

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ "ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ" В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

А.Д. Подольцев\*, докт.техн.наук, А.И. Глухенький\*\*, канд.техн.наук

Институт электродинамики НАН Украины,

пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина,

e-mail: [podol@ied.org.ua](mailto:podol@ied.org.ua); [gai56@ied.org.ua](mailto:gai56@ied.org.ua)

*В работе рассматривается понятие электрического напряжения, которое в теории электрических цепей определено как разность электрических потенциалов, а в теории электромагнитного поля имеет различные определения. Показано, что понятие напряжения в обеих теориях и измеряемое на практике напряжение будут согласованы, если в теории поля определить напряжение как линейный интеграл от потенциальной составляющей напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_{\text{пот}} = -\nabla\varphi$ . Отмечено, что в выражении для напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$  первый член в правой части представляет потенциальную составляющую  $\mathbf{E}_{\text{пот}}$ , определяющую величину напряжения только при выборе калибровки Кулона для векторного магнитного потенциала  $-\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . При этом значения векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов при соответствующих граничных условиях определяются однозначно. При выборе другой калибровки для  $\mathbf{A}$  необходимо выполнить дополнительные, указанные в статье преобразования для определения  $\mathbf{E}_{\text{пот}}$  и только затем вычислить напряжение. Рассмотрены особенности измерения напряжения в цепи переменного тока, когда измерительные провода вольтметра находятся в переменном магнитном поле. Библи. 21, рис. 3.*

**Ключевые слова:** потенциальное и вихревое электрические поля, электрические цепи, электромагнитное поле, электрический и магнитный потенциалы, электрическое напряжение, калибровка Кулона.

**Введение.** В работах [1–9] затронута важная проблема неоднозначности понятия электрического напряжения в теории переменного электромагнитного поля (ЭМП), поскольку напряжение определяют по-разному, используя, как правило, два следующих выражения:

$$u_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{пот}} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{и} \quad u_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

где  $\mathbf{E}_{\text{пот}}$  – потенциальная составляющая напряженности электрического поля (ЭП), а  $\mathbf{E}$  – напряженность эффективного ЭМП, содержащая потенциальную, вихревую, стороннюю и возможные другие составляющие.

В [7] предлагается первое выражение применять для определения напряжения в стационарном ЭП, когда вектор напряженности  $\mathbf{E}$  содержит только потенциальную и стороннюю составляющие, а вопрос определения напряжения в переменном ЭМП не рассматривался.

Целью статьи является обоснование целесообразности применения выражения  $u_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{пот}} \cdot d\mathbf{l}$  для определения напряжения при решении задач расчета переменного ЭМП в проводящих средах, а также рассмотрение особенностей измерения напряжения в цепи переменного тока, когда измерительные провода вольтметра находятся в переменном магнитном поле.

**1. Электрическое напряжение в теории электрических цепей и в теории ЭМП.** В теории электрических цепей величину напряжения между двумя произвольными узлами определяют как разность их электрических потенциалов [10, 11]

$$u_{1-2} = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{1}$$

Введенное изначально для цепей постоянного тока понятие "электрическое напряжение" [12] сохранило физический смысл и в цепях переменного тока, в которых возникающая ЭДС электромагнитной индукции учитывается введением собственной  $L$  и взаимной  $M$  индуктивностей. Такое определение напряжения используется в настоящее время и на практике.

Дифференциальным аналогом разности электрических потенциалов является градиент скалярного электрического потенциала со знаком минус  $(-\nabla\varphi)$ . В теории Максвелла слагаемое  $(-\nabla\varphi)$  –

© Подольцев А.Д., Глухенький А.И., 2018

ORCID: \* <http://orcid.org/0000-0002-9029-9397>; \*\* <http://orcid.org/0000-0001-5053-5677>

это исчезающая при интегрировании по замкнутому контуру удельная "электродвижущая сила" (сила кулоновского взаимодействия), создаваемая зарядами [13]. Поэтому аналогом выражения (1) в теории ЭМП является выражение

$$u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{пот}} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (-\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2)$$

Согласно этому выражению величина  $u_{1\_2}$  определена положением узлов 1 и 2 и не зависит от пути интегрирования. Отметим, что именно таким способом определено понятие «электрическое напряжение» в работах [1, 2, 4–6, 7, 9].

