

## ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ МОМЕНТИ УПРАВЛІННЯ ПРЕЦЕСІЙНИМ РУХОМ ТРИСТУПЕНЕВОЇ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МАШИНИ

**І.С. Петухов\***, докт. техн. наук  
Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна.  
E-mail: [igor\\_petu@ukr.net](mailto:igor_petu@ukr.net)

*Розглянуто основні відомі структури та принципи функціонування електричних машин з трьома ступенями свободи обертального руху ротора. Виділено тип таких машин, в яких можливо реалізувати високу частоту обертання ротора, що надає їм властивості гіростабілізації. Наведено структуру магнітної системи машини розглянутого типу та висунуто гіпотезу про адекватність виразів класичної аналітичної математичної моделі, але відмічено необхідність точного обчислення зосереджених параметрів, що її складають. На основі чисельної математичної моделі тривимірного магнітного поля проведено аналіз розподілу магнітної індукції, обчислено залежності складових електромагнітного моменту та потокозчеплення обмотки управління від кутів орієнтації осі ротора та кута його обертання. Зроблено висновок про адекватність залежностей, що складають класичну аналітичну математичну модель, за умов обчислення коефіцієнтів, що входять до неї, на основі результатів розрахунку тривимірного магнітного поля в активній зоні машини та оточуючому простору. Так амплітуду вектора потокозчеплення обмотки управління і коливань його складових для використання в моделі з зосередженими параметрами необхідно обчислювати за відповідними значеннями амплітуд складових електромагнітного моменту. Врахування результатів аналізу тривимірного поля демонструє значні зменшення швидкості керованої прецесії та зростання розмаху нутації. Бібл. 9, рис. 10, табл. 2.*

**Ключові слова:** триступенева електрична машина, гіростабілізований ротор, прецесія, електромагнітний момент, обмотка управління, потокозчеплення, точність.

**Вступ.** Електричні машини з триступеневим ротором (ЕМТР) являють окремий клас електро-механічних перетворювачів, вісь ротора яких здатна змінювати свій напрям у двох взаємно ортогональних кутових координатах. Для реалізації можливості трьох ступенів свободи руху виконавчого органу використовуються різноманітні електромагнітні структури. У роботі [1] досліджено ЕМТР, яка працює за принципом індукторної машини. Вона містить два поєднаних статори для обертального та хитального руху відповідно з системою з восьми обмоток для кожного з п'яти можливих фіксованих кутів нахилу осі ротора. Можна відмітити низку досліджень так званих двигунів сферичного типу, де для збудження магнітного поля використовується постійний магніт, а регулювання за трьома координатами реалізується за принципом крокового двигуна, що містить у своїй структурі обмоток 12 або 24 секції. Ці технічні рішення описано відповідно в роботах [2, 3]. Кожен зі згаданих принципів – принцип індукторної машини та принцип крокового двигуна – для своєї реалізації потребує досить складної конструкції магнітної системи і не може бути використаним у випадку, коли виникає необхідність швидкообертового руху ротора.

На відміну від вищерозглянутих типів ЕМТР набув певного розвитку тип таких машин, в яких можливо реалізувати високу частоту обертання ротора. Такі структури мають властивість гіроскопу – зберігати напрям осі обертання та змінювати цей напрям під дією зовнішніх моментів завдяки явищу прецесії. Ця властивість визначає сфери застосування ЕМТР в мобільних електромеханічних системах стабілізації, спостереження та стеження [4–6]. Відповідно, до цих систем висуваються вимоги точності та швидкості відпрацювання завдання системи управління. Конструктивно можливість змінювати напрям осі обертання досягається за рахунок мініатюрного карданового підвісу, розташованого у внутрішній порожнині ротора [4]. Така конструкція забезпечує невелику інерційність системи підвісу, що позитивно позначається на показниках пристрою. Платою за відмову від класичної кінематичної структури триступеневого гіроскопу є менші припустимі кути відхилення виконавчого пристрою, які обмежуються конструктивними можливостями карданового підвісу, розташованого в середині ротора.

Дослідженням ЕМТР, що мають властивості гіроскопу, присвячені роботи [4, 5], в яких проаналізовано структури таких машин та розроблено засади їхнього математичного моделювання. Од-

---

© Петухов І.С., 2023

\* ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1416-1174>

нією з ефективних структур в цих роботах визнано структуру з двома магнітопроводами, що механічно жорстко з'єднані і тому обертаються синхронно, причому систему збудження розташовано на зовнішньому магнітопроводі. Рішення з синхронним обертанням обох магнітопроводів дає змогу позбутися втрат на вихрові струми від обертального поля, внаслідок чого зменшуються паразитні моменти, які викликають небажану прецесію. Іншим рішенням, що надає можливість зменшити рівень полів розсіювання, є переніс магнітів системи збудження на зовнішній магнітопровід, що, у свою чергу, знижує втрати на вихрові струми у металевих елементах карданового підвісу, розташованого всередині внутрішнього магнітопроводу.

Розглянуті у роботах [4–7] математичні моделі багатоступеневих електричних машин засновані на класичних принципах, у відповідності до яких електричну машину представлено схемою з зосередженими параметрами у припущенні, що індуктивності та потокозчеплення змінюються з обертанням ротора за гармонічними законами. Це давало змогу отримати наближені аналітичні рішення або звести нестационарну задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь, в яких ЕМТР представлена зосередженими параметрами. Але в деяких випадках доводилося робити досить вільні припущення, коректність яких перевірялася вже на стадії макетування машини [4]. У зв'язку з появою нових програмних засобів та обчислювальних потужностей з'являється можливість оцінити адекватність розроблених математичних моделей або визначити область та межі їх придатності.

Електромеханічна математична модель будь-якої електричної машини чи виконавчого пристрою складається з рівнянь, що описують електромагнітне поле (рівнянь електричних кіл як граничний випадок), та рівнянь механіки, що моделюють переміщення рухомих частин. Результатом електромагнітної групи рівнянь є електромагнітні зусилля та моменти, які є вхідними даними для механічних рівнянь. В класичних (аналітичних) моделях ЕМТР спрощенню та лінеаризації підлягають як перша, так і друга складова математичної моделі [8]. Але якщо рівняння механіки є звичайними диференціальними рівняннями, то електромагнітна складова математичної моделі описує тривимірне магнітне поле, для чого використовуються рівняння в частинних похідних. Електромагнітна складова в значно більшій мірі враховує особливості конструкції магнітопроводів та обмоток, і дослідження меж її адекватності є найбільш нагальним питанням.

