

ЗАТУХАННЯ НЕОДНОРІДНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ СТРУМОВОГО КОНТУРА В ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ ПІВПРОСТОРІ

Ю.М. Васецький, докт.техн.наук, **К.К. Дзюба**, **І.М. Кучерява**, докт.техн.наук, **І.Л. Мазуренко**,

канд.техн.наук

Інститут електродинаміки НАН України,

пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна.

E-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

На основі аналітичного розв'язку тривимірної польової задачі і чисельного розрахунку в пакеті Comsol проаналізовано затухання неоднорідного електромагнітного поля при його проникненні в електропровідний півпростір. Сформульовано загальний висновок, що неоднорідне поле завжди затухає тим швидше, чим більша глибина проникнення. При сильному скін-ефекті закон затухання неоднорідного поля наближається до закону затухання однорідного поля для всіх точок поверхні, причому відхилення залежить від величини введеного малого параметра. Бібл. 10, рис. 4.

Ключові слова: тривимірне електромагнітне поле, вихрові струми, затухання поля, чисельний та аналітичний методи.

Вступ. Задачі, які виникають при взаємодії змінного електромагнітного поля з електропровідним тілом, є предметом вивчення при дослідженні процесів у багатьох технічних і електрофізичних застосуваннях, наприклад, у технології зміни властивостей матеріалів під впливом струмів високої щільності [1], обладнанні для індукційного нагрівання металів [2], пристроях магнітно-імпульсної обробки металів [3] та інших. В усіх вказаних випадках основну роль відіграють струми, що індукуються змінним полем в електропровідному тілі. Розподіл квазістаціонарного електромагнітного поля в тілі залежить не тільки від електрофізичних характеристик: питомої електропровідності γ і відносної магнітної проникності μ та циклічної частоти ω , а й від геометрії електропровідного тіла та характеру неоднорідності зовнішнього до тіла поля.

У випадку однорідного електромагнітного поля його проникнення в електропровідний півпростір описується відомим розподілом напруженостей електричного \dot{E}_i і магнітного \dot{H}_i полів [4]

$$\dot{E}_i = \dot{E}_{0\tau} e^{-pz}, \quad \dot{H}_i = \dot{H}_{0\tau} e^{-pz}, \quad \text{причому } \dot{E}_\tau = \zeta [\mathbf{e}_z \times \dot{H}_\tau], \quad (1)$$

де $p = \sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}$ – постійна розповсюдження, дійсне значення якої $\delta = \text{Re}(p)$ дає глибину проникнення поля; поверхневий імпеданс $\zeta = \sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}/\gamma$ в цьому випадку пов'язує значення дотичних складових поля $\dot{E}_{0\tau}$, $\dot{H}_{0\tau}$ не тільки на плоскій поверхні поділу діелектричного і електропровідного середовищ, а й в усьому півпросторі. У (1) z – координата, перпендикулярна до плоскої поверхні поділу середовищ і спрямована у бік діелектрика, i – умовна одиниця.

У [5] показано, що у випадку, коли гранична поверхня не є плоскою, формулювання задачі розрахунку поля включає поверхневий імпеданс, в якому враховано також основні кривини поверхні. Для іншого випадку, коли гранична поверхня є плоскою, але вихідне зовнішнє поле створюється струмовим контуром довільної просторової конфігурації, в [6, 7] на основі відомої хвильової задачі [8, 9] отримано загальний розв'язок відповідної квазістаціонарної тривимірної задачі. Встановлено, що особливістю розподілу поля в електропровідному півпросторі є нульове значення нормальних компонентів напруженості електричного поля і густини індукованого струму. Аналітичний розв'язок дає змогу проаналізувати ступінь затухання поля в електропровідному середовищі з урахуванням того, що напруженість поля має тільки дві компоненти \dot{E}_x і \dot{E}_y , паралельні поверхні поділу середовищ. Необхідним на цьому етапі дослідження є також проведення розрахунків незалежним чисельним методом, що дає змогу підтвердити правильність результатів та розробити підходи до тривимірного моделювання зазначених електромагнітних систем.

Метою роботи є дослідження основних тенденцій затухання в електропровідному середовищі неоднорідного тривимірного електромагнітного поля за допомогою двох незалежних методів розрахунку: аналітичного і чисельного з використанням програмного пакета Comsol.

