

## АКТИВНИЙ СТРУМ ТА ПОВНА ПОТУЖНІСТЬ ТРИФАЗНИХ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОЖИВЛЕННЯ

М.Ю. Артеменко<sup>1\*</sup>, докт.техн.наук, Л.М. Батрак<sup>1\*\*</sup>, канд.техн.наук, С.Й. Поліщук<sup>2\*\*\*</sup>, канд.техн.наук

<sup>1</sup> – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», пр. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна,

<sup>2</sup> – Інститут електродинаміки НАН України,

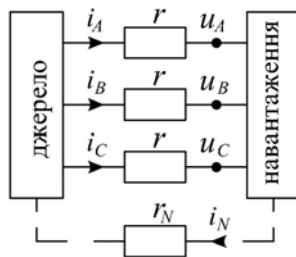
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна,

e-mail: [artemenko\\_m\\_ju@ukr.net](mailto:artemenko_m_ju@ukr.net)

Показано, що повна потужність трифазної системи живлення є середнім геометричним значенням потужностей втрат та резистивного короткого замикання джерела. Формула повної потужності Бухгольца впливає з цього визначення як окремий випадок за відсутності складових нульової послідовності струмів та напруг. Обґрунтовано узагальнену формулу для вперше введеного С.Фрізе поняття активного струму трифазної системи живлення, що передає задану енергію в навантаження з мінімальними втратами. Бібл. 12, рис. 1.

**Ключові слова:** активний струм, повна потужність, активний фільтр, складова нульової послідовності.

**Вступ.** Теорія потужності електричних систем неперервно еволюціонує протягом понад століття, беручи початок від робіт Штейнметца [1]. Суттєвою віхою на цьому шляху стало введення професором С. Фрізе поняття активного струму [2], який передає енергію у навантаження з мінімальними втратами у лінії передачі, що стало теоретичним базисом для побудови енергоефективних засобів силової фільтрації та поліпшення якості електричної енергії [3]. З розвитком елементної бази силових напівпровідникових приладів та сигнальних процесорів вдосконалювались як теоретичні засади побудови [4-6], так і стратегії керування активними фільтрами. Творчий доробок авторів у розвиток теорії потужності для вдосконалення стратегій керування засобами паралельної активної фільтрації узагальнений у [7]. Метою даної роботи є нове обґрунтування, уточнення та узагальнення базових понять теорії потужності трифазних кіл: активного струму та повної потужності.



**Активний струм трифазної системи живлення за концепцією Фрізе та формула повної потужності Бухгольца.** Розглядатимемо періодичний режим струмів та напруг трифазної системи живлення з резистивною моделлю опорів лінії передачі (рисунок). У архівній публікації Фрізе [2] активний струм трифазного кола визначається як трикоординатний вектор часових функцій (надалі активний струм Фрізе)

$$\mathbf{i}_F(t) = (P/U^2)\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

де  $\mathbf{u}(t) = \|u_A(t) \ u_B(t) \ u_C(t)\|^{\wedge}$  – вектор миттєвих значень фазних напруг;  $\wedge$  – знак транспонування;  $P = \frac{1}{T} \int_0^T [u_A(t)i_A(t) + u_B(t)i_B(t) + u_C(t)i_C(t)] dt$  – активна потужність;  $T$  – період напруг джерела;

$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [u_A^2(t) + u_B^2(t) + u_C^2(t)] dt$  – квадрат діючого значення вектора фазних напруг. Увівши

позначення скалярного добутку періодичних часових векторів  $\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^{\wedge}(t)\mathbf{i}(t) dt = \mathbf{u} \circ \mathbf{i}$ , покажемо, що активний

струм Фрізе (1) має мінімальне середньоквадратичне значення серед тих, що передають енергію у навантаження, яке при заданому векторі напруги  $\mathbf{u}(t)$  характеризується активною потужністю  $P = \mathbf{u} \circ \mathbf{i}$ . Для векторів  $\mathbf{u}(t)$  та  $\mathbf{i}(t)$ , що задовольняють це обмеження, запишемо нерівність Коші-Шварца [8]  $(\mathbf{u} \circ \mathbf{i})^2 \leq (\mathbf{u} \circ \mathbf{u})(\mathbf{i} \circ \mathbf{i})$ , з якої випливає, що

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i} \geq \frac{(\mathbf{u} \circ \mathbf{i})^2}{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} = \frac{P^2}{U^2}. \quad (2)$$

У правій частині нерівності (2) маємо квадрат норми активного струму Фрізе за формулою (1)

$$\mathbf{i}_F \circ \mathbf{i}_F = \left( \frac{P}{U^2} \right)^2 \times (\mathbf{u} \circ \mathbf{u}) = \frac{P^2}{U^2}. \quad (3)$$

Таким чином, з (2) та (3) випливає, що

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^{\wedge}(t)\mathbf{i}(t) dt \geq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}_F^{\wedge}(t)\mathbf{i}_F(t) dt = \mathbf{i}_F \circ \mathbf{i}_F,$$

що і потрібно було довести.