В то же время в работах [8, 11, 14] напряжение между произвольными точками пространства 1 и 2 определяется в виде линейного интеграла от напряженности ЕП  $\mathbf{E}$

$$u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \text{где} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пот}} + \mathbf{E}_в = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}_в$  – вихревая составляющая. В общем случае напряженность  $\mathbf{E}$  имеет потенциальную и вихревую составляющие и иногда к ней добавляют стороннюю напряженность поля  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ , вызванную электрохимическими, термоэлектрическими и другими процессами. При этом величину напряжения определяют как [3, 15, 16]

$$u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{пот}} + \mathbf{E}_в + \mathbf{E}_{\text{стор}}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4)$$

В работе [17] напряжение определено как  $u_{1\_2} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{пот}} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) \cdot d\mathbf{l}$ , а в работе [18] –  $u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{стор}} \cdot d\mathbf{l}$ .

Сравнение имеющихся в литературе выражений для определения величины напряжения  $u_{1\_2}$  показывает, что во всех этих выражениях, кроме выражения (2), величина напряжения зависит не только от положения точек 1 и 2, но и от формы пути интегрирования, а отсюда, при рассмотрении конкретных задач возникает проблема обоснованного выбора такого пути. Далее поясним ситуацию на следующих примерах.

**Пример 1.** Выполним расчет напряжения  $u_{1\_2}$  между разомкнутыми концами многовитковой катушки, находящейся во внешнем переменном магнитном поле  $\mathbf{B}(t)$  (рис. 1), используя два наиболее часто встречающихся в литературе выражения (2) и (3). Общеизвестно, что для рассматриваемого случая напряжение равно  $u_{1\_2} = d\psi / dt$ , где  $\psi = BSw$  – потокосцепление, пронизывающее витки  $w$  катушки, значение которого измеряют на практике с помощью вольтметра. Применив выражение (3) и выбрав путь для вычисления интеграла от 1 к 2 вдоль средней линии провода катушки, в котором плотность тока проводимости  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \approx 0$ , а значит во всех точках  $\mathbf{E} = \mathbf{J} / \sigma \approx 0$  (см. [3], стр. 144), по-

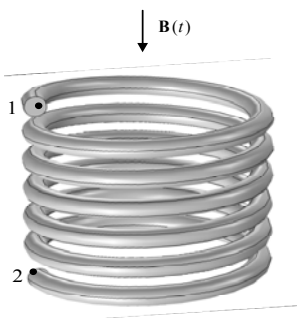


Рис. 1

лучим  $u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx 0$ .

С другой стороны, используя выражение (2) и учитывая, что в проводнике  $\mathbf{E} = 0$  и согласно (3)  $-\nabla\varphi = \partial\mathbf{A} / \partial t$ , после интегрирования по тому же пути получим, что  $u_{1\_2} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = -d\psi / dt$  (т.е. напряжение  $u_{1\_2}$  равно разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ ).

Величина напряжения согласно (3) зависит от формы пути интегрирования. Отсюда, в данном примере можно подобрать такой путь, при котором величина интеграла  $\int_1^2 -\partial\mathbf{A} / \partial t \cdot d\mathbf{l} \approx 0$  и получить результат, совпадающий с

расчетом напряжения по выражению (2). Именно такой подход предлагается в [3, стр. 144], хотя путь там определяется следующим образом – «интеграл должен быть взят также вдоль пути, не проходящем в магнитном поле катушки, но отнюдь не вдоль проволоки катушки». Вместе с тем при решении практических трехмерных задач не всегда возможно выбрать такой путь интегрирования (не решая для этого дополнительную и, в ряде случаев, довольно сложную задачу). Поэтому использование вы-

ражения (2) имеет преимущество по сравнению с использованием выражения (3), дополненного указанием требуемой формы пути.

