УДК 621.3 DOI: https://doi.org/10.15407/techned2018.03.082

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЫБОРКИ В ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НЕКОРЕЛЛИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Р.О. Мазманян, докт.техн.наук
Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина, **e-mail: mazmanian@ied.org.ua**

В статье определена функция когерентности для произвольной пары входная последовательность случайных данных – заданный элемент упорядоченных выборок из последовательности. Установлен существенно нелинейный характер этого метода обработки данных, получены параметрические и статистические оценки близости медианных преобразований последовательностей случайных данных к нормальному закону распределения Гаусса. Представлена методика применения критерия Пирсона для оценки статистической близости аналитически заданных функций. Библ. 15, рис. 7.
Ключевые слова: скользящие выборки, некоррелированная последовательность, медианный фильтр, аппроксимация, критерий Пирсона.

Введение. Последовательности данных, полученные при экспериментальных исследованиях объектов и процессов, как правило, включают случайные составляющие, искажающие результаты наблюдений. Некоторые из них могут быть описаны набором априорных сведений. Построенные с использованием этих сведений частотные фильтры с фиксированной, переменной или адаптивной структурой обеспечивают повышение точности и достоверности результатов исследований. Эффективная обработка частотными фильтрами используется как для одномерных, так и многомерных последовательностей данных, которые и при наличии случайных составляющих имеют гладкий, неразрывный характер.

Другие случайные составляющие, напротив, резко выделяют данные из предшествующей последовательности за счет однократности и необычайно больших или малых их значений, что позволяет характеризовать такие отклонения как неправдоподобные. Действие неправдоподобных составляющих, помимо прямого искажения информации, оказывает влияние и на частотные фильтры, которые используются для подавления шумоподобных или нежелательных детерминированных составляющих.

Скользящие упорядоченные выборки и медианные фильтры. Среди средств редактирования и фильтрации неправдоподобных значений в последовательностях данных медианные фильтры [1] отличаются простотой реализации и высокой эффективностью. Скользящие упорядоченные выборки данных, которые являются их основой, кроме воздействия на неправдоподобные значения, оказывают влияние на полезный сигнал и на его шумоподобные составляющие. Поэтому в исследованиях преобразовательных и избирательных свойств скользящие упорядоченные выборки вначале рассматривались как преобразования множеств [2].

Такой подход позволил сформулировать некоторые «статические» свойства медианных фильтров. Полученные выражения описывают связь между единственным параметром выборки – ее порядком и значениями медианы. Они могут быть использованы в проектировании фильтров с неизменными или переменными структурами.

Очевидно, что еще больший интерес представляют результаты формализации скользящих выборок как динамических систем, описывающих их преобразовательные и избирательные свойства. Динамические свойства скользящих упорядоченных выборок исследовались для входной несмещенной и некоррелированной последовательностей с постоянной спектральной плотностью мощности. При этом рассматривались не только выходные последовательности значений медианы – среднего элемента выборок. Исследования фундаментальных свойств рассматриваемого преобразователя применительно к некоррелированной входной последовательности выполнялись для всех ее элементов. Т.е. упорядоченные выборки были представлены в виде динамической системы с одним входом и

ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-1178-4974

многими выходами – элементами упорядоченных выборок. Результаты исследований формализованы полной вероятностной структурой в виде аналитических выражений, описывающих случайные процессы с дискретным или непрерывным состоянием и дискретным аргументом [3, 6].

Однако исследование скользящих упорядоченных выборок оставалось бы неполным без обоснованных ответов на вопросы, является ли такая динамическая структура с одним входом и многими выходами линейной (линеаризуемой) и как медианные фильтры влияют на шумоподобные составляющие данных?

Цель работы заключается в получении объективного подтверждения линейности (линеаризуемости) или нелинейности такого метода обработки данных и оценок параметрической и статистической близости медианных фильтров этих последовательностей к нормальному закону распределения случайных величин [4].

