

## АНАЛІТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНКИ КВАЗІСТАЦІОНАРНОГО ТРИВИМІРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ СТРУМОВОГО КОНТУРА ПОБЛИЗУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО СЕРЕДОВИЩА

**Ю.М. Васецький\***, докт.техн.наук, **І.М. Кучерява**, докт.техн.наук, **І.Л. Мазуренко\*\***, канд.техн.наук,  
**К.К. Дзюба**  
Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна. E-mail: [yuriv.vasetsky@gmail.com](mailto:yuriv.vasetsky@gmail.com)

*Проведено аналіз розподілу тривимірного квазістаціонарного електромагнітного поля, що формується в системі просторовий контур зі змінним струмом – електропровідний півпростір. Розрахунки виконано двома методами: аналітичним і чисельним з використанням пакета Comsol. Отримані дані показали збіг результатів і підтвердили загальний теоретичний висновок про нульове значення нормальної до межі поділу середовищ компоненти напруженості поля і густини струму в електропровідному півпросторі. Бібл. 3, рис. 5.*

**Ключові слова:** тривимірне електромагнітне поле, вихровий струм, чисельний та аналітичний методи.

**Вступ.** При розробці багатьох технічних пристроїв використовується математична модель для визначення розподілу електромагнітного поля, де вихідними джерелами є змінні струми, що протікають уздовж контурів певної конфігурації [1, 2]. Коли вихідні струми протікають поблизу електропровідних тіл, в них індуються вихрові струми, які також беруть участь у формуванні поля. Незважаючи на значні успіхи застосування чисельних методів, існує широке коло об'єктів, де ефективними залишаються спеціалізовані аналітичні або чисельно-аналітичні підходи. До таких об'єктів належать, зокрема, системи, геометричні особливості яких характеризуються різним характером зміни поля у просторі – швидким змінням поблизу елементів зі струмом або біля межі поділу середовищ і значно повільнішим в іншій частині простору, суттєво більшого об'єму. Ще одним аргументом на користь аналітичних і чисельно-аналітичних методів є можливість проведення глибокого аналізу причин та особливостей протікання фізичних процесів. Тому поєднання двох вказаних широко розповсюджених підходів представляється не тільки корисним з точки зору отримання конкретних результатів, а й доцільним на сучасному етапі розвитку методів розрахунку складних електромагнітних систем.

Останнім часом на основі відомих результатів аналітичного розв'язку загальної хвильової задачі про поле струмового диполя поблизу межі поділу середовищ та застосування умови безперервності струму було отримано загальний аналітичний розв'язок тривимірної задачі для квазістаціонарного електромагнітного поля змінного струму, що тече уздовж контура, розташованого поблизу плоскої поверхні електропровідного тіла, без обмежень на геометрію контура, електрофізичні властивості середовища і частоту поля [3]. Встановлено, що основною особливістю розподілу електромагнітного поля є те, що в електропровідному півпросторі складова напруженості електричного поля і густини струму, яка перпендикулярна до граничної поверхні, дорівнює нулю для будь-якого розподілу системи вихідних струмів у діелектричному середовищі і довільній залежності струмів від часу.

Для комплексної амплітуди напруженості електричного поля  $\dot{E}_i$  в довільній точці  $Q(x, y, z)$  електропровідного півпростору з питомою електропровідністю  $\gamma$  і відносною магнітною проникністю  $\mu$  при протіканні вздовж контура струму  $\dot{I}_0$  з циклічною частотою  $\omega$  у загальному випадку отримано вираз у вигляді контурного інтеграла по точках джерела  $M$  контура [3]

$$\dot{E}_i = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ (\mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z) \int_0^\infty \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho_{QM})}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_p \int_0^\infty \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho_{QM})}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \right\} dl_M, \quad (1)$$

де  $\mathbf{e}_p$  – одиничний радіальний вектор локальної циліндричної системи координат відносно точки  $M$ ;  $\mathbf{t}$  – одиничний вектор дотичної до контура;  $\rho_{QM} = \sqrt{(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2}$ ;  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку відповідно;  $i$  – умовна одиниця;  $q_i = \sqrt{\vartheta^2 + i\omega\mu_0\gamma}$ ;  $w(\vartheta) = \vartheta + q_i/\mu$ .