Знак рівності у виразі, що випливає з формули (2),  $(\mathbf{u} \circ \mathbf{i})_{\max} = \sqrt{(\mathbf{u} \circ \mathbf{u})(\mathbf{i} \circ \mathbf{i})}$  встановлює максимальне значення лівої частини – активної потужності при заданих напругах трифазного джерела та обмеженнях на середньоквадратичне значення лінійних струмів. Саме це максимальне значення активної потужності приймається за повну потужність [6]. Звідси випливає формула Бухгольца для повної потужності трифазних систем

$$S = P_{\max} = \sqrt{(\mathbf{u} \circ \mathbf{u})(\mathbf{i} \circ \mathbf{i})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^\wedge(t) \mathbf{u}(t) dt \times \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^\wedge(t) \mathbf{i}(t) dt} = UI. \quad (4)$$

Таким чином, активний струм Фрізе в формулі (1) при заданих активній потужності та напругах джерела мінімізує значення струмового множника повної потужності за формулою Бухгольца (4).

**Формула повної потужності трифазної чотирипровідної системи живлення та уточнене значення активного струму Фрізе.** Визначення повної потужності трифазної системи живлення розглядає обмеження, при якому максимізується активна потужність як допустиме значення потужності втрат, спричинених протіканням споживаних струмів [6]. Ця величина пропорційна квадрату середньоквадратичного значення споживаних струмів, що фігурує в формулі повної потужності Бухгольца (4), лише в трипровідній системі живлення за умови однакових величин активних опорів фазних проводів (рисунок). Особливо ця відмінність проявляється в трифазній чотирипровідній системі живлення, де активний опір нульового проводу  $r_N$ , як правило, відрізняється від активного опору  $r$  кожного лінійного проводу. Саме тому струмовий множник формули повної потужності трифазної чотирипровідної системи живлення за стандартом [9] пропорційний потужності втрат, що містить відношення зазначених опорів  $r / r_N$ . Обґрунтуємо формулу повної потужності для цього випадку.

Потужність втрат визначається виразом

$$\Delta P = \frac{1}{T} \int_0^T [i_A^2(t)r + i_B^2(t)r + i_C^2(t)r + i_N^2(t)r_N] dt, \quad (5)$$

де струм нейтралі може бути представлений у вигляді

$$i_N(t) = i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = \mathbf{i}^\wedge(t) \mathbf{j} = \mathbf{j}^\wedge \mathbf{i}(t); \mathbf{j}^\wedge = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

З урахуванням цього перетворимо вираз (5) до матрично-векторної форми наступним чином:

$$\Delta P = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{i}^\wedge(t) \mathbf{i}(t) r + \mathbf{i}^\wedge(t) \mathbf{j} \mathbf{j}^\wedge \mathbf{i}(t) r_N] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^\wedge(t) \mathbf{R} \mathbf{i}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}(t)]^\wedge \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}(t) dt = (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}),$$

де  $\mathbf{R} = r\mathbf{I} + r_N \mathbf{j} \mathbf{j}^\wedge = \mathbf{R}^\wedge$  – матриця опорів втрат лінії передачі;  $\mathbf{I}$  – одинична матриця розмірності  $3 \times 3$ .

Для векторів  $\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}(t)$  та  $\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}(t)$ , що задовольняють обмеження  $(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}) = P$ , запишемо нерівність Коші-Шварца

$$[(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i})]^2 \leq [(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u})] \times [(\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i})].$$

Звідси випливає нерівність для потужностей

$$(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}) = P \leq \sqrt{[(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u})] \times [(\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i})]} \quad (6)$$

та формула повної потужності чотирипровідної системи живлення, отримана у [10],

$$S = P_{\max} = \sqrt{[(\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u})] \times [(\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}) \circ (\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i})]} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^\wedge(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt \times \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^\wedge(t) \mathbf{R} \mathbf{i}(t) dt}. \quad (7)$$

Формула повної потужності (7) містить множник у вигляді саме потужності втрат, а не середньоквадратичного значення струмів, та справедлива для довільного співвідношення між активними опорами проводів. Для трипровідної системи при  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$   $\mathbf{R}^{-1} = r^{-1}\mathbf{I}$  формула (7) переходить у формулу повної потужності Бухгольца (4). Так само ці формули еквівалентні за відсутності складової нульової послідовності у вектора фазних напруг, коли  $\mathbf{j}^\wedge \mathbf{u}(t) = 0$ . У роботі [11] показано, що при певних співвідношеннях формула (7) еквівалентна стандартизованій формулі повної потужності [9] та усуває притаманну останній невизначеність.

