та  $M_H$ .

На рис. 8 зображено:  $M_1$  – електромагнітний момент від I-ої обмотки статора (тонша лінія) та  $M_H$  – механічний момент опору АДзДОС (товстіша лінія), а на рис. 9:  $M_2$  – електромагнітний момент від II-ї обмотки статора (тонша лінія) та  $M_H$  – механічний момент опору АДзДОС (товстіша лінія). Аналогічно на рис. 10:  $M_D$  – сумарний електромагнітний момент від I-ої та II-ї обмоток статора (тонша лінія) та  $M_H$  – механічний момент опору АДзДОС (товстіша лінія).

На кожному з цих трьох графіків окрім відповідних електромагнітних моментів виведено ще й  $M_H$  – момент механічного навантаження (опору). Це дає змогу відобразити замкнуту механічну систему двигун–привідний механізм та докладніше проілюструвати закономірності перебігу електромеханічних процесів.

Характерною особливістю закономірностей перебігу електромеханічних процесів, які відбуваються в АДзДОС, є те, що механічний момент опору двигуна  $M_H$  урівноважується сумарним електромагнітним моментом  $M_D$  незалежно від того чи увімкнена одна з двох обмоток статора, чи обидві одночасно, що виразно ілюструють результати математичного експерименту, зображених на рис. 8–10. Моделювання за одночасного ввімкнення двох обмоток на мережу проведено за нульового зсуву їх у просторі. У цьому випадку загальний електромагнітний момент АДзДОС дорівнює арифметичній сумі моментів окремих обмоток, що спрощує аналіз результатів моделювання. У випадку зсуву обмоток в просторі на кут, який відмінний від нульового значення, складові моменту додаються геометрично.

### Висновки.

1. Розроблено вдосконалену математичну модель триобмоткової асинхронної машини з двома обмотками на статорі як структурного елемента систем електроприводу та АГ з вентиляним і вентиляно-ємнісним збудженням для автономної електроенергетичної установки. В математичній моделі враховано наявність кута зсуву у просторі між двома обмотками статора в діапазоні від  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , їхнє одночасне живлення та інші найважливіші чинники, що впливають на перебіг



електромагнітних і електромеханічних процесів, які відбуваються в цій машині: нелінійність електромагнітних зв'язків її контурів та їхня несиметричність, а також взаємний вплив структурних елементів ЕТК, до якого входить ця асинхронна машина.

2. Математична модель є єдиною системою диференціальних рівнянь електричного стану у фазних координатах, орієнтованою на явні методи чисельного інтегрування, яка дає змогу моделювати динамічні та усталені електромагнітні й електромеханічні процеси, які відбуваються в АМзДОС під час її роботи в симетричних та несиметричних режимах. Модель розроблена за модульним принципом та придатна для її використання у готовому вигляді як структурного елемента довільного ЕТК.

3. На базі математичної моделі АМзДОС розроблено програмний код і самої машини, і відповідного ЕТК, до складу якого вона входить, що дає змогу виконувати комп'ютерне моделювання режимів її роботи.

4. За допомогою розробленого програмного коду виконано комп'ютерне тестування на предмет врахування кута зсуву між обмотками статора і одночасного їхнього живлення. На підставі результатів комп'ютерного моделювання встановлено, що струми однієї з обмоток статора індукують у другій обмотці статора електрорушійні сили, фази яких відрізняються на кут зсуву між обмотками статора, що однозначно вказує на придатність математичної моделі АМзДОС точно враховувати кут зсуву між обмотками статора.

*Роботу виконано за держбюджетною темою "Розвиток теоретичних засад створення та розроблення засобів підвищення енергоефективності та надійності комбінованих систем електроживлення з різними типами генераторів при роботі в автономному режимі і на мережу» («Енергосист-3», державний реєстраційний номер 0121U100509, КПКВК 6541030).*

1. Мазуренко Л.И., Лищенко А.И. Асинхронные генераторы с вентильным и вентильно-емкостным возбуждением для автономных энергоустановок. Киев: Наукова думка, 2011. 271 с.

2. Marouani K., Nounou K., Mohamed Benbouzid, Tabbache B., Alloui H. Control of a Power Generation System Based on a Dual Star Induction Generator. International Conference on *Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ-15)*, La Coruna, Spain, March 25-27, 2015. Pp. 1–5.

3. Lipo T.A. Dual stator winding induction machine drive. Patent WO1999049563A1, 1999.

4. Lipo T.A. A dq model for six phase induction machines. Proc. International Conference on *Electrical Machines (ICEM-80)*, Athens, Greece, 15-17 September 1980. Pp. 860–867.

5. Kundrotas B., Lisauskas S., Rinkeviciene R. Model of Multiphase Induction Motor. *Elektronika Ir Elektrotechnika*. 2011. Vol. 111. No 5. Pp. 111–114. DOI: <https://doi.org/10.5755/j01.eee.111.5.369>.