**Пример 2.** Известно, что каждой полевой задаче расчета ЭМП в проводящей среде можно после выполнения пространственной дискретизации поставить в соответствие цепную задачу [19]. Отсюда следует, что одни и те же понятия в теории цепей должны соответствовать понятиям в теории ЭМП для того же класса задач. Рассмотрим в этой связи построение эквивалентной электрической цепи для полевой задачи, показанной схематически на рис. 2 и содержащей массивный проводник с электропроводностью  $\sigma$ , к концам которого подключен источник переменного напряжения с внутренними параметрами.

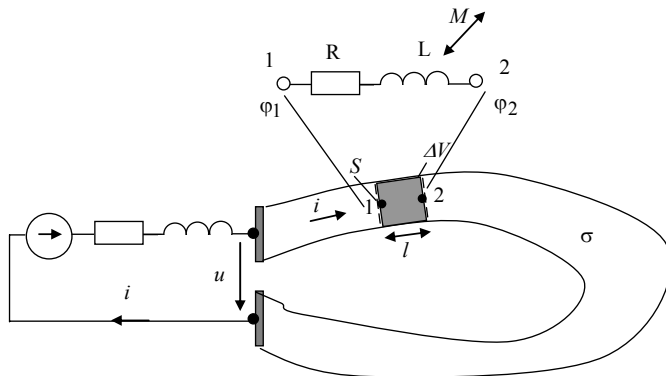


Рис. 2

Разделим весь объем проводника на малые контрольные элементы объема  $\Delta V$ , один из которых показан на рис. 2 в виде заштрихованной прямоугольной области. В качестве отправной точки рассуждений будем использовать выражение для плотности тока вида

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (5)$$

Интегрируя его вдоль контура, соединяющего точки 1 и 2 внутри элемента объема, получим

$$\int_1^2 \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} - \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}. \quad (6)$$

После несложных преобразований, переходя к средним по сечению проводника величинам, получим уравнение для участка цепи, соответствующего этому объему,

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 - \left( L \frac{di}{dt} + M_{12} \frac{di}{dt} + \dots + M_{1k} \frac{di}{dt} \right). \quad (7)$$

В этом выражении член с ЭДС электромагнитной индукции (заклучен в круглые скобки) представлен в виде суммы ЭДС самоиндукции и взаимной индукции с другими элементами объема. Эквивалентная цепь, соответствующая выражению (7), показана вверху на вставке к рис. 2.

Из выражений (6) и (7) следует вывод. Поскольку в теории цепей напряжение – это разность потенциалов, то и в полевой задаче напряжение на выбранном элементе объема вычисляется как

$$u_{1-2} = \int_1^2 (-\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (8)$$

т.е. совпадает с выражением (2), а полевым аналогом закона Кирхгофа для напряжений является известное из векторного анализа интегральное тождество [1]

$$\oint_l (-\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (9)$$

которое отражает потенциальный характер сил кулоновского взаимодействия зарядов.

Эквивалентную электрическую цепь для всего проводника в рассматриваемой полевой задаче можно получить, если разбить его на конечные элементы объема, и каждый из которых представить эквивалентной цепью.

Выражения (6) и (7) могут быть обобщены и на случай существования в проводнике напряженности стороннего ЭП. Тогда связь между полевыми и цепными величинами устанавливается следующим образом:

$$\mathbf{J} / \sigma = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E}_{\text{стор}}$$

$$iR = u - \left( L \frac{di}{dt} + M_{12} \frac{di}{dt} + \dots + M_{1k} \frac{di}{dt} \right) + e$$

т.е в цепи появляется источник ЭДС  $e$ , обусловленный наличием  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$  в выражении для плотности тока.

Таким образом, выражение (8) для напряжения в теории ЭМП является согласованным с напряжением в теории цепей, что обуславливает целесообразность его использования для указанного класса задач.

В дополнение к приведенным выше примерам отметим, что в библиотеке задач пакета программы Comsol представлена задача расчета ЭМП в проводящей среде (массивном индукторе) (AC/DC Module/Electric Component/Power inductor), в которой напряжение на торцах этого индуктора задается именно как разность электрических потенциалов.

