

УДК 621.3.011

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ТРЕХМЕРНОГО  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА, ПРОТЕКАЮЩЕГО ПО КОНТУРУ  
ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА**

**Ю.М. Васецкий**, докт. техн. наук, **К.К. Дзюба**

**Институт электродинамики НАН Украины,**

**пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина.**

**E-mail:** [yuriy.vasetsky@gmail.com](mailto:yuriy.vasetsky@gmail.com)

*На основе аналитического решения задачи о поле излучающего гармонического токового диполя развит аналитический метод расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля, создаваемого произвольным пространственным токовым контуром, расположенным вблизи электропроводного тела с плоской поверхностью. Решение с учетом замкнутости контуров с током найдено в виде квадратур для векторного потенциала, индукции и напряженности электрического поля в диэлектрической и электропроводной средах без ограничений на геометрию контура, свойства среды и частоту поля. Установлено, что плотность тока в электропроводной среде не содержит составляющей, перпендикулярной граничной поверхности для любой системы исходных токов и произвольной зависимости токов от времени. Как следствие, перпендикулярная компонента напряженности электрического поля на поверхности диэлектрической среды и поверхностная плотность электрического заряда не зависят от свойств электропроводной среды и определяются только вертикальной составляющей индуцированного электрического поля исходной системы токов в диэлектрической среде при произвольной зависимости от времени. Библиограф. 21, рис. 1.*

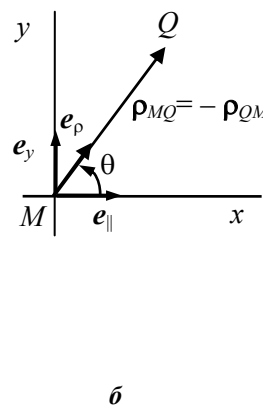
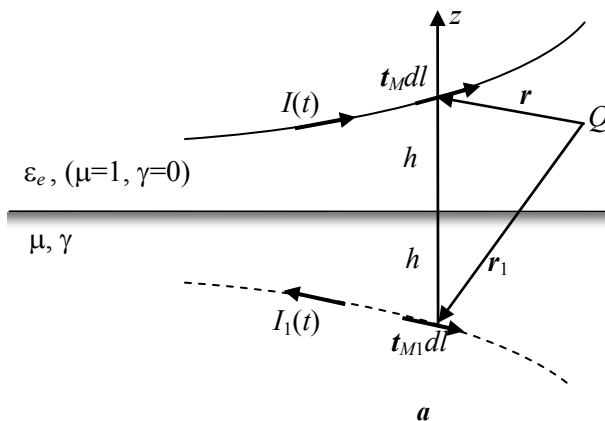
**Ключевые слова:** квазистационарное трехмерное электромагнитное поле, произвольный контур с током, вихревые токи.

**Введение.** Работа посвящена вопросу формирования квазистационарного трехмерного электромагнитного поля в системе: контур с переменным током произвольной пространственной конфигурации – электропроводное тело с плоской граничной поверхностью. Несмотря на то, что данной теме посвящено достаточно много работ, в том числе и общетеоретического характера, практические потребности разработки устройств с конкретными условиями распределения полей по-прежнему вызывают интерес исследователей к этой проблеме. Особенностью настоящей работы является развитие аналитических методов расчета трехмерного электромагнитного поля в достаточно общей постановке, где первичное поле создается переменным током, протекающим по контуру пространственной конфигурации, произвольным образом ориентированному относительно границы раздела сред, а во внешнем электропроводном намагничивающемся теле учитываются возникающие вихревые токи. При этом в работе не ставятся ограничения на частоту поля или глубину его проникновения в электропроводную среду.

В [2] было показано, что аналитическое решение сформулированной квазистационарной задачи может быть основано на известном аналитическом решении о поле излучающего гармонического токового диполя, расположенного над плоской границей раздела сред – на наш взгляд, одной из самых красивых задач теории электромагнитного поля. Поставленная в середине прошлого века в работах Г. Гринберга [6] и А. Зоммерфельда [7] задача получила дальнейшее развитие в работах О. Тозони [15] для исследования волнового электромагнитного поля полосковых линий, которые представлялись последовательной системой таких диполей. Теоретические исследования квазистационарной задачи нашли развитие, в первую очередь, для решения конкретных технологических вопросов. Среди них можно отметить, например, устройства магнитно-импульсной обработки металлов [1, 16], индукционные установки термической обработки металлов [8, 21]. В данных приложениях источником внешнего переменного поля являются токи, протекающие вдоль контуров, геометрическая конфигурация которых соответствует требованиям анализируемых устройств. Аналитические решения задачи о квазистационарном поле с учетом индуцированных токов в электропроводном полупространстве получили развитие при ограничениях на геометрию систем: в [18, 20] найдено решение для проводника с током, параллельного границе раздела сред; в [9] решается задача о проводнике, лежащего в вертикальной плоскости. В целом на сегодняшний день нельзя говорить об общем аналитическом решении квазистационарной задачи для контуров любой конфигурации и произвольных электрофизических свойствах сред.