Объективное заключение о линейности (линеаризуемости) или нелинейности основывается на значении функции когерентности γ_{xy} [5], которую в общем виде для произвольной пары входная последовательность – заданный элемент выборки можно получить из вероятностной структуры скользящих упорядоченных выборок входной некоррелированной последовательности с нулевым средним

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{\left|S_{xy}(\omega_n)\right|^2}{S_x(\omega_n)\,S_y(\omega_n)}, \tag{1}$$

где $S_x(f), S_y(f)$ – функции плотности спектра мощности входного и выходного сигналов, соответственно; $S_{xy}(f)$ – функция плотности кросс-спектра; $\omega_n = 2\pi n/N$ – относительная частота, $n = 0,1\ldots N$ – последовательность целочисленных значений; $d = (N-1)/2$ – порядок упорядоченной выборки, содержащей нечетное число элементов N.

Для входного некоррелированного сигнала примем $S_x(f)=1$.

Автоспектральную плотность мощности $S_y(f)$ получим из формулы для взаимной спектральной плотности мощности для заданного k_z и произвольного k_y элементов выборки [6], записанной в алгебраической форме

– для $\omega_n \neq 0$

$$S^{S}_{ky,kz}(\omega_n) = \frac{2D^{S_S}_{k_z}}{\omega_n^2(2d+1)}\cdot\left[-(1-j\omega_n)e^{-j2d\omega_n} + (1-j\omega_n(2d+1))\right]\begin{cases}\dfrac{k_y+1}{k_z+1} & 0 \le k_y \le k_z;\\[2mm] \dfrac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z} & k_z \le k_y \le 2d;\end{cases} \tag{2}$$

– для $\omega_n = 0$

$$S^{S}_{ky,kz}(\omega_n) = 4dD^{S_S}_{k_z}\,\frac{d+1}{2d+1}\begin{cases}\dfrac{k_y+1}{k_z+1} & 0 \le k_y \le k_z;\\[2mm] \dfrac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z} & k_z \le k_y \le 2d,\end{cases} \tag{3}$$

$$S^{S}_{ky,kz}(\omega_n) = 0, \qquad 0 > k_y > 2d. \tag{4}$$

Здесь $D^{S_S}_{k_z}$ – дисперсия заданного элемента упорядоченных выборок.

Выражение (2) для $k_y = k_z = k$ преобразуется к виду

$$S_y(\omega_n) = \frac{2D^{S_S}_k}{\omega_n^2(2d+1)}\left[-(1-j\omega_n)e^{-j2d\omega_n} + (1-j\omega_n(2d+1))\right]. \tag{5}$$

Модуль кросс-спектральных плотностей мощности, характеризующих перераспределение СПМ входного сигнала по соответствующим элементам скользящих выборок, определяется формулой

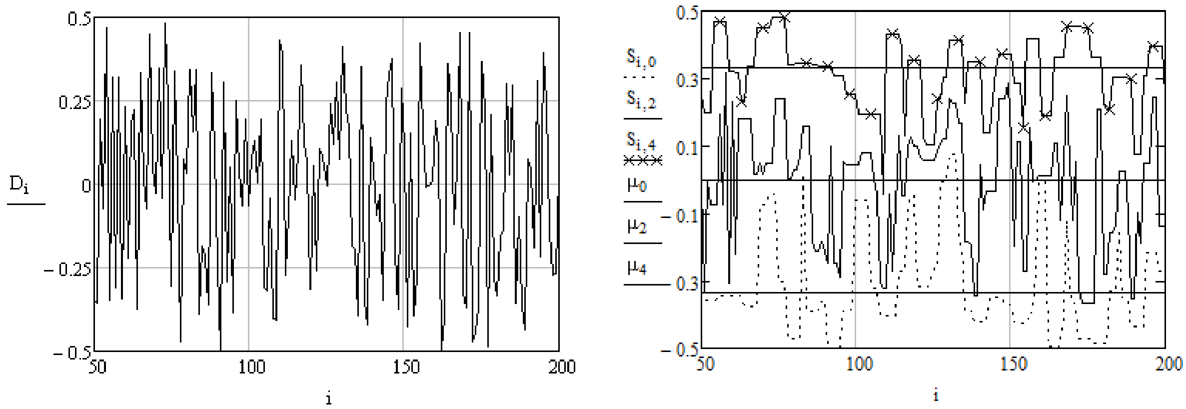
$$\left|S_{xy_k}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{D^{S_S}_k}{\omega_n}\sqrt{1-\cos(2\omega_n d)} = \frac{D^{S_S}_k}{\omega_n}\left|\sin(\omega_n d)\right|. \tag{6}$$