Знак рівності в формулі (6) має місце за умови пропорційності векторів  $\mathbf{R}^{1/2} \mathbf{i}(t) = k \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{u}(t)$ , що еквівалентна рівності

$$\mathbf{i}(t) = k \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t). \quad (8)$$

З'ясуємо фізичний зміст вектора  $\mathbf{i}_0(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t)$ . Очевидно, це є вектор струмів резистивного короткого замикання джерела живлення, оскільки при замиканні затискачів навантаження він задовольняє рівнянню

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{R} \mathbf{i}_0(t) = \mathbf{0}.$$

При формуванні струму трифазного джерела активним фільтром за формулою (8) реалізується стратегія досягнення близького до одиниці значення коефіцієнта потужності з мінімальними втратами енергії [12], при якій величина коефіцієнта пропорційності визначається з умови нульової активної потужності компенсатора у вигляді

$$k = P / \left( \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^\wedge(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt \right).$$

Підстановка цього значення у формулу (8) дає уточнене значення активного струму за концепцією Фрізе у випадку чотирипровідної трифазної системи живлення

$$\mathbf{i}_A(t) = \frac{P}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^\wedge(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) = \frac{P}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^\wedge(t) \mathbf{i}_0(t) dt} \mathbf{i}_0(t). \quad (9)$$

За відсутності складової нульової послідовності у вектора фазних напруг чи у випадку трипровідної лінії передачі формули (1) та (9) еквівалентні. Вираз у знаменнику формули (9) та перший множник формули повної потужності (7) є потужністю резистивного короткого замикання трифазного джерела. Отже, активний струм довільної трифазної системи живлення є частиною вектора струму короткого замикання джерела, яка дорівнює відношенню потужності навантаження до потужності резистивного короткого замикання, а повна потужність є середнім геометричним значенням потужностей втрат та резистивного короткого замикання джерела.

### Висновки.

Активний струм трифазної системи, розрахований за концепцією Фрізе, мінімізує середньоквадратичне значення вектора струму, що передає у навантаження задану за період енергію при відомому векторі напруги. Це значення пропорційне потужності втрат лише у випадку трипровідної лінії передачі при однакових опорах лінійних проводів або у випадку чотирипровідної лінії передачі за відсутності складових нульової послідовності векторів струмів та напруг.

Повна потужність трифазної системи електроживлення є середнім геометричним значенням потужностей втрат та резистивного короткого замикання трифазного джерела. Формула Бухгольца впливає з цього визначення як окремий випадок за відсутності складових нульової послідовності струмів та напруг або за умови нульового опору нейтралі.

Узагальненою формулою для поняття активного струму трифазної системи живлення, що передає задану енергію в навантаження з мінімальними втратами, вперше введеною С.Фрізе, є частина вектора струму резистивного короткого замикання трифазного джерела, яка дорівнює відношенню потужності навантаження до потужності резистивного короткого замикання.

1. Steinmetz C.P. Lectures on Electrical Engineering. New York: Dover, 1897. 592 с.
2. Fryze S. Moc czynna, bierna i pozorna układu 3-fazowego o odkształconych przebiegach napięć fazowych i prądów przewodowych. Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki. PWN, Warszawa, Wrocław. 1966. Pp. 250-256.
3. Шидловский А.К., Кузнецов В.Г. Повышение качества энергии в электрических сетях. Киев: Наукова думка, 1985. 268 с.
4. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. Instantaneous power theory and applications to power conditioning. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2003. 379 p.
5. Czarnecki L.S. Currents' Physical Components (CPC) concept: a fundamental of Power Theory. *Przeгляд Elektrotechniczny*. 2008. Vol. 84. No 6. Pp. 28–37.
6. Emanuel A.E. Power definitions and the physical mechanism of power flow. John Wiley & Sons. IEEE Press, 2010. 274 p.
7. Artemenko M.Yu., Batrak L.M., Polishchuk S.Y. The power theory development to improve the SAF's control strategies. LAP Lambert Academic Publishing, 2017. 107 p.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Москва: Наука, 1978. 832 с.
9. IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal Non-sinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions. IEEE Standard 1459-2010, Sept. 2010.
10. Артеменко М.Ю. Повна потужність трифазної системи живлення в несинусоїдному режимі та енергоефективність засобів паралельної активної фільтрації. *Електроніка та зв'язок*. 2014. № 6. С. 38–47.
11. Артеменко М.Ю., Михальський В.М., Поліщук С.Й. Визначення повної потужності трифазних систем електроживлення як теоретична основа для побудови енергоефективних засобів паралельної активної фільтрації. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 2. С. 25 – 34.
12. Поліщук С.Й., Артеменко М.Ю., Михальський В.М., Шаповал І.А., Батрак Л.М. Стратегія керування паралельним активним фільтром з частковим послабленням складової нульової послідовності напруг трифазної чотирипровідної мережі. *Технічна електродинаміка*. 2013. № 3. С. 12-19.