Рух ротора ЕМТР визначається двома, хоча і пов'язаними між собою, процесами, але такими, що дуже відрізняються за швидкістю та характером переміщень. Так обертальний рух ротора є добре відомим і вивченим процесом, який для ЕМТР відрізняється від класичних електричних машин тільки дещо незвичною формою обмоток. Проблеми, що постають у дослідженні в цьому питанні, є тільки забезпечення потрібного часу розгону і підтримання номінальної швидкості, яка буває досить великою задля досягнення потрібного рівня інерційної стабілізації ротора. В той же час прецесійний рух незрівнянно повільніший, і саме він визначає швидкість та точність відпрацювання сигналів управління. Поряд з небажаною прецесією від дії паразитних моментів шкідливим явищем є нутація. Вона призводить до нечіткої орієнтації осі обертання ротора та розмиття образу об'єкту спостереження. Зменшення нутації досягається збільшенням частоти обертання та за допомогою конструктивних демпфуючих засобів, які теж необхідно моделювати. Оскільки припустима амплітуда нутації різна для різних застосувань і для її зменшення застосовуються, відповідно, різні заходи, вивчення означеної проблеми є самостійним завданням.

Тому **метою дослідження** було обрано аналіз адекватності виразів для знаходження електромагнітних моментів управління в класичній математичній моделі ЕМТР на основі обчислення цих моментів за допомогою чисельного розрахунку тривимірного магнітного поля. Інакше кажучи, чи припустимо без значної втрати точності використовувати гармонічні залежності потокозчеплень (і як наслідок – індуктивностей) від кутів повороту та нахилу ротора.

За **об'єкт дослідження** обрано ідеалізовану структуру ЕМТР, магнітна система якої є симетричною відносно трьох площин, і в якій відсутні будь-які сили, що роблять механічну систему неконсервативною.

**Структура ЕМТР та математична модель.** На рис. 1 зображено поперечний переріз по площі симетрії полюсного поділу структури магнітної системи ЕМТР, що згадана вище [4]. Рухому частину цієї структури складають магнітопроводи: зовнішній (з магнітами, що намагнічені радіально) та внутрішній. Елементи статора представлено обмотками, що розташовані в проміжку між магнітопроводами. Задля отримання загальних результатів і відкидання вторинних факторів не будемо розглядати в структурі конструктивні елементи, що не входять до активної зони машини (карданів підвіс, тощо), та обмежимося розгляданням симетричної у трьох взаємно ортогональних площинах маг-

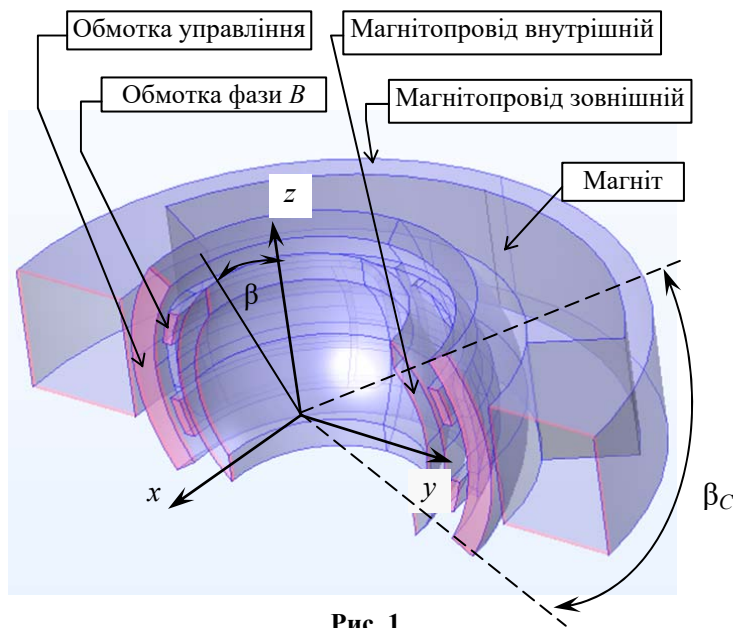


Рис. 1

нітної системи. Відмова розглядати згадані конструктивні елементи в аналізі магнітного поля обґрунтована тим, що карданів підвіс розташовано всередині внутрішнього магнітопроводу і значною мірою екранується їм від магнітного поля системи збудження та обмоток, а зовнішні елементи (зокрема корпус пристрою) виконуються, як правило, зі слабоелектропровідних або діелектричних матеріалів. На рис. 1 наведено систему координат  $(x, y, z)$ , пов'язану зі статором, а також вказано відлік куту нахилу осі обертання ротора  $\beta$  (кут нутації) та кутовий розмір обмотки управління  $\beta_c$ . Будемо вважати також, що карданів підвіс забезпечує обертання відносно всіх трьох осей координат. Таким чином, маємо механічну систему, ротор якої обертається навколо свого центру мас [1].

Поряд з розглядом симетричної

магнітної системи приймемо такі припущення.

1. Центр мас ротора ЕМТР є нерухомим.
2. Вплив обмоток обертання на момент обмотки управління відсутній.
3. На ротор діють тільки електромагнітні моменти управління, а будь-які моменти, що чинять механічний опір, не враховуються.

Для руху тіла відносно нерухомої точки осі системи координат є головними осями інерції, якщо вони лежать у площинах симетрії, і динамічні рівняння Ейлера мають вигляд [8]

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z = M_x; \\ I_{yy} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_z \omega_x = M_y; \\ I_{zz} \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y = M_z, \end{cases} \quad (1)$$

де  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  – моменти інерції тіла відносно відповідних осей;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – кутові швидкості відносно відповідних осей, точка над змінною позначає повну похідну за часом;  $M_x, M_y, M_z$  – електромагнітні моменти відносно відповідних осей. Розв'язання рівнянь (1) реалізовано в інтерфейсі «Multibody Dynamics» пакету «Comsol Multiphysics», в якому враховуються всі особливості, притаманні гіроскопічному ефекту, і де вхідними даними є геометрія тіла, властивості матеріалів та вищезгадані електромагнітні моменти, що входять до правої частини рівнянь (1).