Функция когерентности (1) для спектральных плотностей мощности (5), (6) и $S_x(f)=1$ приобретет вид

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{D_k^{Ss}(2d+1)\sin^2(\omega_n d)}{2\left[-(1-j\omega_n)e^{-j2d\omega_n} + \left[1 - j\omega_n(2d+1)\right]\right]} \neq 1 . \tag{7}$$

Неравенство (7) свидетельствует о существенно нелинейной связи между каждым k-ым элементом выборок как выходом динамической системы и входной несмещенной и некоррелированной последовательностью данных во всем диапазоне частот $\omega_n \neq 0$.

На рис. 1, *а* показан фрагмент входной случайной последовательности данных. Медиана ($S_{i,2}$), наибольший «горячий» ($S_{i,4}$) и наименьший «холодный» ($S_{i,0}$) элементы упорядоченных скользящих выборок порядка $d = 2$, полученные из входной последовательности данных, показаны на рис. 1, *б*.



а ***б***

Рис. 1

Следует особо отметить, что причиной возникновения ненулевых средних «холодных» и «горячих» элементов, которые имеют симметричное расположение относительно нулевого среднего медианы, не может являться несмещенный входной сигнал. Это подтверждается ранее полученными статистически одинаковыми оценками кросскорреляционных функций для центровок по среднему элементов и для центровок по среднему случайного сигнала [7].

Наблюдаемое уменьшение информационной энтропии в упорядоченной системе [8], которое сопровождается энергетическим дисбалансом между ее входом и выходами, вызвано сторонней энергией, внесенной в замкнутую систему. Источником этой энергии является процедура упорядочивания.

Преобразование случайного некоррелированного сигнала медианными фильтрами. Обратимся к важной особенности скользящих упорядоченных выборок – предполагаемой близости распределения плотности вероятности их медиан к нормальному закону, описываемому функцией Гаусса [4]. Известны решения этой задачи с применением приближенных оценок числовых характеристик медиан скользящих выборок [9]. Используемые здесь характеристики получены из строгого вероятностного анализа случайных событий [3], связанных с выделением выборки, ее упорядочиванием и скольжением по несмещенной и некоррелированной последовательности случайных данных. В смысле параметрической близости будут рассматриваться разностные значения этих двух аналитически заданных функций. Статистическая их близость определится из степени соответствия исследуемой функции объективным статистическим критериям.

Оценка параметрической близости медианного фильтра к нормальному закону распределения. Выдвинем гипотезу Н0: распределение медианы скользящей упорядоченной выборки подчинено нормальному закону, параметры которого определяются ее выборочным средним $\mu_S(k)$ и выборочным среднеквадратическим отклонением $\sigma_н(d)$, вычисляемым по значениям дисперсии $D_{S_H}(k,d)$ [3]

$$\mu_S(k) = X_m \frac{(2d+1)!}{2^{2\cdot d+1}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{m=0}^{2d-k} \frac{(-1)^m - (-1)^j}{j!\,m!\,(k-j)!\,(2d-k-m)!\,(m+j+2)}, \tag{8}$$

$$D_{S_H}(k,d)=X_m^2\frac{(2d+1)!}{2^{2d+1}}\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{2d-k}\frac{(-1)^m+(-1)^j}{j!m!(k-j)!(2d-k-m)!(m+j+3)},$$

$$\sigma_H(d)=\sqrt{D_{S_H}(d)}=X_m\sqrt{\frac{(2d+1)!}{2^{2d+1}}\sum_{j=0}^{d}\sum_{m=0}^{d}\frac{(-1)^m+(-1)^j}{j!(d-j)!m!(d-m)!(m+j+3)}}\,. \tag{9}$$

Для медианы ($k=d$) ее среднее $\mu_S(d)$ равно нулю при любых значениях d .