З умови нульової вертикальної компоненти густини індукованого струму випливають визначені співвідношення на плоскій границі для нормальної компоненти напруженості електричного поля  $E_z^+$  з боку діелектричного середовища і поверхневої густини електричного заряду  $\sigma$  (вони цілком визначаються тільки вертикальною компонентою індукованого електричного поля вихідного струму):

© Васецький Ю.М., Кучерява І.М., Мазуренко І.М., Дзюба К.К., 2018

ORCID:\* <http://orcid.org/0000-0002-4738-9872>; \*\* <http://orcid.org/0000-0002-0146-7396>

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_e \varepsilon_0} = E_z^+ = -2i\omega \dot{A}_{0z}(z=0), \quad \text{де} \quad A_{0z}(z=0) = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_{l_{QM}} \frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)}{r_{QM}(z=0)} dl_M. \quad (2)$$

Зазначимо, що отримані загальні аналітичні результати не було проілюстровано на конкретних прикладах і не було проведено порівняння з результатами розрахунків за допомогою іншого незалежного методу розрахунку поля.

У зв'язку з цим метою роботи є дослідження розподілу квазістаціонарного тривимірного поля електромагнітної системи, що містить контур конкретної конфігурації з синусоїдальним струмом, розташований над електропровідним середовищем з плоскою поверхнею, та порівняння результатів, отриманих за аналітичними виразами та із застосуванням програмного пакета Comsol.

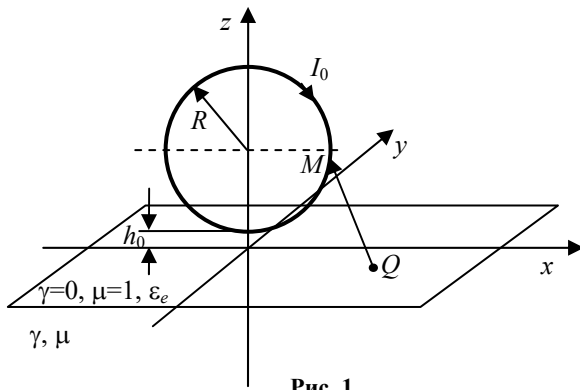


Рис. 1

#### Розрахункова модель та отримані результати.

У роботі досліджується розподіл електромагнітного поля для електромагнітної системи у вигляді кругового контура радіуса  $R$  зі струмом  $\dot{I}_0$ , розташованого в площині  $xOz$  перпендикулярно до поверхні поділу середовищ. Мінімальна відстань від контура до поверхні  $h_0$  (рис. 1).

На відміну від аналітичного методу розрахунку, при використанні пакета Comsol контур зі струмом обирається у вигляді струмопроводу квадратної форми перерізу  $2r \times 2r$ , сторона якого значно менша, ніж відстань  $h_0$ . Для використання чисельного методу задача формулюється для обмеженого простору, розміри якого значно перевищують радіус контура  $R$ .

Представлену розрахункову модель можна розглядати як модель магнітної системи для отримання в електропровідному середовищі індукованого струму певної густини. Розрахунки виконано для наступних геометричних та електрофізичних параметрів:  $R = 0,05$  м,  $h_0 = 0,02$  м,  $r = 0,004$  м,  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 10^5$  Ом<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup> для частоти  $f = 10^3$  Гц і струму  $I_0 = 10^3$  А.

На рис. 2 показано розподіл густини індукованого струму  $\mathbf{j}_i = \gamma \mathbf{E}_i$ , що отримано чисельним методом: а) у вертикальній площині, що проходить через центр контура зі струмом; б) у тій самій площині вектори густини струму показано стрілками; в) показана картина протікання струму в площині, що паралельна поверхні поділу середовищ.