В теорії ЕМТР [4, 5] визначення моментів базується на уявленні про гармонічний розподіл компонентів векторів магнітного поля вздовж кутової координати. Таке представлення дає змогу перейти до аналізу електромагнітної взаємодії у вигляді векторів, що зображають амплітуди поточкозчеплень та струму, або МРС обмотки. Також векторне представлення МРС і поточкозчеплень дає можливість, як згадувалося вище, здійснити перехід до зосереджених параметрів машини та звести задачу моделювання нестационарного електромагнітного процесу до системи звичайних диференціальних рівнянь. Для аналізу положення ротора будемо використовувати кути повороту системи координат в послідовності  $(Z-Y-Z)$  (послідовність осей, навколо яких відбувається обертання об'єкту). На рис. 2 показано магнітну систему (зовнішній магнітопровід ротора позначено контурами, внутрішній не показано) та обмотку управління, котра є нерухомою. Ротор зображено послідовно повернутим навколо осі  $z$  на кут прецесії  $\alpha \approx 45^\circ$ , його вісь нахилена на кут нутації  $\beta \approx 20^\circ$  навколо осі  $Y$ , та в цьому положенні ротор далі повернуто на кут  $\omega t = \gamma \approx 30^\circ$  (кут обертання). В результаті двох перших поворотів отримаємо систему координат  $(X, Y, Z)$ , що включає вісь обертання  $Z$ , а в результаті третього повороту – синхронну систему  $(D, Q, Z)$ , що пов'язана з ротором.

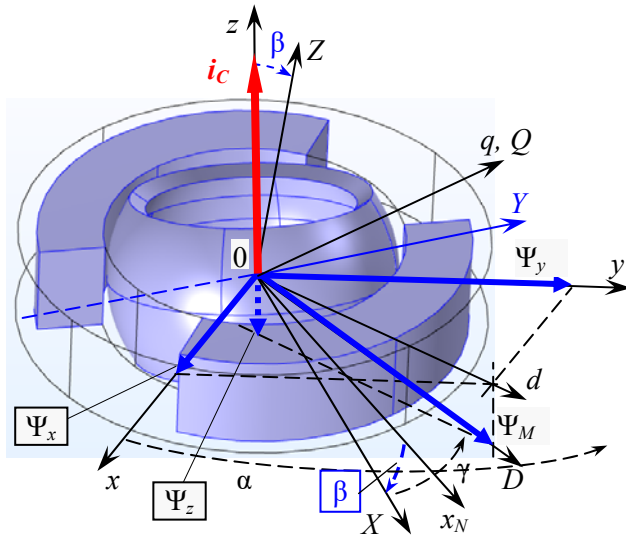


Рис. 2

менту. В результаті з (4) отримаємо компоненти електромагнітного моменту в системі координат статора

$$\begin{cases} M_x = -\Psi_y i_c \\ M_y = \Psi_x i_c \end{cases} \quad (5)$$

У роботі [1] представлені повні вирази складових електромагнітних моментів для загального випадку прецесійного руху ротора ЕМТР, обмотки якої живляться синусоїдальними струмами. Ці рівняння основані на припущенні про гармонійну залежність потокозчеплень від кутових координат, що визначають просторове положення ротора. Оскільки струми можуть бути будь-якої форми (наприклад, за умов живлення від інвертора), тобто значно відрізняться від синусоїдальних, забезпечення точності апроксимуючих виразів для складових електромагнітного моменту (5) визначається адекватністю кутових залежностей складових потокозчеплення.

У синхронній системі координат  $(D, Q, Z)$  вектор потокозчеплення має одну складову  $\Psi_D = (\Psi_D, 0, 0)$ . Вирази для складових потокозчеплення у системі координат  $(X, Y, Z)$  (на рис. 2 не показано) вочевидь мають вигляд

$$\begin{cases} \Psi_X = \Psi_D \cos \gamma \\ \Psi_Y = \Psi_D \sin \gamma \end{cases} \quad (6)$$

Щоб отримати складові потокозчеплення (3) в системі координат статора виконаємо перетворення складових (6) шляхом двох зворотних поворотів на кути  $\beta$  та  $\alpha$ . В результаті переходу складових потокозчеплення до системи координат  $(x_N, Y, z)$  у горизонтальній площині симетрії статора шляхом зворотного повороту системи координат відносно осі  $Y$  на кут  $\beta$  отримаємо

$$\begin{cases} \Psi_{x_N} = \Psi_D \cos \beta \cos \gamma \\ \Psi_Y = \Psi_D \sin \gamma \end{cases} \quad (7)$$

Подальший перехід до системи координат статора  $(x, y, z)$  шляхом зворотного повороту на кут  $\alpha$  у площині  $z=0$  дає значення для складових потокозчеплення у системі координат статора (рис. 2)

$$\begin{cases} \Psi_x = \Psi_{x_N} \cos \alpha - \Psi_Y \sin \alpha \\ \Psi_y = \Psi_{x_N} \sin \alpha + \Psi_Y \cos \alpha \end{cases} \quad (8)$$

що, нарешті, призводить до шуканих виразів складових потокозчеплення обмотки управління через амплітуду взаємного потокозчеплення з системою збудження

$$\begin{cases} \Psi_x = \Psi_D (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) \\ \Psi_y = \Psi_D (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) \end{cases} \quad (9)$$

В системі координат статора вектор струму обмотки управління спрямовано вздовж осі  $z$

$$\mathbf{i} = (0, 0, i_c), \quad (2)$$

а вектор  $\Psi_D$  взаємного потокозчеплення намагніченого ротора з обмоткою управління спрямовано вздовж осі  $D$  (вісь поля магнітів, рис. 2)

$$\Psi_D = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z). \quad (3)$$

Електромагнітний момент, прикладений до статора, представимо як детермінант векторного добутку векторів потокозчеплення та струму

$$\mathbf{M} = -\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \\ 0 & 0 & i_c \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Оскільки ми знехтували впливом обмоток обертання та в магнітопроводах відсутні вихрові струми, векторний добуток (4) є єдиним виразом для обчислення електромагнітного моменту.