6. Singh G.K. Multi-phase induction machine drive research – A survey. *Electric Power Systems Research*. 2002. Vol. 61. No 2. Pp. 139–147. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-7796\(02\)00007-X](https://doi.org/10.1016/S0378-7796(02)00007-X).

7. Renukadevi G., Rajambal K. Generalized dq model of n-phase induction motor drive. *International Journal of Electrical Computer Energetic Electronic and Communication Engineering*. 2012. Vol. 6. No 9. Pp. 1066–1075.

8. Мазуренко Л.И., Василів К.М. Математична модель і режими роботи асинхронних двигунів власних потреб теплових електричних станцій. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 79–83. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.079>.

9. Pienkowski K. Analysis and Control of Dual Stator Winding Induction Motor. *Archives of Electrical Engineering*. 2012. Vol. 61(3). Pp. 421–438. DOI: <https://doi.org/10.2478/v10171-012-0033-z>.

10. Плахтына Е.Г. Математическое моделирование электромашинно-вентильных систем. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1986. 164 с.

11. Фильц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. Киев: Наукова думка, 1979. 208 с.

## IMPROVED MATHEMATICAL MODEL OF THREE-WINDING ASYNCHRONOUS MACHINE

L.I. Mazurenko<sup>1</sup>, K.M. Vasylyv<sup>2</sup>, O.V. Dzhura<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,  
56, Beresteyskyi Ave., Kyiv, 03057, Ukraine.

E-mail: [3662491@gmail.com](mailto:3662491@gmail.com).

<sup>2</sup> Lviv polytechnic National university,  
12, Bandera str., Lviv, 79013, Ukraine.

*In phase coordinates, a mathematical model of a three-winding asynchronous machine with two windings on the stator as a structural element of electric drives and asynchronous generators with inverter and inverter-capacitor excitation for autonomous electric power plants, oriented to explicit methods of numerical integration of the system of differential equations, has been developed. The model takes into account the displacement angle between two stator windings in the range of 360° and other important factors affecting the course of electromagnetic processes occurring in the machine. On the basis of the mathematical model, a program code was developed as a means of computer verification of machine operation modes. The results of computer study performed with the help of the code confirm the suitability of the mathematical model of a three-winding asynchronous machine to take into account the influence of the displacement angle between the stator windings and their simultaneous and single power supply during the operation of the machine in motor mode. References 11, figures 10.*

**Key words:** mathematical model, numerical methods, program code, asynchronous machine, asynchronous generator, inverter-capacitor excitation, autonomous electric power plant.

1. Mazurenko L.I., Lishchenko A.I. Asynchronous generators with inverter and inverter-capacitor excitation for autonomous power plants. Kyiv: Naukova Dumka, 2011. 271 p. (Rus).
2. Marouani K., Nounou K., Mohamed Benbouzid, Tabbache B., Alloui H. Control of a Power Generation System Based on a Dual Star Induction Generator. International Conference on *Renewable Energies and Power Quality* (ICREPQ-15), La Coruna, Spain, March 25-27, 2015. Pp. 1–5.
3. Lipo T.A. Dual stator winding induction machine drive. Patent WO1999049563A1, 1999.
4. Lipo T.A. A dq model for six phase induction machines. Proc. International Conference on *Electrical Machines* (ICEM-80), Athens, Greece, 15-17 September 1980. Pp. 860–867.
5. Kundrotas B., Lisauskas S., Rinkeviciene R. Model of Multiphase Induction Motor. *Elektronika Ir Elektrotechnika*. 2011. Vol. 111. No 5. Pp. 111–114. DOI: <https://doi.org/10.5755/j01.eee.111.5.369>.
6. Singh G.K. Multi-phase induction machine drive research – A survey. *Electric Power Systems Research*. 2002. Vol. 61. No 2. Pp. 139–147. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-7796\(02\)00007-X](https://doi.org/10.1016/S0378-7796(02)00007-X).
7. Renukadevi G., Rajambal K. Generalized dq model of n-phase induction motor drive. *International Journal of Electrical Computer Energetic Electronic and Communication Engineering*. 2012. Vol. 6. No 9. Pp. 1066–1075.
8. Mazurenko L.I., Vasylyv K.M. Mathematical model and modes of operation of asynchronous motors of own needs of thermal power stations. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2018. No 4. Pp. 79–83. (Ukr). DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.079>.
9. Pienkowski K. Analysis and Control of Dual Stator Winding Induction Motor. *Archives of Electrical Engineering*. Vol. 61(3). 2012. Pp. 421–438. DOI: <https://doi.org/10.2478/v10171-012-0033-z>
10. Plakhtyna E.G. Mathematical modeling of systems with electric machines and switching devices. Lviv: Vyshcha shkola. Izdatelstvo pri Lvovskom universitete, 1986. 164 p. (Rus).
11. Filts R.V. Mathematical foundations of the theory of electromechanical converters. Kiyv: Naukova Dumka, 1979. 208 p. (Rus).

Надійшла 19.10.2022  
Остаточний варіант 15.05.2023