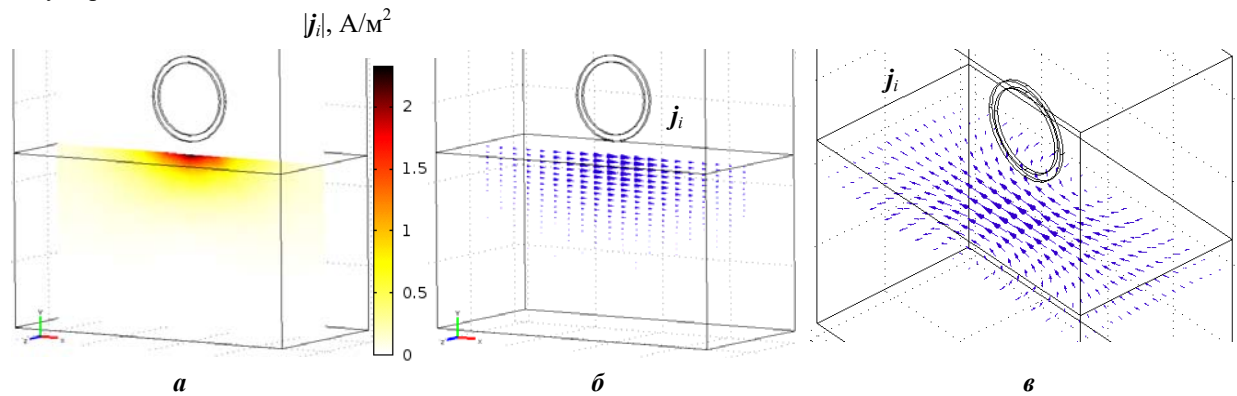


Рис. 2

Моделювання чисельним методом підтверджує відсутність нормальних до поверхні поділу середовищ компонент напруженості електричного поля і густини струму в електропровідному півпросторі – це ясно видно з прикладу розрахунку на рис. 2, б. Безпосереднім наслідком такого розподілу поля, як впливає з виразу (2), є існування нормальної компоненти напруженості електричного поля в діелектричному півпросторі на поверхні поділу середовищ, величина якої пропорційна частоті поля і не залежить від електропровідності й магнітної проникності. На рис. 3, а показано результати розрахунку аналітичним методом напруженості електричного поля у вигляді ліній  $E_z^+ = \text{const}$ , на рис. 3, б – розподіл напруженості поля  $E_z^+$  вздовж ліній на поверхні, паралельних площині кильця.

Наявність вертикальної компоненти напруженості електричного поля у випадку, коли контур зі струмом має просторову конфігурацію або є плоским контуром не компланарним до площини поділу середовищ, підтверджує висновок про нульові вертикальні складові струму в електропровідному середовищі. Разом з цим

дотичні до поверхні компоненти напруженості поля визначають такі важливі характеристики, як джоулева дисипація енергії при протіканні вихрових струмів поблизу поверхні, де вони мають найбільшу величину, а також вертикальна компонента вектора Умова-Пойнтінга, що визначає щільність потоку енергії електромагнітного поля в електропровідний півпростір. Тому розглянемо ще й дотичну компоненту напруженості електричного поля.

З виразу (1) випливає, що дотична складова обумовлена не тільки наявністю ділянок контура, які мають паралельний до поверхні поділу середовищ напрям струму і відображаються в (1), а й наявністю нормальних до поверхні ділянок контура, вплив яких визначається другим доданком у (1). Наявність в останньому випадку дотичної складової напруженості поля пояснюється необхідною появою поверхневого електричного заряду, який створює, зокрема, й складову поля, дотичну до поверхні поділу середовищ.