Кут  $\alpha$  змінюється в процесі прецесійного руху ротора, але для визначення адекватності залежностей (9) його можна покласти нульовим, оскільки він визначає лише напрям нахилу осі обертання ротора та, за визначенням, викликає лише гармонічну зміну складових потокозчеплення. Кути ж  $\beta$  та  $\gamma$  визначають взаємне положення магнітів системи збудження та обмотки управління і впливають на розподіл магнітного поля. Зазначимо, що внаслідок обнуління кута прецесії  $\alpha$  вісь  $x_N$  співпадає з віссю  $x$ . Також співпадають осі  $y$  та  $Y$ . Тому *надалі замість  $x_N$  будемо використовувати позначення  $x$* . Проклавши кут  $\alpha$  нульовим, отримаємо

$$\begin{aligned}\Psi_x &= \Psi_D \cos\beta \cos\gamma \\ \Psi_y &= \Psi_D \sin\gamma\end{aligned}\quad (10)$$

Нарешті, вирази (1) для складових моменту, що діє на статор, будуть виглядати таким чином:

$$\begin{aligned}M_x &= -\Psi_D i_C \sin\gamma \\ M_y &= \Psi_D i_C \cos\beta \cos\gamma\end{aligned}\quad (11)$$

Хоча залежності (11) прості для аналізу і за умов нульового кута нутації є синусоїдами, вони, як буде показано нижче, все ж таки не завжди є зручними для аналізу похибок визначення електромагнітних моментів. Більш зручними і такими, що дають змогу підвищити точність моделювання, є криві складових моменту в системі координат  $(d, q, z)$ , що обертається навколо осі  $z$  з кутовою швидкістю ротора, як і система  $(D, Q, Z)$ . Для цього вирази (11) зліва помножимо на матрицю повороту на кут  $-\gamma$

$$\begin{bmatrix} M_d \\ M_q \end{bmatrix} = \Psi_D i_C \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\beta \cos\gamma \end{bmatrix} = \Psi_D i_C \begin{bmatrix} -\sin\gamma \cos\gamma + \cos\beta \cos\gamma \sin\gamma \\ \sin^2\gamma + \cos\beta \cos^2\gamma \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Легко побачити, що вирази для складових вектора потокозчеплень (10), помножені на матрицю повороту в системі координат статора  $(d, q, z)$ , мають симетричний до (12) вигляд, а саме:

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \Psi_D \begin{bmatrix} \cos\beta \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \\ -\cos\beta \sin\gamma \cos\gamma + \sin\gamma \cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Причина зручності для аналізу виразів (12), (13) полягає в тому, що за умов нульового кута  $\beta$  одна складова є постійною, а друга – дорівнює нулю. Це дає змогу оцінити в цих залежностях похибки чисельного розрахунку.

В теорії електричних машин традиційно прийнято визначати потокозчеплення обмоток, електромагнітний момент та потужність за значенням

першої гармоніки нормальної складової магнітної індукції вздовж середньої лінії повітряного проміжку. У безпазовій конструкції обмотки розташовано безпосередньо у повітряному проміжку, і тому цілком резонно задля досягнення точності обчислення потокозчеплення визначати магнітну індукцію уздовж середньої лінії відповідної обмотки.

Розрахункове дослідження проводилося для фізичної моделі, дані якої наведено у табл. 1. Результати розрахунку розподілу модулю магнітної індукції  $B(\phi_R)$  вздовж полюсного поділу в площині симетрії  $z=0$  досліджуваної структури ЕМТР для декількох матеріалів постійного магніту наведено на рис. 3. Там же наведені результати п'яти тестових вимірювань максимального значення індукції в зоні розташування обмотки управління. Задля візуальної оцінки вмісту гармонічних складових на рис. 3 наведено косинусоїдальну криву. З огляду на розподіл магнітної індукції можна заключити, що в нормальній складовій присутній помітний внесок непарних гармонік. Чи впливають вони на потокозчеплення обмотки та в підсумку на електромагнітний момент можна за-

**Таблиця 1**

Параметр	Розмір відносно полюсного поділу
Повний повітряний проміжок між магнітопроводами 4,5 мм	0,104
Товщина шару обмоток 3,5 мм	0,081
Висота ярма внутрішнього магнітопроводу 1,5 мм	0,035
Висота ярма зовнішнього магнітопроводу 2 мм	0,045
Висота магніту 7 мм	0,162
Кутовий розмір магніту (площина $X, Y$ )	120°
Кутовий розмір обмотки управління (площина $X, Z$ )	70°
Кутовий крок секції обмотки обертання (площина $X, Y$ )	154°
Кутлова ширина активної частини секції обмотки обертання	13°
Співвідношення товщини шарів обмоток управління і обертання	8/3
Коефіцієнт заповнення обмоток міддю	0,34
Матеріал постійного магніту	КС37А
Повітряний проміжок між рухомими і нерухомими частинами 0,5 мм	0,0116

ключити по чисельному розрахунку потокозчеплень обмотки, що входять до співвідношень (5).

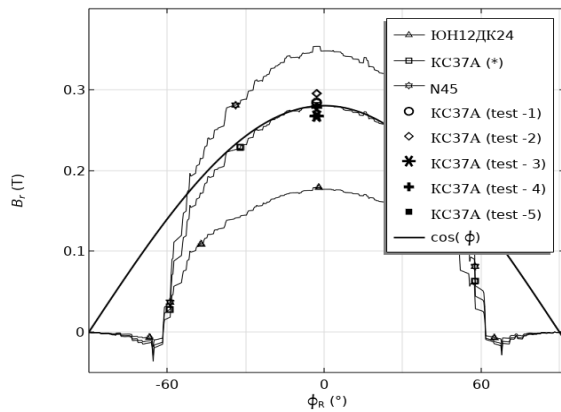


Рис. 3

ніть потокозчеплення. Дійсно, змінна частина енергії магнітного поля збудження  $W_{MC}$ , що зчеплене з обмоткою управління і змінюється з нахилом ротора, визначається виразом

$$W_{MC}(\beta) = \Psi_d(\beta) i_C. \quad (14)$$

А електромагнітний момент визначається через похідну по координаті, якою в даному випадку є кут  $\beta$ , тобто

$$M_q = -\frac{\partial W_{MC}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Psi_d(\beta)}{\partial \beta} i_C. \quad (15)$$

Таким чином, апроксимація залежності потокозчеплення від кута  $\beta$  повинна забезпечувати точність у визначенні похідної (15) в околі точки  $\beta=0$ . Тому апроксимуюча крива не є першою гармонікою, і амплітуда її ніяк не пов'язана з екстремумом дійсної залежності  $\Psi_d(\beta)$ . Причиною є те, що обмотка управління та обидва магнітопроводи – зовнішній та внутрішній – мають скінчені кутові розміри (рис. 1, табл. 1).