Загальні положення. Вираз для напруженості поля \dot{E}_i в довільній точці електропровідного середовища Q , представлений у [6], для проведення аналізу зручно записати з використанням безрозмірних змінних наступним чином (рис. 1):

$$\dot{E}_i = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \frac{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}}{\mu} \oint_{l_M} \left[(\mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z) f_1\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z f_2\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) \right] dl_M, \quad (2)$$

де e_ρ – одиничний радіальний вектор локальної циліндричної системи координат відносно точки джерела M , t – одиничний вектор дотичної до контура в точці M , $\varepsilon = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}/\mu h = \mu\delta/\sqrt{2}h$. Введені функції визначаються як

$$f_1\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2i}\frac{z}{\delta}\sqrt{1+\left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\chi}{\varepsilon}J_0\left(\frac{\text{tg}\beta}{\varepsilon}\chi\right)}}{\chi/\sqrt{i} + \sqrt{1+\left(\chi/\mu\sqrt{i}\right)^2}} \chi d\chi, \quad f_2\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2i}\frac{z}{\delta}\sqrt{1+\left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\chi}{\varepsilon}J_1\left(\frac{\text{tg}\beta}{\varepsilon}\chi\right)}}{\chi/\sqrt{i} + \sqrt{1+\left(\chi/\mu\sqrt{i}\right)^2}} \chi d\chi. \quad (3)$$

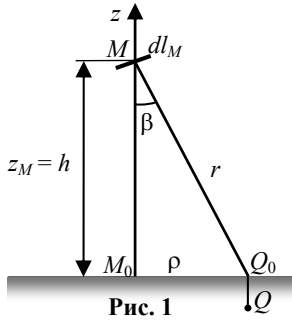


Рис. 1

Тут $J_0(\cdot), J_1(\cdot)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку; інші параметри позначено на рис. 1, де показано елемент dl_M контура зі струмом I_0 .

Зазначимо, що при інтегруванні вздовж контура треба враховувати, що ε і β залежать від положення точки M . Поняття сильного або слабого скін-ефекту можна розглядати як таке, що визначається відношенням глибини проникнення поля до найменшого характерного розміру електромагнітної системи. Таким параметром може слугувати найбільше значення параметра ε_m , яке реалізується, коли точка M на контурі знаходиться на найменшій відстані h_0 від поверхні поділу середовищ.

Так, при сильному в цьому відношенні скін-ефекті з виразів (3) випливає, що на значення невласних інтегралів у першу чергу впливає поведінка підінтегральних функцій поблизу нульового значення змінної інтегрування χ . Тоді вплив множника $\sqrt{1+\left(\chi/\mu\sqrt{i}\right)^2}$ у показнику експоненти буде слабо відрізнятися від одиниці, і тому затухання поля від його значення на поверхні в точці Q_0 буде виявлятися близьким до затухання однорідного поля (1). Навпаки, при слабкому скін-ефекті вплив зазначеного множника буде суттєвим і затухання відбуватиметься за іншим законом. Але в будь-якому випадку, оскільки величина множника за модулем більша одиниці, то затухання неоднорідного поля, створеного яким-небудь струмовим контуром, буде (в більшій або меншій мірі) сильнішим, ніж у випадку однорідного поля. З врахуванням принципу суперпозиції останнє твердження справедливе для будь-якої системи вихідних замкнених струмів.

Проілюструємо зроблений загальний висновок на конкретних прикладах.

Затухання поля, коли глибина проникнення є порівнянною з розмірами струмового контура. Результати розрахунку за допомогою аналітичних виразів та чисельного методу в пакеті Comsol виконано для кругового контура з синусоїдальним струмом радіуса $R = 0,05$ м та мінімальною відстанню до поверхні поділу середовищ $h_0 = 0,02$ м. Контур знаходиться в площині, перпендикулярній до плоскої поверхні поділу середовищ, як показано в [10]. Вплив глибини проникнення поля, коли вона є порівнянною з розміром струмового контура, показано на рис. 2 за результатами розрахунку напруженості електричного поля в області $z < 0$ при $\mu = 1$.