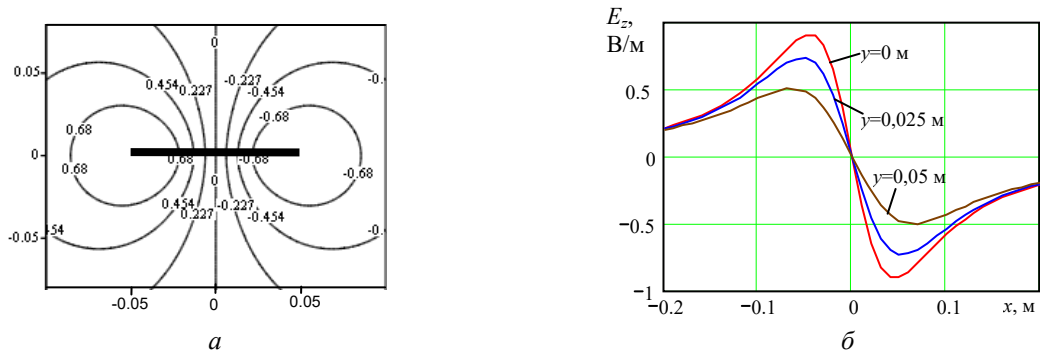


Рис. 3

Для розрахункової моделі у вигляді кругового контура зі струмом (рис. 1) будуть присутні обидві складові дотичної до поверхні напруженості електричного поля. Деякі результати дослідження розподілу поля на поверхні, які пояснюють його структуру, відображено на рис. 4 і 5. Рис. 4 відповідає розподілу напруженості електричного поля вздовж осі  $x$  безпосередньо під кільцем зі струмом при  $y = 0$  у площині, що паралельна поверхні поділу середовищ на глибині  $z = -0,01$  м. На цій лінії напруженість електричного поля і відповідно густина струму  $\vec{j} = \dot{E}_i \gamma = \dot{j}_x \mathbf{e}_x$  мають ненульову компоненту тільки вздовж осі  $x$ . На рис. 4, а показано розподіл відносного значення модуля комплексної амплітуди напруженості поля, нормованого за максимальною величиною поля, яка реалізується при  $x = 0$ . Рис. 4, б ілюструє розподіл вздовж того самого напрямку різниці фаз між струмом  $\dot{I}_0$  та напруженістю поля або густиною струму  $\dot{j}_x$ , що змінюються в часі за синусоїдальним законом. Видно, що зсув фаз не залишається незмінним. Тому максимальні значення напруженості поля в різних точках будуть мати місце в різні моменти часу.

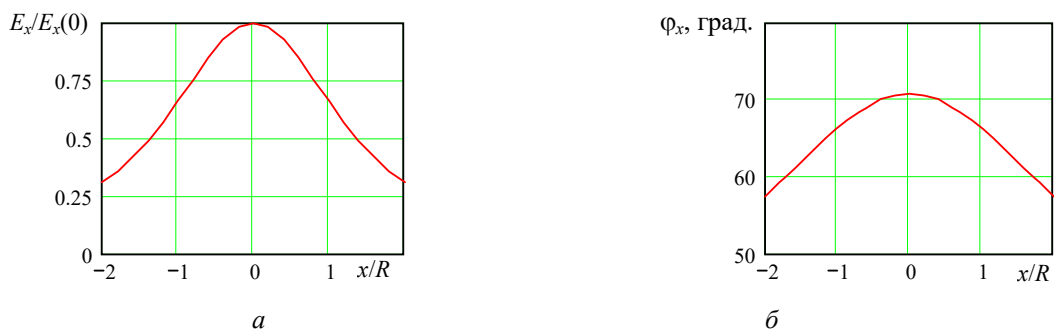


Рис. 4

На тій самій поверхні, але вздовж ліній, де координата  $y = 0,03$  м, напруженість поля і густина струму вже не спрямовані тільки вздовж осі  $x$  і мають дві компоненти  $\vec{j} = \gamma \dot{E}_i = \dot{j}_x \mathbf{e}_x + \dot{j}_y \mathbf{e}_y$ . На рис. 5 аналогічно попередньому рисунку показано відносні модулі обох компонент напруженості поля (рис. 5, а) та відповідні зсуви фаз для цих компонент поля відносно струму  $\dot{I}_0$ . Точками на рис. 5, а показано значення, отримані за допомогою обчислення в пакеті Comsol. Як видно, результати аналітичного і чисельного методів у цілому збігаються один з одним. Однак треба зазначити, що чисельним методом у даному випадку не вдалося досягти достатньої точності розрахунку, що пов'язано з необхідністю для тривимірної задачі застосування відносно грубої розрахункової сітки.