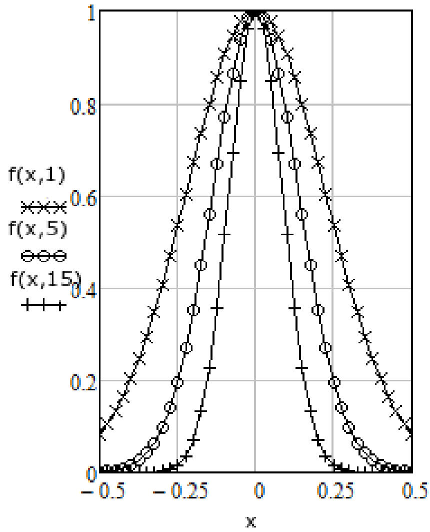
Функция Гаусса [4] по гипотезе H0 запишется как

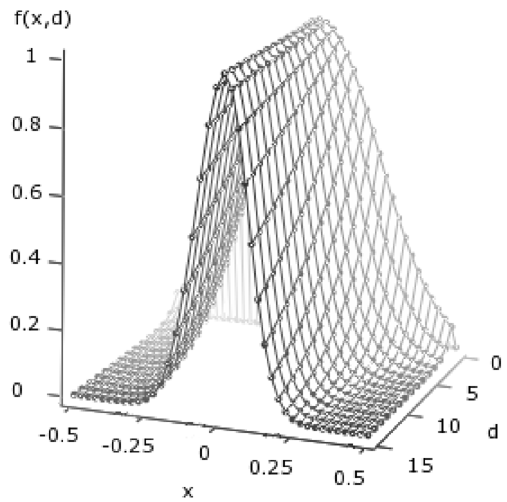
$$F(x,d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H(d)}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_H d^2}}\,.$$

Нормированная максимальным значением $F(0,d)$ функция Гаусса примет вид

$$f(x,d)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma_H d^2}}\,. \tag{10}$$

Кривые нормированной функции (10) показаны на рис. 2 (*а* − *d* = 1, 5, 15, *б* − *d* = 1 … 15).





а ***б***

Рис. 2

Плотность вероятности $P_S(x,k)$ элементов упорядоченной выборки [3]

$$P_S(x,k)=\frac{1}{2X_m}\frac{(2d+1)!}{k!(2d-k)!}\left(\frac{X_m+x}{2X_m}\right)^k\left(\frac{X_m-x}{2X_m}\right)^{2d-k} \tag{11}$$

для медианы ($k=d$) преобразуется к виду

$$P_S(x,d)==\frac{1}{2X_m}\frac{(2d+1)!}{(d!)^2}\left(\frac{X_m^2-x^2}{4X_m^2}\right)^d\,. \tag{12}$$

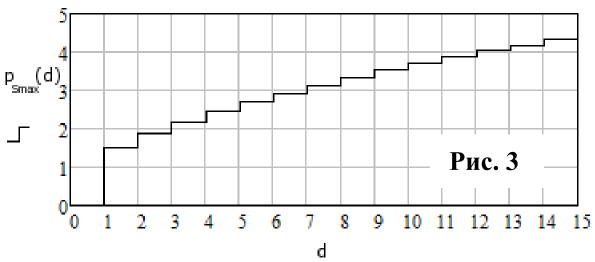


Рис. 3

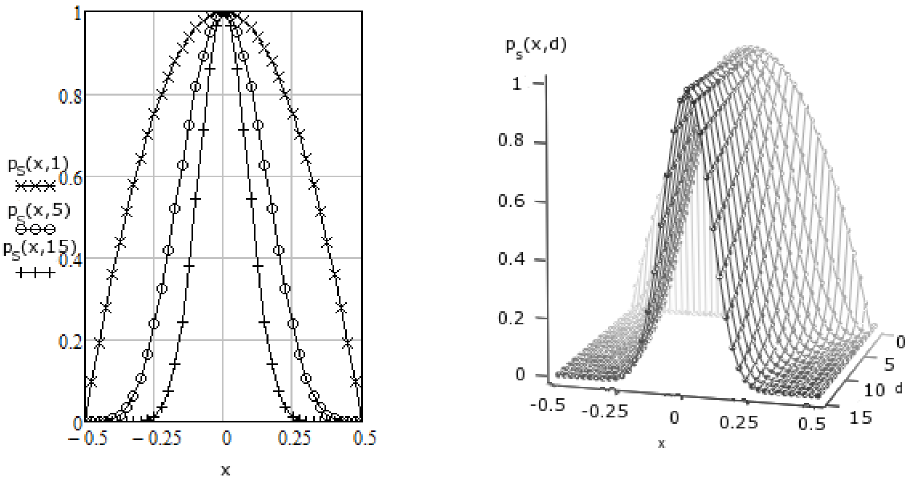
Максимальная плотность вероятности медиан соответствует нулевым значениям случайной величины x , т.е.

$$P_S(0,d)==\frac{1}{X_m}\cdot\frac{(2d+1)!}{2^{2d+1}(d!)^2}\,. \tag{13}$$

С увеличением порядка выборок увеличивается и максимальная плотность вероятности медиан (рис. 3).