**2. Расчет напряжения в переменном ЭМП при различных калибровках для векторного магнитного потенциала.** Во многих работах по теории ЭМП потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  рассматриваются как некоторые вспомогательные величины, зависящие от выбора калибровки для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  (например, калибровка Кулона, Лоренца и др.), т.е. дополнительного условия, позволяющего однозначно вычислить векторный магнитный потенциал при решении конкретной задачи. При этом отмечается, что величина  $\mathbf{E}$  является физически «реальной» измеряемой на практике величиной, не зависящей от выбора калибровки, а потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  могут принимать различные значения в зависимости от выбранной калибровки для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . В этой связи заметим, что слагаемое  $(-\nabla\varphi)$  в выражениях (3) и (5) представляет собой потенциальную составляющую напряженности поля  $\mathbf{E}$ , а  $-\partial\mathbf{A}/\partial t$  – вихревую ее составляющую только при использовании калибровки Кулона  $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ . При этом обе составляющие определяются следующими системами уравнений, имеющими согласно теореме Гельмгольца при соответствующих граничных условиях единственное решение [20]:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E}_{\text{пот}} = (\rho + \rho_{\text{св}})/\varepsilon_0 \\ \nabla\times\mathbf{E}_{\text{пот}} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E}_{\text{в}} = 0 \\ \nabla\times\mathbf{E}_{\text{в}} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (10, 11)$$

где  $\rho$ ,  $\rho_{\text{св}}$  – объемные плотности свободных и связанных электрических зарядов, соответственно,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из уравнений (10), (11) видно, что потенциальная составляющая напряженности  $\mathbf{E}_{\text{пот}} = -\nabla\varphi$  создается свободными или связанными зарядами, а вихревая составляющая  $\mathbf{E}_{\text{в}} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$  определяется изменяющимся во времени магнитным полем.

В выражении для напряженности ЭП (3) первый член характеризует потенциальную, а второй член – вихревую составляющие поля  $\mathbf{E}$  только при выборе калибровки Кулона. Если выбрать, например, калибровку Лоренца вида  $\nabla\cdot\mathbf{A} + \partial\varphi/\partial t = 0$ , то при решении данной задачи будут получены другие расчетные значения потенциалов, которые следует и обозначать по-другому, например, с дополнительным индексом  $L$ :  $\varphi^L$  и  $\mathbf{A}^L$ . В этом случае напряженность ЭП будет определяться равенствами

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi^L - \frac{\partial\mathbf{A}^L}{\partial t}, \quad \nabla\cdot\mathbf{A}^L + \partial\varphi^L/\partial t = 0 \quad (12, 13)$$

и будет совпадать с напряженностью поля  $\mathbf{E}$  согласно (3). Однако первый член  $-\nabla\varphi^L$  в (12) уже не будет являться потенциальной составляющей поля  $\mathbf{E}$ , и разность потенциалов  $\varphi_1^L - \varphi_2^L$  поэтому не будет равна напряжению между точками 1 и 2. Для нахождения величины напряжения в этом случае необходимо из выражения (12) выделить именно потенциальную составляющую  $\mathbf{E}$ . Для этого представим векторный потенциал  $\mathbf{A}^L$  в виде суммы потенциальной  $\nabla\varphi_A$  и вихревой  $\mathbf{A}$  составляющих  $\mathbf{A}^L = \nabla\varphi_A + \mathbf{A}$  и после подстановки последнего выражения в (11) получим

$$\mathbf{E} = -\nabla(\varphi^L + \frac{\partial\varphi_A}{\partial t}) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

где член  $\varphi^L + \frac{\partial\varphi_A}{\partial t}$  и будет равен потенциалу  $\varphi$ , определяющему потенциальную составляющую поля  $\mathbf{E}_{\text{пот}} = -\nabla\varphi$  и величину напряжения  $u_{1-2} = \varphi_1 = \varphi_2$  в данной задаче при использовании калибровки Лоренца.

При наличии проводящей среды в переменном ЭМП и при выборе любой калибровки для векторного магнитного потенциала всегда можно однозначно определить потенциальную составляющую поля  $\mathbf{E}$ , создаваемую объемными или поверхностными зарядами (свободными или связанными), которая удовлетворяет системе уравнений (10) и определяется соответствующим распределением скалярного электрического потенциала  $\varphi$ . От этого потенциала и будет зависеть величина напряжения в теории ЭМП и в теории электрических цепей.