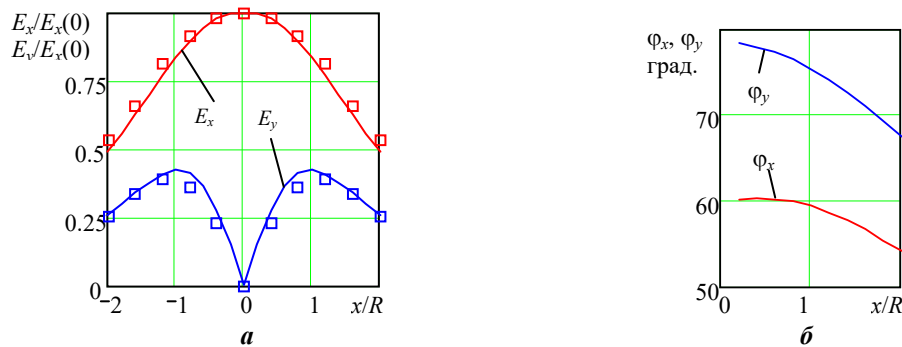


Рис. 5

Підсумовуючи отримані результати, можна зробити наступні висновки.

Безпосередні розрахунки в пакеті Comsol напруженості поля і густини струму в електропровідному середовищі для розглянутої модельної задачі тривимірного електромагнітного поля підтвердили висновок аналітичної теорії про нульове значення нормальних до межі поділу середовищ компонент напруженості електричного поля і густини струму в електропровідному півпросторі при плоскій граничній поверхні між діелектричним і електропровідним середовищами. Про це свідчить і збіг результатів розрахунку електричного поля в електропровідному середовищі, які відображають основні особливості формування електромагнітного поля.

1. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами. *Техн. электродинамика*. 1999. № 3. С. 3–9.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. Marcel Dekker Inc., 2003. 777 p.
3. Васецкий Ю.М., Дзюба К.К. Аналитический метод расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля тока, протекающего по контуру произвольной конфигурации вблизи электропроводного тела. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 5. С. 7-17. DOI: <https://doi.org/10.15407/techmed2017.05.007>

УДК 621.3.011

#### АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТЫ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВОГО КОНТУРА ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ

Ю.М. Васецкий, докт.техн.наук, И.Н. Кучерявая, докт.техн.наук, И.Л. Мазуренко, канд.техн.наук, К.К. Дзюба  
Институт электродинамики НАН Украины,  
пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина.

E-mail: [yuriv.vasetsky@gmail.com](mailto:yuriv.vasetsky@gmail.com)

Проведен анализ распределения трехмерного квазистационарного электромагнитного поля, которое формируется в системе пространственный контур с переменным током – электропроводное намагничивающееся полупространство. Расчеты выполнены двумя методами: аналитическим и численным с использованием пакета Comsol. Полученные данные показали соответствие результатов и подтвердили общий теоретический вывод о нулевом значении нормальной компоненты напряженности электрического поля и плотности тока в электропроводном полупространстве. Библ. 3, рис. 5.

**Ключевые слова:** трехмерное электромагнитное поле, вихревой ток, численный и аналитический методы.

#### ANALYTICAL AND NUMERICAL DETERMINATION OF THREE-DIMENSIONAL QUASI-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD OF ALTERNATING CURRENT CONTOUR NEAR THE CONDUCTING MEDIUM

Yu.M. Vasetsky, I.M. Kucheriava, I.L. Mazurenko, K.K. Dziuba  
Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,  
pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine.

E-mail: [yuriv.vasetsky@gmail.com](mailto:yuriv.vasetsky@gmail.com)

The distributions of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field formed in the system of "spatial contour with alternating current – conducting half-space" are analyzed. The calculations are carried out by two ways: analytically and numerically using program Comsol. The obtained data are in agreement with each other. They verify the theoretical result about zero normal components of electric field strength and current density in the conducting half-space. References 3, figures 5.

**Key words:** three-dimensional electromagnetic field, eddy current, numerical and analytical methods.

1. Kondratenko I.P., Rashchepkin A.P. Induction heating of moving strip current contours. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 1999. No 3. Pp. 3–9. (Rus)
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. Marcel Dekker Inc., 2003. 777 p.
3. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. An analytical calculation method of quasi-stationary three-dimensional electromagnetic field created by the arbitrary current contour that located near conducting body. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 5. Pp. 7-17. (Rus)  
DOI: <https://doi.org/10.15407/techmed2017.05.007>

Надійшла 02.03.2018  
Остаточний варіант 14.03.2018