Пошук апроксимуючої синусоїди, а фактично її амплітуди, є тривіальною задачею. Наприклад, у відповідності до гіпотези про синусоїдальну залежність потокозчеплення від кута  $\beta$  (рис. 4) залежність похідної потокозчеплення у формулі (15) буде косинусоїдальною. З цього витікає, що розрахункове значення максимального моменту  $M_{q,max}(\beta=0)$  треба поділити на амплітуду струму обмотки управління (який природно задати постійним під час розрахунку)

$$\Psi_{d,max} = M_{q,max} / i_C. \quad (16)$$

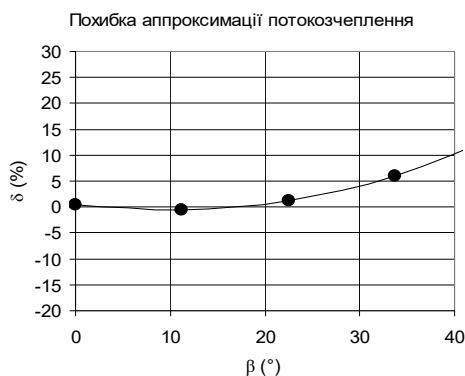


Рис. 5

Відмітимо тільки, що відносна похибка такої апроксимації синусоїдою з амплітудою 150% від реального максимуму потокозчеплення (рис. 4) невелика і для конкретної геометрії не перевищує 4% за умов кута відхилення ротора до  $30^\circ$ , що показано на рис. 5.

Обчислення електромагнітного моменту, що входить до формули (16), в інтерфейсі «Magnetic fields» виконується інтегруванням відповідних електромагнітних зусиль. В даній безпазовій структурі ЕМТР для обчислення електромагнітних зусиль доцільно використовувати формулу Лоренса [9]

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (15)$$

**Результати моделювання.** Як вже відмічалось, внаслідок відсутності вихрових струмів в магнітопроводі визначення потокозчеплень можна проводити на основі розрахунку статичного магнітного поля. Моделювання виконувалося в середовищі пакету «COMSOL Multiphysics» у інтерфейсі «Magnetic fields». На рис. 4 маркованими кривими наведено залежності розрахункового значення потокозчеплення обмотки управління  $\Psi_d$  від кута  $\beta$  та його апроксимації синусоїдою  $\approx \Psi_d$  за умови обертання навколо осі у (Y). Чорним прямокутником показано реально досяжний діапазон кутів нутації для конструкції ЕМТР, що використовує карданів підвіс у внутрішній порожнині ротора. І саме в цьому діапазоні апроксимуюча крива повинна з найбільшою точністю відображати кутову залежність потокозчеплення.

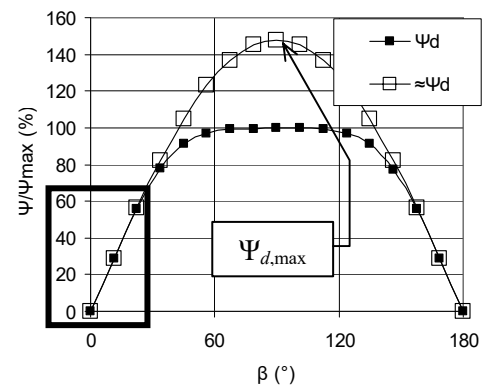


Рис. 4



де  $\mathbf{J}$  – вектор густини струму;  $\mathbf{B}$  – вектор магнітної індукції. В свою чергу компоненти електромагнітного моменту в системі координат статора ( $x, y, z$ ) можна отримати інтегруванням просторових складових електромагнітної сили  $f_{x,y,z}$  по об'єму  $V_C$  обмотки управління за виразами

$$\begin{cases} M_x = \int_{V_C} (f_x \cdot z - f_z \cdot x) dV \\ M_y = \int_{V_C} (-f_y \cdot z + f_z \cdot y) dV \end{cases} \quad (16)$$

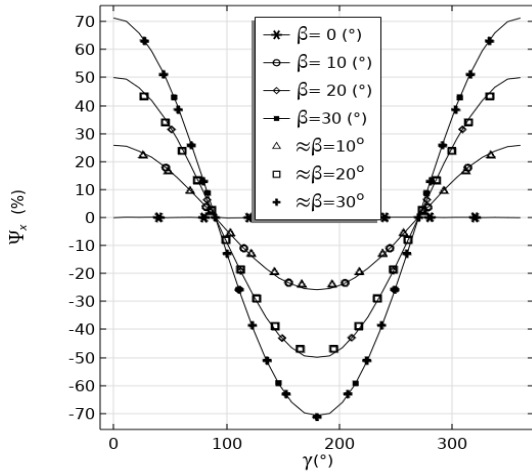


Рис. 6

Розглянемо придатність апроксимації залежності складової  $\Psi_x$  потокозчеплення обмотки управління від кута обертання  $\gamma$  гармонічною функцією. На рис. 6 представлено залежності потокозчеплення цієї обмотки від кута обертання для чотирьох значень кута нахилу ротора  $\beta$  ( $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ ). Там же маркерами позначено відповідні апроксимуючі залежності. Близькість наведених залежностей до синусоїдальної не викликає сумнівів. Апроксимація виконувалася простим підбором амплітуди для кута  $\beta = 30^\circ$ , а для кутів  $10^\circ$  та  $20^\circ$  криві обчислювалися пропорційним перерахунком. Додамо, що амплітуди кривих на рис. 6 співпадають з даними кривої на рис. 4, де відповідну зону робочих кутів нутації помічено чорним прямокутником. Аналогічний характер, вочевидь, мають залежності  $\Psi_y(\gamma)$ . Таким чином підтверджено, що в робочому діапазоні кутів нахилу ротора  $\beta$  залежності потокозчеплень обмотки управління від кута

обертання  $\gamma$  близькі до синусоїдальних.