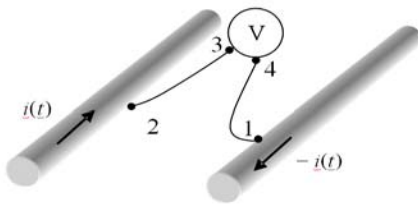
Таким образом, на основании сказанного выше целесообразно определить электрическое напряжение при наличии проводников с током следующим образом: *электрическое напряжение между двумя произвольными узлами электрической цепи равно разности электрических потенциалов в этих узлах, а между двумя произвольными пространственными точками электромагнитной системы, исследуемой с точки зрения теории ЭМП, равно линейному интегралу от потенциальной составляющей вектора напряженности ЭП между этими точками, значение которого не зависит от формы пути интегрирования и равно разности скалярных электрических потенциалов*

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{пот}} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (-\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

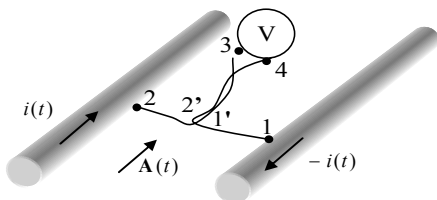
Отметим, что значение определенное таким образом напряжения будет совпадать с напряжением согласно [3] при наличии  $\mathbf{E}_{\text{стоп}}$ , когда  $u_{1_2} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (-\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t + \mathbf{E}_{\text{стоп}}) \cdot d\mathbf{l}$ , только если его дополнить условием, что форма пути интегрирования выбирается в каждой конкретной задаче так, что выполняется условие  $\int_1^2 (-\partial \mathbf{A} / \partial t + \mathbf{E}_{\text{стоп}}) \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

**3. Особенности измерения напряжения в цепи переменного тока при наличии магнитного поля.** Известно, что измерение вольтметром напряжения при переменном токе в некоторых случаях может давать неоднозначные результаты [21]. Иногда этот факт объясняют отсутствием однозначного понятия величины электрического напряжения в переменном магнитном поле.

Рассмотрим фрагмент двухпроводной линии переменного тока, показанный на рис. 3, а. Предположим, что необходимо измерить напряжение между точками 1 и 2 на поверхности проводников этой линии, т.е. определить значение  $u_{1_2}$ . Вольтметр измеряет напряжение  $u_{3_4}$  на его клеммах 3 и 4 и поэтому надо установить связь между  $u_{3_4}$  и  $u_{1_2}$  при условии, что в воздушном пространстве между проводниками существует изменяющееся во времени магнитное поле.



а



б

Рис. 3

Рассмотрим замкнутый контур, образованный узлами  $1_2_3_4_1$  измерительной цепи, для которого по 2-му закону Кирхгофа справедливо равенство

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_1 = 0. \quad (14)$$

Так как  $u_{1_2} = \varphi_1 - \varphi_2$ , а  $u_{3_4} = \varphi_3 - \varphi_4$ , то из выражения (14) следует, что измеряемое напряжение  $u_{1_2}$  будет отличаться от напряжения на клеммах вольтметра  $u_{3_4}$  на значение разности потенциалов на концах измерительных проводов. Для расчета этой разности будем полагать, что ток в цепи вольтметра равен нулю. Отсюда в каждой точке измерительного провода выполняется следующее равенство:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma (-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow -\nabla \varphi = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (15, 16)$$

то есть  $\nabla \varphi$  в каждой точке провода равняется индуцированной ЭДС. Отсюда разность потенциалов на концах измерительных проводов, равная линейному интегралу от  $-\nabla \varphi$ , с учетом (16) равна

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \int_2^3 (-\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \int_2^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}, \quad \varphi_4 - \varphi_1 = \int_4^1 (-\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \int_4^1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), окончательно получим

$$u_{1\_2} + \int_2^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = -u_{3\_4}. \quad (18)$$

Отметим, что в этом выражении используется векторный потенциал при калибровке Кулона вида  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Значение этого потенциала  $\mathbf{A}$  можно определить из решения соответствующей полевой задачи аналитическим или численным методом. В случае использования другой калибровки для  $\mathbf{A}$  необходимо выполнить дополнительные преобразования для вычисления вихревой составляющей поля  $\mathbf{E}$  – (см. предыдущий раздел).