М.Е. Артеменко<sup>1</sup>, докт.техн.наук, Л.Н. Батрак<sup>1</sup>, канд.техн.наук, С.И. Полищук<sup>2</sup>, канд.техн.наук

<sup>1</sup> – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт им. И. Сикорского», пр. Победы, 37, Киев, 03056, Украина, e-mail: [artemenko\\_m\\_ju@ukr.net](mailto:artemenko_m_ju@ukr.net)

<sup>2</sup> – Институт электродинамики НАН Украины, пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина,

*Показано, что полная мощность трехфазной системы электропитания является средним геометрическим значением мощностей потерь и резистивного короткого замыкания источника. Формула полной мощности Бухгольца следует из этого определения как частный случай при отсутствии составляющих нулевой последовательности токов и напряжений. Обосновано обобщенную формулу для впервые введенного профессором Фризе понятия активного тока трехфазной системы питания, который передает заданную энергию в нагрузку с минимальными потерями. Библи. 12, рис. 1.*

**Ключевые слова:** активный ток, полная мощность, активный фильтр, составляющая нулевой последовательности.

## ACTIVE CURRENT AND APPARENT POWER OF THREE-PHASE POWER SYSTEMS

M.Yu. Artemenko<sup>1</sup>, L.M. Batrak<sup>1</sup>, S.Y. Polishchuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv polytechnic institute", пр. Peremohy, 37, Kyiv, 03056, Ukraine, e-mail: [artemenko\\_m\\_ju@ukr.net](mailto:artemenko_m_ju@ukr.net)

<sup>2</sup> – Institute of Electrodynamics of National Academy of Sciences of Ukraine, пр. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine,

*It is shown that the apparent power of the three-phase power supply system is the average geometric value of the power losses and power of the source short-circuit. The Buchholz's formula of apparent power follows from this definition as a special case in the absence of zero sequence components of currents and voltages. The generalized formula for the first time introduced by Professor Fryze understanding of three-phase supply system active current that transfers the given energy to a load with minimal losses is grounded. References 12, figure 1.*

**Key words:** active current, apparent power, active filter, zero sequence component.

1. Steinmetz C.P. Lectures on Electrical Engineering. New York: Dover, 1897. 592 p.
2. Fryze S. Moc czynna, bierna i pozorna układu 3-fazowego o odkształconych przebiegach napięć fazowych i prądów przewodowych. Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki. PWN, Warszawa, Wrocław. 1966. Pp. 250-256.
3. Shidlovskii A.K., Kuznetsov V.G. Improving of the power quality in electrical networks. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 268 p. (Rus)
4. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. Instantaneous power theory and applications to power conditioning. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2003. 379 p.
5. Czarniecki L.S. Currents' Physical Components (CPC) concept: a fundamental of Power Theory. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2008. Vol. 84. No 6. Pp. 28–37.
6. Emanuel A.E. Power definitions and the physical mechanism of power flow. John Wiley & Sons. IEEE Press, 2010. 274 p.
7. Artemenko M.Yu., Batrak L.M., Polishchuk S.Y. The power theory development to improve the SAF's control strategies. LAP Lambert Academic Publishing, 2017. 107 p.
8. Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. Moskva: Nauka, 1978. 832 p. (Rus)
9. IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal Non-sinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions. IEEE Standard 1459-2010, Sept. 2010.
10. Artemenko M.Yu. Apparent power of three-phase power system in nonsinusoidal mode and energy effectiveness of shunt active filters. *Elektronika ta zviazok*. 2014. No 6. Pp. 38–47. (Ukr)
11. Artemenko M.Yu., Mykhalskyi V.M., Polishchuk S.Y. Definition of apparent power of three-phase power supply systems as a theoretical basis for development of energy-efficient shunt active filters. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 2. Pp. 25–34. (Ukr)
12. Polishchuk S.Y., Artemenko M.Yu., Mykhalskyi V.M., Batrak L.M., Shapoval I.A. Shunt active filter control strategy with partial decrease of zero-sequence voltage in three-phase four-wire system. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2013. No 3. Pp. 12–19. (Ukr)

Надійшла 05.03.2018  
Остаточний варіант 11.04.2018