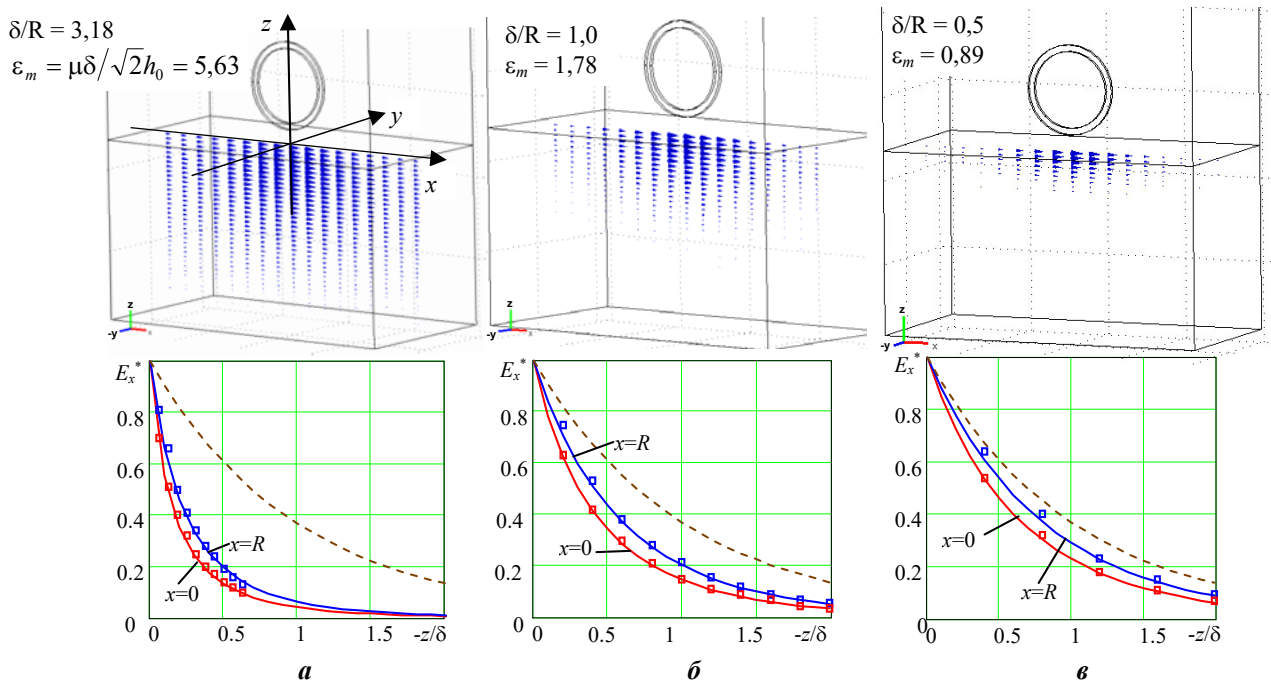


Рис. 2

На рис. 2 зверху стрілками показано розподіл вектора густини наведеного струму у вертикальній площині, що проходить через центр контура зі струмом. Графіки внизу показують зміну модуля комплексної амплітуди напруженості поля, нормованого за значенням поля у поверхні $E_x^* = |\dot{E}_x|/|\dot{E}_x(z=0)|$, залежно від координати z в електропровідному середовищі, віднесеної до глибини проникнення поля $-z/\delta$. Пунктирні лінії показують затухання однорідного поля за виразом (1), безперервні лінії відповідають аналітичному розрахунку, окремі точки, позначені квадратиками, – чисельному.

Як видно, зі зменшенням глибини проникнення δ по відношенню до радіуса контура R або до відстані h_0 затухання поля наближається до максимально повільного спадання однорідного поля. Ця обставина є підставою для аналізу спадання поля при сильному скін-ефекті, коли глибина проникнення поля є достатньо малою порівняно з характерними розмірами електромагнітної системи.

Затухання поля при сильному скін-ефекті. Проведемо аналіз для контура довільної конфігурації, коли величина $\varepsilon = \mu\delta/\sqrt{2}h$ є малим параметром для будь-якої точки струмового контура, тобто $\varepsilon \leq \varepsilon_m < 1$. Для підтвердження наближення закону затухання поля в цьому випадку до закону затухання однорідного поля (1) проведемо порівняння функцій $f_1(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ і $f_2(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ з урахуванням множника $\sqrt{1 + (\chi/\mu\sqrt{i})^2}$ і тими самими функціями $f_{10}(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ і $f_{20}(z/\delta, \varepsilon, \beta)$, але за умови, що множник прийнято рівним одиниці, що відповідає випадку затухання однорідного поля.