Графіки складових моменту та потокозчеплення в системі координат ( $d, q, z$ ), обчислені в пакеті MatLab відповідно до виразів (12), (13), наведено на рис. 7. Найбільш наглядно поведінку графіків можна простежити за характером кривих для складової моменту  $M_q$ . Ця складова спадає до мінімуму за умов кута обертання  $\gamma = (0^\circ, 180^\circ)$ , коли вісь  $D$  ротора нахилена на максимальний кут (він дорівнює куту  $\beta$ ), і відновлює максимальне значення, коли кут  $\gamma$  є кратним до  $90^\circ$ , а вісь  $D$  перетинає площину  $z = 0$ .

Співвідношення (12), (13) отримані у припущенні про гармонічний розподіл магнітного поля. Але на розподіл поля впливають геометричні особливості структури магнітопроводів та обмоток, зокрема обмежені кутові розміри цих елементів (табл. 1). На рис. 8 наведено аналогічні графіки складової моменту  $M_q$  для ряду значень кутів нутації та складової  $M_d$  (для значень кута нутації  $\beta = 30^\circ, 40^\circ$ ), обчислені в інтерфейсі «Magnetic fields» середовища «COMSOL Metaphysics» (точки помічено

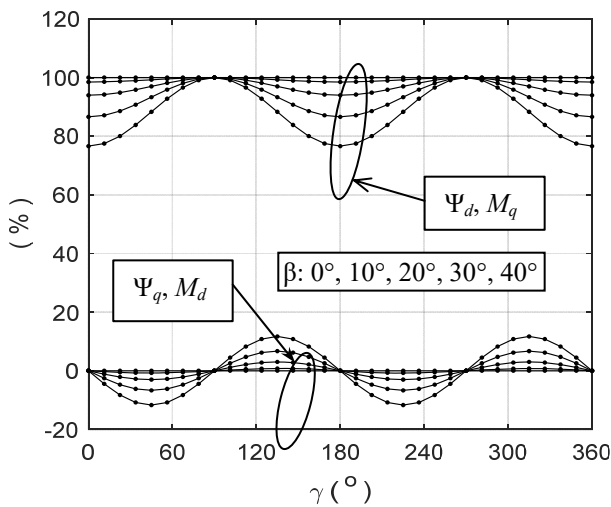


Рис. 7

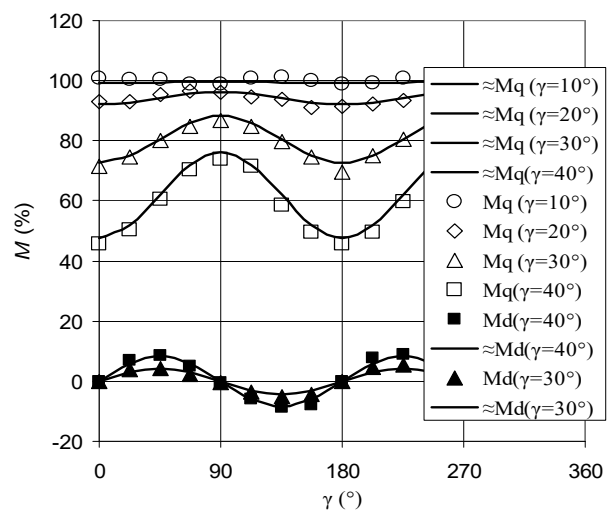


Рис. 8

маркерами), та апроксимовані залежності, що зображені гладкими кривими. Всі залежності є подібними до відповідних аналітичних залежностей (рис. 7), побудованих за виразами (12), містять другу

гармонічну складову, але постійна складова та екстремуми зменшуються набагато швидше із зростанням кута  $\beta$ .

Для апроксимуючої функції отриманих залежностей було обрано косинусоїду з постійною складовою. Постійна складова  $M_{q,\text{mid}}$  та амплітуда змінної складової  $M_{q,2}$  обчислювалися через екстремуми  $M_q(\beta, 90^\circ)$  та  $M_q(\beta, 0^\circ)$  відповідно за формулами

$$M_{q,\text{mid}}(\beta) = (M_q(\beta, 90^\circ) + M_q(\beta, 0^\circ)) / 2; \quad M_{q,2}(\beta) = (M_q(\beta, 90^\circ) - M_q(\beta, 0^\circ)) / 2. \quad (17), (18)$$

Таким чином, залежність складової моменту вздовж осі  $q$  апроксимувалася за формулою

$$M_q(\beta, \gamma) = M_{q,\text{mid}}(\beta) - M_{q,2}(\beta) \cos 2\gamma. \quad (19)$$

Компонента моменту  $M_d$  не має постійної складової (рис. 8) і для її апроксимації досить визначити амплітуду синусоїди подвійної частоти. Оскільки компонента електромагнітного моменту  $M_q$  має найбільший вплив на прецесію ротора розглянемо можливий варіант обчислення апроксимуючих функцій. Виходячи з прийнятого вигляду (19) апроксимуючої функції, для її побудови потрібні значення екстремумів  $M_q(\beta, 0^\circ)$  та  $M_q(\beta, 90^\circ)$  у виразах (17), (18).

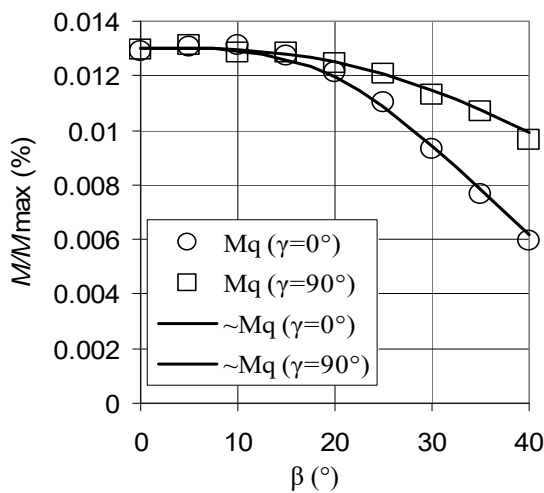


Рис. 9

Таблиця 2

	$\beta_{05}$	$M$
$M_q(0^\circ)$	39	3,7
$M_q(90^\circ)$	59	3

обертання з кутових координат  $\alpha=180^\circ$ ,  $\beta=20^\circ$  в напрямку нульового значення кута нутації. Значна величина початкового кута нутації обрана, щоб «потрапити» у зону найбільшої присутності другої гармоніки у складових електромагнітного моменту.