Нормированная значениями (13) плотность вероятности медиан (12) приобретет вид

$$p_S(x,d)=\frac{P_S(x,d)}{P_S(0,d)}=\left[1-\left(\frac{x}{Xm}\right)^2\right]^d . \tag{14}$$



а *б*

Рис. 4

На рис. 4 графически показана функция плотности вероятности медианы (14) для различных значений порядка выборки d (*а*$-d$ = 1, 5, 15, *б*$-d$ = 1 … 15).

Параметрическую оценку приближения можно выразить разностью нормированных значений плотности вероятности медианы (14) и функции Гаусса (10), т.е.

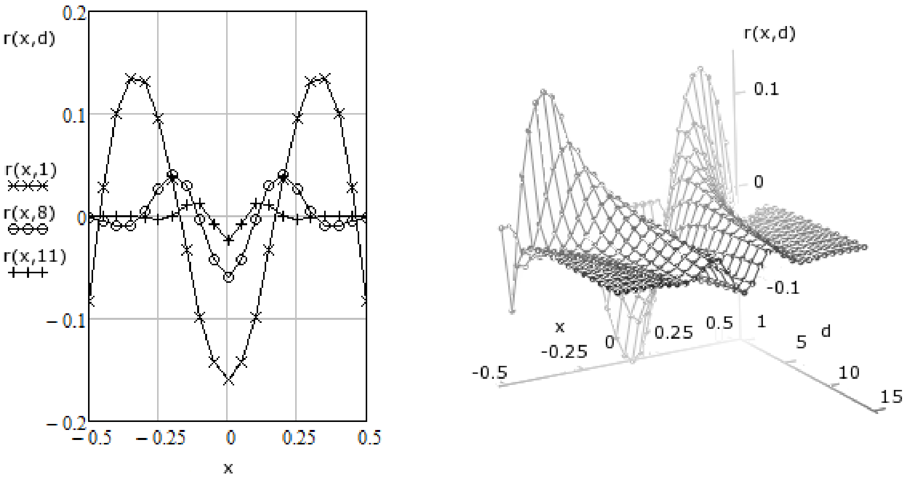
$$r(x,d)=p_S(x,d)-f(x)=\sigma_H(d)\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2X_m}\cdot\frac{(2d+1)!}{(d!)^2}\cdot\left(\frac{X_m^2-x^2}{4X_m^2}\right)^d-e^{-\frac{x^2}{2\sigma_H{}^2(d)}} . \tag{15}$$

Нормированные разностные оценки для выборок с порядком $d=1\ldots15$ показаны на рис. 5 (*а* $-\ d=1,\,5,\,15$; *б* $-\ d=1\ \ldots\ 15$).

Интегральная оценка рассматриваемого приближения как функция порядка выборок может быть выражена через среднеквадратическую ошибку аппроксимации

$$\overline{A}(d)=\sqrt{\frac{1}{2X_m}\sum_{x=-X_m}^{x=X_m}\left(\sigma_H(d)\cdot\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2X_m}\cdot\frac{(2d+1)!}{(d!)^2}\cdot\left(\frac{X_m^2-x^2}{4X_m^2}\right)^d-e^{-\frac{x^2}{2\sigma_H{}^2(d)}}\right)^2} . \tag{16}$$

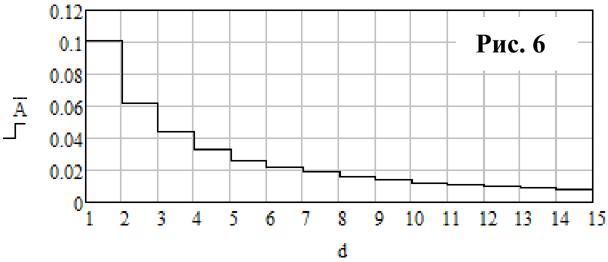
Для обозначенного ряда порядков выборок среднеквадратичные погрешности (рис. 6) не превышают значения 0.1 даже для выборок с минимальным числом элементов, равным трем ($d=1$), и монотонно уменьшаются с увеличением порядка, что свидетельствует о тесной связи исследуемой функции плотности вероятности с нормальным законом распределения.