Відносні значення похибки при заміні множника одиницею, що розраховані для модулів комплексних амплітуд функцій (3) $\Delta_{1,2} = \left| \frac{|f_{1,2}| - |f_{10,20}|}{|f_{1,2}|} \right|$, показано на рис. 3 і 4 для різних величин малого параметра ε

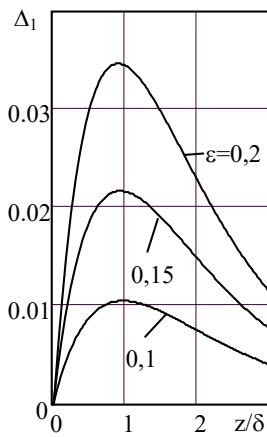


Рис. 3

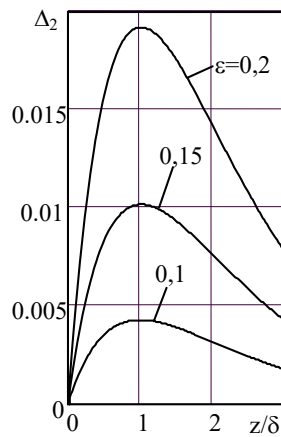


Рис. 4

при $\mu = 1$. Для функції f_1 , яка пов'язана зі складовою напруженості поля від напрямку струму, паралельного поверхні поділу середовищ у виразі (2), результати наведено при $\beta = 0$, тобто розглядаються точки на поверхні безпосередньо під елементом контура, для яких значення функції $|f_1|$ є найбільшим, а зміна величини малого параметра ε пов'язана зі зміною висоти елемента контура над поверхнею. Для функції f_2 , пов'язаної з напрямком струму, перпендикулярним до поверхні, розрахунки проведені для точки на поверхні при $\rho = h$ ($\beta = \pi/4$) поблизу максимуму функції $|f_2|$.

Видно, що зі зменшенням величини малого параметра ε похибка від заміни в (3) у показнику експоненти множника $\sqrt{1 + (\chi/\mu\sqrt{i})^2}$ одиницею швидко зменшується і

в будь-якому випадку не перевищує декількох відсотків, з найбільшою величиною на глибині, де величина поля складає приблизно третину від максимального значення на поверхні.

Звідси можна зробити висновок, що у випадку сильного скін-ефекту, коли параметр $\varepsilon_m = \mu\delta/\sqrt{2}h_0$ (максимальне значення параметра для точки на струмовому контурі, що віддалена від площини на мінімальну для всього контура відстань) є малим, напруженість електричного поля затухає з глибиною від значення на поверхні за законом проникнення однорідного змінного поля в електропровідний півпростір незалежно від положення точки на поверхні. Якщо нехтувати вказаною похибкою, то вираз для напруженості електричного поля (2) в електропровідному середовищі спрощується і стає таким:

$$\dot{E}_i \approx e^{z\sqrt{i\omega\mu\sigma}} \dot{E}_i(z=0) = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega e^{z\sqrt{i\omega\mu\sigma}} \oint_l [(\mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z) f_1(0, \varepsilon, \beta) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_p f_2(0, \varepsilon, \beta)] dl_M. \quad (4)$$

Електромагнітне поле контура зі змінним струмом не є однорідним, і отриманий результат можна вважати умовою можливості для такого поля застосування закону проникнення, справедливого у випадку однорідного електромагнітного поля.

Висновки. Показано, що неоднорідне змінне електромагнітне поле при проникненні в електропровідний півпростір завжди затухає швидше, ніж у випадку проникнення однорідного поля, причому тим швидше, чим більша глибина проникнення порівняно з розмірами струмового контура. Такий висновок обґрунтований у тому числі за результатами розрахунку напруженості електричного поля за загальними аналітичними виразами та отриманим чисельним методом із застосуванням програмного пакета Comsol.

У випадку сильного скін-ефекту, коли глибина проникнення поля є меншою, ніж мінімальна відстань контура від межі поділу середовищ, напруженість електричного поля затухає з глибиною від значення на по-

верхні приблизно за законом проникнення однорідного змінного поля в електропровідний півпростір незалежно від положення точки на поверхні. Показано, що відхилення від закону проникнення однорідного поля зменшується зі зменшенням величини введеного малого параметра.

1. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И. Влияние импульсного электрического тока высокой плотности на прочность металлических материалов и напряженно-деформированное состояние элементов конструкций. К.: Наукова думка, 2014. 276 с.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. Marcel Dekker Inc., 2003. 777 p.
3. Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Т.3.: Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями. Харьков: ХНАДУ, 2009. 240 с.
4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.
5. Кравченко А.Н., Нижник Л.П. Электродинамические расчеты в электротехнике. К.: Техніка, 1977. 184 с.
6. Васецкий Ю.М., Дзюба К.К. Аналитический метод расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля тока, протекающего по контуру произвольной конфигурации вблизи электропроводного тела. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 5. С. 7-17.
7. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. Three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field generated by arbitrary current contour near conducting body. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 1. С. 3-12.
8. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
9. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Изд. Иностран. лит., 1958. 501 с.
10. Васецкий Ю.М., Кучерява И.М., Мазуренко И.Л., Дзюба К.К. Аналітичний та чисельний розрахунок квазістаціонарного тривимірного електромагнітного поля струмового контура поблизу електропровідного середовища. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 10-13.

УДК 621.3.011

ЗАТУХАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВОГО КОНТУРА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ

Ю.М. Васецкий, докт.техн. наук, **К.К. Дзюба**, **И.Н. Кучерявая**, докт.техн.наук, **И.Л. Мазуренко**, канд.техн.наук

Институт электродинамики НАН Украины,

пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина.

E-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

На основе аналитического решения трехмерной задачи распределения поля и численного метода расчета в пакете Comsol проанализировано затухание неоднородного поля при его проникновении в электропроводное полупространство. Сформулирован общий вывод, что неоднородное поле всегда затухает тем быстрее, чем больше глубина проникновения. При сильном скин-эффекте закон затухания неоднородного поля приближается к закону затухания однородного поля для всех точек поверхности, причем отклонение зависит от величины введенного малого параметра. Библиография 10, рис. 4.

Ключевые слова: трехмерное электромагнитное поле, вихревые токи, затухание поля, численный и аналитический методы.

THE PENETRATION OF NONUNIFORM ELECTROMAGNETIC FIELD OF CURRENT COUNTER IN CONDUCTING MEDIUM

Yu.M. Vasetsky, K.K. Dziuba, I.M. Kucheriava, I.L. Mazurenko

Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,

pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine.

E-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

The reduction of nonuniform electromagnetic field created by current contour in conducting half-space is analyzed by analytical solution of three-dimensional field problem and numerical computation of the problem using program Comsol. As shown, the rate of the field reduction depends on skin depth. The greater the depth, the faster the rate of such field penetration. At strong skin-effect, the rate of field reduction is approximated to uniform field penetration for all points on the interface, and the disagreement is associated with the value of small parameter. References 10, figures 4.

Key words: three-dimensional electromagnetic field, eddy current, field penetration, numerical and analytical methods.

1. Stepanov G.V., Babutskiy A.I. Effect of high-density pulsed electric current on strength of metallic materials and stress-strain state of structural components. Kyiv: Naukova dumka, 2010. 276 p. (Rus)
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. Marcel Dekker Inc., 2003. 777 p.
3. Turenko A.N., Batiygin Yu.V., Gnatov A.V. Pulse magnetic fields for progressive technologies. Vol. 3: The theory and experiment of an attraction of thin-walled metals by pulse magnetic fields. Kharkov: HNADU, 2009. 240 p. (Rus)
4. Polivanov K.M. Theoretical bases of electrical engineers. Vol. 3. The theory of electromagnetic field. Moskva: Energiia, 1969. 352 p. (Rus)
5. Kravchenko A.N., Nizhnik L.P. Electrodynamics calculations in electrical engineering. Kyiv: Tekhnika, 1974. 184 p. (Rus)
6. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. An analytical calculation method of quasi-stationary three-dimensional electromagnetic field created by the arbitrary current contour that located near conducting body. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 5. Pp. 7-17. (Rus)
7. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. Three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field generated by arbitrary current contour near conducting body. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2018. No 1. Pp. 3-12.
8. Tozoni O.V. Method of secondary sources in the electrical engineer. Moskva: Energiia, 1975. 296 p. (Rus)
9. Zommerfeld A. Elektrodynamics. Moskva: Izdatelstvo Inostrannoi literatury, 1958. 501 p. (Rus)
10. Vasetsky Yu.M., Kucheriava I.M., Mazurenko I.L., Dziuba K.K. Analytical and numerical determination of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field of alternating current contour near the conducting medium. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2018. No 4. Pp. 10-13. (Ukr)

Надійшла 02.03.2018
Остаточний варіант 14.03.2018