Из (18) следует, что чем выше частота тока в линии, тем выше уровень помех в измерительных проводах. Выражение (18) также показывает, что индуцированная ЭДС в измерительных проводах зависит от их расположения. Для ее уменьшения можно придать им форму, показанную, например, на рис. 3, б. При этом на участках проводов 1-1' и 2-2', расположенных перпендикулярно вектору  $\mathbf{A}$ , ЭДС будет близка к нулю, а на участках 2'-3 и 4-1' будет взаимно компенсироваться, отсюда получим  $u_{3\_4} \approx u_{2\_1}$ , т.е. показания вольтметра будут близки к измеряемому напряжению.

Таким образом, показания вольтметра в цепи переменного тока действительно могут существенно отличаться от значения напряжения в точках измерения. Эта разница определяется наличием ЭДС электромагнитной индукции в измерительных проводах (см. выражение (18)). В то же время различие в результатах измерения напряжения на переменном токе, зависящее от расположения измерительных проводов, не является подтверждением тезиса о том, что напряжение в переменном магнитном поле зависит от формы пути интегрирования и не может отрицать существования однозначно определенной разности электрических потенциалов в точках измерения напряжения. В этом смысле электрические цепи переменного тока являются такими же «потенциальными», как и цепи постоянного тока. Отличие между ними заключается лишь в наличии в первом случае дополнительных ЭДС электромагнитной индукции, которые в теории электрических цепей учитываются с помощью членов, содержащих собственные и взаимные индуктивности.

**Заключение.** В работе применительно к классу задач расчета электромагнитного поля в проводящих средах показано, что напряжение в теории поля, определяемое как линейный интеграл от потенциальной составляющей напряженности электрического поля, равный разности электрических потенциалов  $\varphi$ , т.е.  $u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{пот}} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (-\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2$ , согласовывается с напряжением, которое

определяется в соответствии с теорией электрических цепей. Причем электрический потенциал  $\varphi$ , определяющий величину напряжения  $u_{1\_2}$ , содержится в выражении для напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  только при выборе калибровки Кулона для векторного магнитного потенциала вида  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . При выборе другой калибровки для  $\mathbf{A}$  необходимо выполнить дополнительные указанные в статье преобразования для определения величины  $\mathbf{E}_{\text{пот}}$  и затем вычислить напряжение

как  $u_{1\_2} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{пот}} \cdot d\mathbf{l}$ .

С использованием согласованного понятия электрического напряжения рассмотрены особенности его измерения в цепи переменного тока и при наличии магнитного поля, взаимодействующего с измерительными проводами вольтметра.

1. Глухенький О.І. Теорія та розрахункова практика в квазістаціонарному електромагнітному полі (Назад до Максвелла). *Праці Ін-ту електродинаміки НАН України*. Київ, 2008. Вип. 20. С. 89-90.

2. Глухенький А.И., Гориславец Ю.М. Скалярный электрический и векторный магнитный потенциалы в теории электромагнитного поля. *Технічна електродинаміка*. 2012. № 2. С. 7-8.

3. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т.1. С-П.: Питер, 2004. 462 с.
4. Немков В.С., Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. Л.: Энергоатомиздат, 1988. 280 с.
5. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Мультифизическое моделирование в электротехнике. К.: Институт электродинамики НАН Украины, 2015. 305 с.
6. Поливанов К.М. К 100-летию “Трактата об электричестве и магнетизме” Дж.К. Максвелла. *Электричество*. 1974. № 1-3.
7. Сотников В.В. Физическая сущность стационарного электрического поля и терминологическое определение связанных с ним величин. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 3. С. 22-28.
8. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003. 616 с.
9. Шидловский А.К., Гориславец Ю.М., Глухенький А.И. Электромагнитные системы для дозирования жидких металлов. К.: Институт электродинамики НАН Украины, 2011. 208 с.
10. Chua L.O., Desoer C.O., Kuh E.S. Linear and Nonlinear Circuits. McGraw-Hill Book Company, 1987. 839 p.
11. International standard IEC 60050 International Electrotechnical Vocabulary, Part 121, 131.  
URL: <http://www.electropedia.org/> (дата звернення 10.01.2018)
12. Дуков В.М. Электродинамика (история и методология макроскопической электродинамики). М.: Высшая школа, 1975. 248 с.
13. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т.II. М.: Наука, 1989. 431 с.
14. Купфмюллер К. Основы теоретической электротехники. М.: Госэнергоиздат, 1960, 464 с.
15. ГОСТ Р 52002-2003 Электротехника. Термины и определения основных понятий. М., Госстандарт России, 2003. 31 с.
16. ДСТУ 2843-94 Електротехніка. Основні поняття. Терміни та визначення. Київ, ДП «УкрНДНЦ», 1995. 36 с.
17. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высшая школа, 1989. 608 с.
18. Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. М.: ОГИЗ, 1948. 631 с.
19. Kron G. Electric circuit models of partial differential equations. *Electrical Engineering*. 1948. Vol. 67. Is. 7. P. 672-684.
20. Борисов А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Х.: Вища школа, 1978. 216 с.
21. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. М.: Энергоатомиздат, 1989. 528 с.

УДК 537.8

## ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПОНЯТТЯ «ЕЛЕКТРИЧНА НАПРУГА» В ТЕОРЕТИЧНІЙ ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

О.Д. Подольцев, докт.техн.наук, О.І. Глухенький, канд.техн.наук

Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна,  
e-mail: [podol@ied.org.ua](mailto:podol@ied.org.ua); [gai56@ied.org.ua](mailto:gai56@ied.org.ua)

*В роботі розглядається поняття електричної напруги, яке в теорії електричних кіл визначається як різниця електричних потенціалів, а в теорії електромагнітного поля має різні визначення. Показано, що поняття напруги в обох теоріях та напруга, що вимірюється на практиці, будуть узгоджені, якщо напругу визначати як лінійний інтеграл від потенційної складової напруженості електричного поля  $E_{\text{пот}} = -\nabla\varphi$ . Відзначено, що тільки при виборі калібрування Кулона для векторного магнітного потенціалу  $-\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  перший член справа у відомому виразі для напруженості електричного поля  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$  є її потенційною складовою. При цьому значення векторного магнітного та скалярного електричного потенціалів при відповідних граничних умовах визначені однозначно. При виборі іншого калібрування для  $\mathbf{A}$  необхідно виконати додаткові перетворення для визначення  $E_{\text{пот}}$  та величини напруги. З використанням такого узгодженого поняття напруги розглянуті особливості вимірювання електричної напруги в колі змінного струму, коли вимірювальні дроти вольтметра знаходяться у змінному магнітному полі. Бібл. 21, рис. 3.*

**Ключові слова:** потенційне і вихрове електричні поля, електричні кола, електромагнітне поле, електричний та магнітний потенціали, електрична напруга, калібрування Кулона.



## AS FOR CONCEPTION OF ELECTRICAL VOLTAGE IN ELECTRICAL ENGINEERING

Podoltsev A.D., Glykhenkyi O.I.

Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,

pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine,

e-mail: [podol@ied.org.ua](mailto:podol@ied.org.ua) ; [gai56@ied.org.ua](mailto:gai56@ied.org.ua)

*In the paper the concepts of electrical voltage used in the circuit theory and electromagnetic field theory are compared. The voltage is defined as the difference in electric potentials in the circuit theory, but in the field theory there is no unique concept and the different definitions for voltage are used. As shown by two examples, the concepts of voltage in the circuit theory and field theory are consistent with each other and with the concept applied in practice if the voltage is defined as the line integral of the potential part of electric intensity  $\mathbf{E}_p = -\nabla\phi$ . Note that the first term on the right hand of the known expression for electric intensity  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$  is the potential component only when the Coulomb gauge for vector magnetic potential is chosen as  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Using such agreed concept, the particularities of voltage measurement in AC circuit are considered. As revealed, under alternating magnetic field, the voltmeter indications can differ from the voltage at measurable points and this difference is associated with electromotive force induced in the connecting wires of the voltmeter. References 21, figures 3.*