а *б*

Рис. 5

Оценка статистической близости медианного фильтра к нормальному закону распределения. Оценка статистических свойств распределения, для которой выше была выдвинута гипотеза H0, требует принятия и конкурирующей гипотезы H1 об отсутствии статистической близости рассматриваемой функции с нормальным законом.



При выборе метода для сравнительного исследования статистической близости учитывалась особенность решаемой задачи, которая заключается в выявлении согласия между двумя аналитически заданными функциями. Как и в аналитических исследованиях, цель заключается в получении оценки близости к нормальному закону функции плотности вероятности медиан выборок, имеющих различные значения порядка. Эти особенности определили выбор критерия согласия Пирсона [10], который, как правило, используется для оценки нормальности выборочных данных.

Аналитическое задание сравниваемых плотностей вероятности позволяет вместо выборочных данных использовать их *частости* [11] с сохранением выборочных обозначений: «expected» (ожидаемая) и «observed» (наблюдаемая) применительно к нормальному распределению и функции плотности вероятности медианы соответственно. Тогда критерий согласия Пирсона χ^2 [11], записанный для частостей, вычисляется по формуле

$$\chi^2(d) = n \cdot \int_{-Xm}^{Xm} \frac{\left(p_{ob}(x,d) - p_{ex}(x,d)\right)^2}{p_{ex}(x,d)} dx, \tag{17}$$

где $p_{ob}(x,d)$ и $p_{ex}(x,d)$ – частости сравниваемых функций, n – численность исследуемых данных.

Присвоение единичного значения общей численности исследуемых данных $n=1$ исходит из обозначенной выше особенности решаемой задачи.

Замена интеграла конечной суммой преобразует (17) к виду

$$\chi_d^2 = \sum_{i=0}^{N} \frac{\left(p_i^{ob}(x_i\delta,d) - p_i^{ex}(x_i\delta,d)\right)^2}{p_i^{ex}(x_i\delta,d)}, \tag{18}$$

где $d \ge 1$ – целочисленные значения порядка выборок, N, $\delta = 2X_m / N$ – число и шаг дискретных значений независимой переменной соответственно.

Критические точки t_d для заданных значений порядка выборки d и уровня значимости α рассчитываются из обратного кумулятивного распределения χ^2 со степенями свободы df [11,12]. Определение степени свободы является ключевой процедурой в оценивании статистической близости рассматриваемых функций. При этом учитывается следующее:

– число групп, в которых размещаются упорядоченные данные, равно числу элементов выборки, т.е. $2d+1$, поскольку оценивание нормальности выполняется для интервальных рядов – упорядоченных выборок данных;

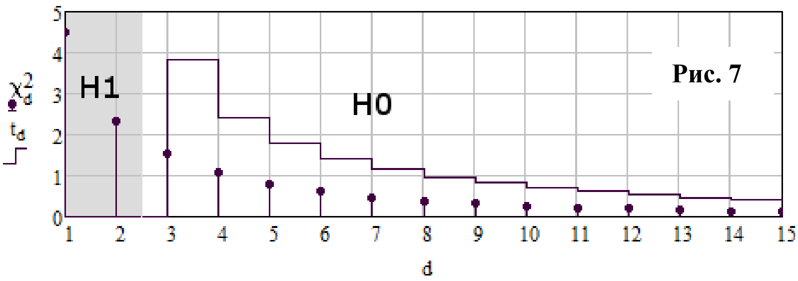
– из четности функции плотности вероятности (12) следует равенство между собой ее значений при изменении знака независимой переменной, и наоборот, каждому значению функции соответствует пара значений независимой переменной, связанных между собой величиной смещения от нуля. Поэтому для элементов выборки без центральной группы медианы число степеней свободы равно ее порядку d;.