Оскільки рух осі ротора необхідно здійснювати у площині  $y = 0$ , треба забезпечити позитивний прецесійний момент по осі  $0y$ . Для цього прикладався позитивний електромагнітний момент по осі  $0x$ . Проаналізовано два випадки: 1) складова моменту  $M_q$  пульсує відповідно до аналітичного рішення (рис. 7); 2) ця складова пульсує відповідно до апроксимації чисельного рішення (рис. 8). Складовою моменту  $M_d$  нехтувалося, оскільки її амплітуда для даного значення кута нутації  $\beta$  складає менше десяти відсотків від постійної складової моменту  $M_q$  (рис. 8).

Результати розрахунку, що виконувався в інтерфейсі «Multibody dynamics», наведено на рис. 10, де годограф для чисельного розрахунку за апроксимованими залежностями (рис. 8) позначено  $M_q = \text{var}$  (верхній графік), а нижній графік, позначений  $M_q = \text{analytic}$ , відповідає використанню аналітичних залежностей (12) (рис. 7). Для оцінки швидкості процесу прецесії, а також амплітуди нутації, реєструвався годограф осі ротора  $Z$  за період часу 0,3 с від моменту старту.

Порівняння отриманих кривих показує, що за умов урахування результатів чисельного розрахунку залежності електромагнітного моменту від кута нутації  $\beta$  процес прецесії протікає приблизно на 15 відсотків повільніше, а розмах (подвійна амплітуда) нутації на 30% більший. Цей факт свідчить про меншу, ніж передбачає класична аналітична модель, швидкість відпрацювання збурення та меншу чіткість зображення об'єкту спостереження. Експеримент на фізичній моделі процесу аретування ротора дає стартове значення максимальної амплітуди нутації  $0,050^\circ$ , що близько до відповідної амплітуди (рис. 10, верхній графік), отриманої в чисельному експерименті. Таким чином, підвищення

На рис. 9 наведено розрахункові дані, обчислені в середовищі «COMSOL Multiphysics», що позначені маркером, та криві, що апроксимують залежності екстремумів складової моменту  $M_q(\gamma)$  (рис. 8). Для апроксимуючої функції обох екстремумів було обрано функцію Фр'юліха (Fröhlich)

$$M_{q,\text{extr}}(\beta) = M_q(0) / \left( 1 + \left( \frac{\beta}{\beta_{05}} \right)^m \right), \quad (20)$$

де коефіцієнт  $\beta_{05}$  визначається за абсцисою половинного значення шуканої функції; коефіцієнт  $m$  визначає крутість спадання функції. Значення даних коефіцієнтів для шуканих залежностей екстремумів від кута  $\beta$  (рис. 9) наведено в табл. 2.

**Чисельний експеримент.** Для перевірки впливу розглянутих вище коливань електромагнітного моменту з подвійною (до частоти обертання) частотою було проведено розрахунок динамічного процесу. Розглянуто старт корекції напрямку осі



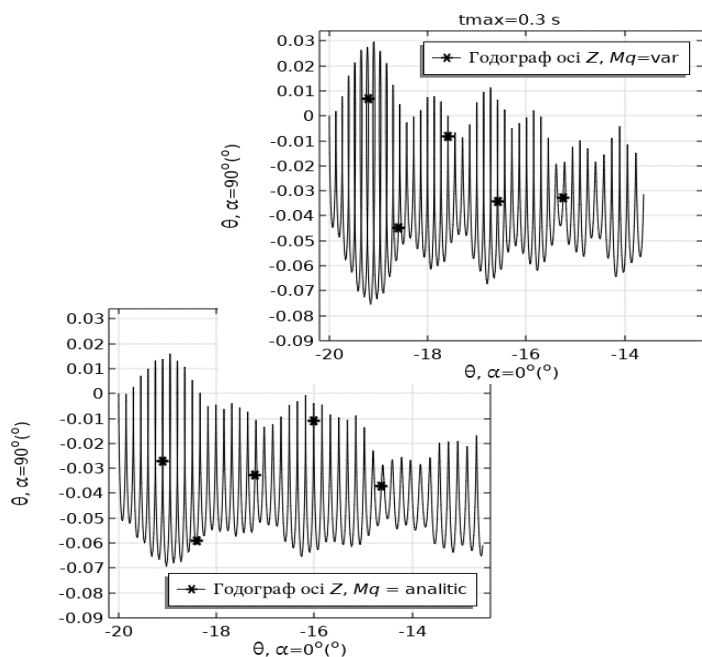


Рис. 10

льного струму обмотки управління. За значенням цієї амплітуди можна обчислювати компоненти потокозчеплення і індуктивність обмотки управління для використання у моделі з зосередженими параметрами.

3) Чисельне моделювання на основі аналізу тривимірного магнітного поля дає можливість з урахуванням конструктивних особливостей активної зони ЕМТР з більшою точністю визначити залежність середнього значення та амплітуди пульсацій електромагнітного моменту від кута нутації. За умов значної величини кута нутації (близько  $30^\circ$ ) використання апроксимованих залежностей складових електромагнітного моменту від кутів нутації та обертання, отриманих на основі чисельного розрахунку, замість їхніх аналітичних аналогів дає меншу на 15% швидкість прецесії та більший на 30% розмах нутації.

Роботу виконано за держбюджетною темою «Розробити наукові засади та принципи побудови керованих  $n$ -степеневих магнітоелектричних систем з екстремальними характеристиками» («Екстремум»), КПКВК 6541030.

1. Wenqiang Tao, Guoli Li, Lufeng Ju, Rui Zhou, Cungang Hu. Design and Analysis of a Novel Spherical Motor Based on the Principle of Reluctance. *IEEE International Power Electronics and Application Conference and Exposition*. Shenzhen, China, 04-07 November 2018. Pp. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.1109/PEAC.2018.8590483>.

2. Lee H.J., Park H.J., Ryu G.H., Oh S.Y., Lee J. Performance Improvement of Operating Three-Degree-of-Freedom Spherical Permanent-Magnet Motor. *IEEE Transactions on magnetics*. 2012. Vol. 48. No 11. Pp. 4654–4657. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMAG.2012.2200470>.