**Key words:** potential and vortex electric field, electric circuits, electromagnetic field, electric and magnetic potentials, voltage, Coulomb gauge/

1. Glukhenkyi O.I. The theory and calculation of quasistationary electromagnetic field. *Pratsi Instytutu Elektrodynamiky Natsionalnoi Akademii Nauk Ukrainy*. 2008. No 20. Pp. 89-90. (Ukr)
2. Glukhenkyi A.I., Goryslavets Y.M. Scalar electric and vector magnetic potentials in theory of electromagnetic field. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2012. No 2. Pp. 7-8. (Rus)
3. Demirchan K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L. Theoretical basics of electrical engineering. V.1. Sankt-Peterburg: Piter, 2004. 462 p. (Rus)
4. Nemkov V.S., Demidovich V.B. Theory and calculation of induction heating devices. Leningrad: Energoatomizdat, 1988. 280 p. (Rus)
5. Podoltsev A.D., Kucheryavaya I.N. Multiphysics Modeling in Electrical Engineering. Kyiv: Institute of electrodynamics of NAS of Ukraine, 2015. 305 p. (Rus)
6. Polivanov K.M. To the 100th anniversary of the "Treatise on Electricity and Magnetism" by J.K. Maxwell. *Elektrichestvo*. 1974. No 1-3. (Rus)
7. Sotnikov V.V. Physical nature of stationary electric field and terminological definition of related quantities. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 3. Pp. 22-28. (Rus)
8. Tamm I.E. Fundamentals of the theory of electricity: Textbook for high schools. Moskva: Fizmatlit, 2003. 616 p. (Rus)
9. Shydlovskii A.K., Goryslavets Y.M., Glukhenkyi A.I. Electromagnetic dosing systems for liquid metal. Kyiv: Institute of electrodynamics of NAS of Ukraine, 2011. 208 p. (Rus)
10. Chua L.O., Desoer C.O., Kuh E.S. Linear and Nonlinear Circuits. McGraw-Hill Book Company, 1987. 839 p.
11. International standard IEC 60050 International Electrotechnical Vocabulary, Part 121, 131.  
URL: <http://www.electropedia.org/> (Accessed at 10.01.2018)
12. Dukov V.M. Electrodynamics (history and methodology of macroscopic electrodynamics). Moskva: Vysshaia shkola, 1975. 248 p. (Rus)
13. Maxwell J.C. A treatise on Electricity and Magnetism. V. II. Moskva: Nauka, 1989. 431 p. (Rus)
14. Kupfmyuller K. The basics of theoretical electrical engineering. Moskva: Gosenergoizdat, 1960. 464 p. (Rus)
15. State standard of the Russian Federation P 52002-2003 Electrotechnics. Terms and definitions of basic concepts. Moskva, Gosstandart Rossii, 2003. 31 p. (Rus)
16. State Standard of Ukraine 2843-94 Electrical engineering. Basic concepts. Terms and definitions. Kyiv, DP "UkrNDNTs", 1995. 36 p. (Ukr)
17. Detlaf A.A., Yavorskii B.M. Physics course. Moskva: Vysshaia shkola, 1989. 608 p. (Rus)
18. Ramo S., Whinnery J. Fields and Waves in Modern Electronics. Moskva: OGIZ, 1948. 631 p. (Rus)
19. Kron G. Electric circuit models of partial differential equations. *Electrical Engineering*. 1948. Vol. 67. Is. 7. P. 672-684.
20. Borisov A.I., Tarapov I.E. Vector analysis and the beginning of tensor calculus. Kyiv: Vyshcha shkola, 1978. 216 p. (Rus)
21. Zeveke G.V., Ionkin P.A., Netushyl A.V., Strahov S.V. Basis of electrical circuits. Moskva: Energoatomizdat, 1989. 528 p. (Rus)

Надійшла 16.11.2016

Остаточний варіант 22.01.2018