– группа медианы также входит в число зависимых, поскольку четность функции плотности вероятности и здесь определяет зависимость между собой переменных, но уже в пределах одной группы.

Таким образом, общее число независимых групп определится выражением $q(d) = d - 1$.

Критические точки t_d вычисляются по следующим параметрам: $\gamma = 0.95$ – доверительная вероятность, $\alpha = 1 - \gamma = 0.05$ – уровень значимости, $s = 2$ – число параметров, определяющих функцию Гаусса (среднее $\mu_s(d)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_H(d|)$); $df(d) = q(d) - s - 1$ – степени свободы.

Для целочисленных значений $d = 1, 2, \ldots$ степени свободы $df(d)$ записываются в виде последовательности df_d. Построение критических точек $t_d(1-\alpha, df_d)$ осуществляется с помощью встроенных функций компьютерных программ, обрабатывающих статистические данные [13,14,15].



По результатам расчетов и проверки выполнения неравенства $\chi_d^2 < t_d$ принимается или отклоняется гипотеза о согласии плотности вероятности медиан упорядоченных выборок с нормальным законом распределения. На рис. 7 показана реализация оценки критерия согласия Пирсона для выборок с порядком от 1 до 15.

Выводы.

1. Получено аналитическое выражение функции когерентности, отличное от 1, что объективно свидетельствует о нелинейности связи между каждым элементом выборок и входной несмещенной и некоррелированной последовательностью данных.

2. Установлена параметрическая близость медианной функции распределения плотности вероятности к функции Гаусса и мера этой близости – среднеквадратическая ошибка аппроксимации, максимальное значение которой не превышает 0.1 для всех выборок с порядком, равным или большим единицы.

3. Статистическая близость этих распределений подтверждена с помощью адаптированного к оценке аналитически заданных функций критерия согласия Пирсона. Установлено соответствие критерию согласия для всех выборок с порядком, равным или большим трех.

4. Полученные результаты позволяют рекомендовать использование медианных редакторов с порядком, равным или большим трех, в тех случаях, когда помимо редактирования неправдоподобных значений предусматривается дальнейшее использование в обработке данных частотных фильтров, что обеспечит повышение точности и достоверности систем контроля и диагностирования электроэнергетического оборудования. В случаях, когда применение медианных фильтров связано только с редактированием неправдоподобных данных, этим ограничением можно пренебречь.

1. Tukey J.W. Nonlinear (Nonsuperposable) Methods for Smoothing Data. Proceedings of *Congress Record EASCON,* Washington DC, 7-9 October 1974. P. 673.

2. Мазманян Р.О. О некоторых свойствах медианных преобразований измерительной информации. *Техн. електродинаміка*. 2003. № 6. С. 70-75.

3. Мазманян Р.О. Характеристики упорядоченных выборок случайного некоррелированного сигнала. *Техн. електродинаміка*. 2004. № 6. С. 60-64.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973. 366 с.

5. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1982. 428 с.

6. Мазманян Р.О. Спектральные характеристики упорядоченных выборок случайного некоррелированного сигнала. *Техн. електродинаміка*. 2009. № 5. С. 63-68.

7. Мазманян Р.О. Экспериментальные исследования преобразования данных скользящими упорядоченными выборками. *Техн. електродинаміка*. 2012. № 1. С. 78-86.

8. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование. К.: Вища школа, 2003. 178 с.

9. Хуанг Т.С., Эклунд Дж.-О., Нуссбаумер Г. Дж. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. М.: Радио и связь, 1984. 224 с.

10. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник. М.: Финансы и статистика, 2001. 480 с.

11. Теслер Г.С., Зы Хак Зунг. Вычисление функции интеграла вероятности и ей обратной. *Математичні машини і системи.* 2004. № 3. С. 31-40.

12. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. Киев: Наукова думка, 1984. 600 с.

13. Иглин С.П. Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB: Учеб. пособие. Харьков: НТУ "ХПИ", 2006. 612 с.

14. MathCAD 15. (2014). User's Guide, Mathsoft Engineering & Education, Inc. Cambridge, MA.

15. Chandrakantha L. Simulating Chi-Square Test using Excel. Electronic Proceedings of the 25th Annual International Conference on *Technology in Collegiate Mathematics* (ICTCM), March, 2013, Boston, MA. P. 50-58.