3. Yan Wen, Guoli Li, Qunjing Wang, Xiwen Guo, Wenping Cao. Modeling and Analysis of Permanent Magnet Spherical Motors by a Multitask Gaussian Process Method and Finite Element Method for Output Torque. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2021. Vol. 68. Issue 9. Pp. 8540–8549. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3018078>.

4. Антонов А. Е. Электрические машины магнитоэлектрического типа. Київ: Інститут електродинаміки НАН України, 2011. 216 с.

5. Милых А.Н., Барабанов В.А., Двойных В.В. Трехстепенные электрические машины. Київ: Наукова думка, 1979. 308 с.

6. Милых А.Н., Барабанов В.А., Лавриненко В.А., Киреев В.Г. Уравнения трехстепенных электрических машин с постоянными магнитами *Техническая электродинамика*. 1981. № 2. С. 65–70.

7. Соловьев А.Э., Теплова В.А. Особенности движения трехстепенной электрической машины с радиально намагниченным ротором и дополнительными статорными обмотками. *Известия ТулГУ. Технические науки. Электротехника*. 2016. Вып. 7. Ч. 1. С. 175–183.

адекватності математичної моделі – більш точне врахування коливань електромагнітного моменту (рис. 8) – дало змогу отримати більшу точність моделювання.

**Висновки.** 1) В робочих діапазонах кута відхилення осі ротора від осі статора (до  $30^\circ$ ) залежності компонент електромагнітного моменту та потокозчеплення обмотки управління від кутових координат можна з достатньою точністю апроксимувати гармонічними функціями. Це відповідає класичній аналітичній моделі. Але визначення амплітуд згаданих компонент необхідно проводити на основі чисельного моделювання тривимірного магнітного поля.

2) Амплітуду гармонічної функції, що апроксимує залежність потокозчеплення обмотки управління від кута нутації в класичній аналітичній моделі необхідно розраховувати тільки за максимальним значенням електромагнітного моменту по поперечній осі у відповідності до формули (14) за умов нульового кута нутації та реального струму обмотки управління.

8. Петрищев В.Ф. Элементы теории гироскопа и его применение для управления космическими аппаратами. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т., 2004. 68 с.

9. Comsol multiphysics modeling and simulation software. URL: <http://www.comsol.com/> (дата доступу 29.06.2022).

## ELECTROMAGNETIC MOMENTS OF CONTROLLING THE PRECESSION MOVEMENT OF A THREE-DEGREE-OF-FREEDOM ELECTRIC MACHINE

**I.S. Petukhov**

**Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,  
pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine.**

**E-mail: [petuhov@ied.org.ua](mailto:petuhov@ied.org.ua).**

*The main known structures and principles of functioning of electric machines with three degrees of freedom of rotational motion of the rotor are considered. The type of such machines in which it is possible to realize a high frequency of the rotor rotation is highlighted, which gives it the property of gyro-stabilization. The structure of the magnetic system of the machine of this type is presented and a hypothesis is put forward about the adequacy of the expressions of the classical analytical mathematical model, but the need for accurate calculation of the concentrated parameters that make up it. The distribution of magnetic flux density is analyzed based on a numerical mathematical model of a three-dimensional magnetic field. The dependences of electromagnetic torque components and flux linkages on the rotor axis orientation and the angle of its rotation are calculated. It was concluded that the classical analytical mathematical model are adequate provided that the calculating of its coefficients is based on the results of the modeling of three-dimensional magnetic field in the machine active volume and the surrounding space. It is underlined that, the amplitude of the flux linkage vector of the control winding and the fluctuations of the vector components to use in lumped parameter model must be calculated from the corresponding values of the electromagnetic torque components. Taking into account the results of the analysis of the three-dimensional field demonstrates a significant decrease in the speed of controlled precession and an increase in the amplitude of nutation. References 9, figures 10, tables 2.*

**Key words:** three-degree-of-freedom electric machine, gyro-stabilized rotor, precession, electromagnetic moment, control winding, flux linkage, precision.

1. Wenqiang Tao, Guoli Li, Lufeng Ju, Rui Zhou, Cungang Hu. Design and Analysis of a Novel Spherical Motor Based on the Principle of Reluctance. *IEEE International Power Electronics and Application Conference and Exposition*. Shenzhen, China, 04-07 November 2018. Pp. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.1109/PEAC.2018.8590483>.

2. Lee H.J., Park H.J., Ryu G.H., Oh S.Y., Lee J. Performance Improvement of Operating Three-Degree-of-Freedom Spherical Permanent-Magnet Motor. *IEEE Transactions on magnetics*. 2012. Vol. 48. No 11. Pp. 4654–4657. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMAG.2012.2200470>.

3. Yan Wen, Guoli Li, Qunjing Wang, Xiwen Guo, Wenping Cao. Modeling and Analysis of Permanent Magnet Spherical Motors by a Multitask Gaussian Process Method and Finite Element Method for Output Torque. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2021. Vol. 68. Issue 9. Pp. 8540–8549. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3018078>.

4. Antonov A.E. Electric machines of magnetoelectric type. Kyiv: Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine, 2011. 216 p. (Rus)

5. Miliakh A.N., Barabanov V.A., Dvoynikh V.V. Three-degree-of-freedom electric machines. Kyiv: Naukova Dumka, 1979. 308 p. (Rus)

6. Miliakh A.N., Barabanov V.A., Lavrinenko V.A., Kireyev V.G. Equations of three-degree-of-freedom permanent magnet electric machines *Tekhnicheskaiia elektrodynamika*. 1981. No 2. Pp. 65–70. (Rus)

7. Soloviev A.E., Teplova V.A. Features of the movement of a three-stage electric machine with a radially magnetized rotor and additional stator windings. *Izvestiia TulGU. Tekhnicheskie nauki. Elektrotekhnika*. 2016. Vyp. 7. Part 1. Pp. 175–183. (Rus)

8. Petrishchev V.F. Elements of the gyroscope theory and its application for spacecraft control. Samara: Samarskii gosudarstvennyi aerokosmicheskii universitet, 2004. 68 p.

9. Comsol multiphysics modeling and simulation software. URL: <http://www.comsol.com/> (accessed at 29.06.2022).

Надійшла 15.12.2022  
Остаточний варіант 16.05.2023