УДК 621.3
ВПОРЯДКОВАНІ ВИБІРКИ В ПЕРЕТВОРЕННЯХ НЕКОРЕЛЬОВАНОГО СИГНАЛУ
Р.О. Мазманян, докт.техн.наук
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057 Україна,
e-mail: mazmanian@ied.org.ua

У статті визначено функцію когерентності для довільної пари вхідна послідовність випадкових даних – заданий елемент упорядкованих вибірок з послідовності. Встановлено істотно нелінійний характер цього методу обробки даних, отримано параметричні та статистичні оцінки близькості медіанних перетворювань послідовностей випадкових даних до нормального закону розподілу Гауса. Представлено методику застосування критерію Пірсона для оцінки статистичної близькості аналітично заданих функцій. Бібл. 15, рис. 7.
Ключові слова: ковзні вибірки, некорельована послідовність, медіанний фільтр, апроксимація, критерій Пірсона.

ORDERED SAMPLES IN UNCORRELATED SIGNAL CONVERSION
R.O. Mazmanian
Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,
pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine,
e-mail: mazmanian@ied.org.ua

The coherence function for an arbitrary pair the input sequence – a given element of ordered samples random data's is defined. The essentially nonlinear character of this data processing method is established. Parametric and statistical estimates of the proximity of median transformations to the normal Gaussian distribution law are obtained. A technique for applying the Pearson criterion for estimating the statistical proximity of analytically defined functions is presented. References 15, figures 7.
Key words: sliding samples, uncorrelated sequence, median filter, approximation, Pearson's criterion.

1. Tukey J.W. Nonlinear (Nonsuperposable) Methods for Smoothing Data. Proceedings of *Congress Record EASCON,* Washington DC, 7-9 October 1974. P. 673.
2. Mazmanian R.O. On some properties of the median transformations of measurement information. *Tekhnichna Elektrodynamika.* 2003. No. 6. P. 70-75. (Rus)
3. *Mazmanian R.O.* Characteristics of ordered samples of a random uncorrelated signal. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2004. No 6. P. 60-64. (Rus)
4. Venttsel E.S., Ovcharov L.A. Probability theory. Moskva: Nauka, 1973. 366 p. (Rus)
5. Otnes R., Enokson L. Applied time series analysis. Basic techniques. Moskva: Mir, 1982. 428 p. (Rus)
6. Mazmanian R.O. Spectral characteristics of ordered samples of a random uncorrelated signal. *Tekhnichna Elektrodynamika.* 2009. No 5. P. 63-68. (Rus)
7. Mazmanian R.O. Experimental studies of data transformation by sliding ordered samples. *Tekhnichna Elektrodynamika.* 2012. No 1. P. 78-86.
8. Tsyimbal V.P. Information theory and coding. Kyiv: Vyshcha shkola, 2003. 178 p. (Rus)
9. Huang T.S., Eklund Dzh.-O., Nussbaumer G.Dzh. Fast algorithms in digital image processing. Moskva: Radio i sviaz, 1984. 224 p. (Rus)
10. Eliseeva I.I., Yuzbashev M.M. General Theory of Statistics: textbook. Moskva: Finansy i statistika, 2001. 480 p. (Rus)
11. Tesler G.S., Zyi Hak Zung. Calculation of the function of the probability integral and its inverse. *Matematychni mashyny i systemy.* 2004. No 3. P. 31-40. (Rus)
12. Popov B.A., Tesler G.S. Calculation of functions on a computer. Handbook. Kiev: Naukova dumka, 1984. 600 p. (Rus)
13. Iglin S.P. Theory of Probability and Mathematical Statistics on the Basis of MATLAB: Manual. Kharkiv: NTU KhPI, 2006. 612 p. (Rus)
14. MathCAD 15. (2014). User's Guide, Mathsoft Engineering & Education, Inc. Cambridge, MA.
15. Chandrakantha L. Simulating Chi-Square Test using Excel. Electronic Proceedings of the 25th Annual International Conference on *Technology in Collegiate Mathematics (ICTCM),* March, 2013, Boston, MA. P 50-58.

Надійшла 08.09.2017
Остаточний варіант 12.12.2017