В [2] задача о квазистационарном электромагнитном поле рассматривалась в общей постановке для произвольной конфигурации контура с током. Вместе с тем аналитическое решение относилось только к полю в области протекания тока. Несмотря на то, что в квазистационарной постановке решение упрощается, однако, при его получении не было в полной мере использовано необходимое условие замкнутости контура с током. Как и в ранее цитированных работах можно говорить, что в целом в использованном в [2] подходе и последующих работах не был достаточно полно развит аналитический метод расчета квазистационарного электромагнитного поля. Поэтому данная работа имеет целью восполнить указанный пробел развития аналитической теории решения задачи расчета трехмерного квазистационарного электромагнитного поля, создаваемого пространственными токовыми контурами с учетом вихревых токов во внешних электропроводных телах, и последовательно изложить материал в направлении получения решения задачи во всем пространстве, использования условия замкнутости контуров с током, установления существенных особенностей распределения трехмерного электромагнитного поля и его источников.

**Математическая модель.** Будем рассматривать произвольный контур в неэлектропроводной немагнитной среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_e$ , по которому протекает ток  $I(t)$ . Контур расположен вблизи электропроводного тела с плоской границей, обладающего электропроводностью  $\gamma$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$  (на рисунке *a* исходный контур с током показан сплошной кривой в верхнем полупространстве  $z > 0$ ). Считается, что размеры контура значительно меньше, чем размеры плоского участка поверхности тела, что позволяет использовать модель контура с током над электропроводным полупространством. Рассматривается линейная задача расчета квазистационарного электромагнитного поля, для которой плотность тока удовлетворяет условию непрерывности  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , и поэтому контур с током является замкнутым.



Квазистационарная постановка предполагает выполнение двух ограничений:

– длина волны электромагнитного поля  $\lambda$  значительно больше любого характерного размера  $L$  электромагнитной системы  $\lambda = 2\pi/\omega\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0} \gg L$ ;

– в уравнении полного тока пренебрегают плотностью тока смещения  $\mathbf{j}_D$  по сравнению с плотностью тока проводимости  $\mathbf{j}$

[10, 19].

Проблема сводится к решению задачи, которая описывается уравнениями Максвелла для векторов поля: напряженностей электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, векторов индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  и электрического смещения  $\mathbf{D}$  с учетом заданной плотности тока сторонних источников  $\mathbf{j}_e$  в элементах контура [10]

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}; & \text{div } \mathbf{B} = 0; \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \text{div } \mathbf{D} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для линейной задачи свободный заряд в кусочно-однородной среде может быть сосредоточен только на поверхности раздела сред с соответствующей поверхностной плотностью  $\sigma$ , поэтому в последнем из уравнений (1), которые описывают поле вне граничной поверхности, заряд опущен.

Материальными уравнениями, дополняющими (1), являются

$$\begin{aligned} z > 0: & \quad \mathbf{D}_e = \epsilon_e \epsilon_0 \mathbf{E}_e, \quad \mathbf{B}_e = \mu_0 \mathbf{H}_e, \\ z < 0: & \quad \mathbf{j}_i = \gamma \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{B}_i = \mu \mu_0 \mathbf{H}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где индексами “*e*” и “*i*” отмечены величины в областях  $z > 0$  и  $z < 0$  соответственно.

Введением векторного  $\mathbf{A}$  и скалярного  $\phi$  потенциалов

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad (3)$$

а также калибровки Лоренца в квазистационарном приближении

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \text{div } \mathbf{A}_e &= 0, \\ z < 0: \quad \text{div } \mathbf{A}_i + \mu\mu_0\gamma\varphi_i &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

из уравнений Максвелла (1) следуют уравнения для потенциалов

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \Delta \mathbf{A}_e &= -\mu\mu_0 \mathbf{j}_e, \quad \Delta \varphi_e = 0, \\ z < 0: \quad \Delta \mathbf{A}_i - \mu\mu_0\gamma \partial \mathbf{A}_i / \partial t &= 0, \quad \Delta \varphi_i - \mu\mu_0\gamma \partial \varphi_i / \partial t = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что для диэлектрической среды  $z > 0$  калибровка Лоренца совпадает с калибровкой Кулона.

На поверхности проводника выполняются краевые условия для касательных и нормальных составляющих векторов электромагнитного поля и, кроме того, должно быть установлено условие затухания поля на бесконечности

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0, \quad \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^- = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^+ = \sigma / \varepsilon_e \varepsilon_0, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}(\infty) = 0. \quad (8)$$

Индексами «+» и «-» обозначены векторы поля на границе раздела сред соответственно со стороны положительного и отрицательного значений оси  $z$  (рисунок а),  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $z$ .

На основании (4) в электропроводной среде, где  $\gamma \neq 0$ , для решения задачи достаточно найти распределение векторного потенциала. Однако в диэлектрической среде величина скалярного потенциала остается неопределенной: скалярный потенциал не входит в условие калибровки (4), а нормальная компонента поля на плоской границе в (7) определяется через неизвестную поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . В этом случае, используя только векторный потенциал, напряженность электрического поля в (3) может быть определена с точностью до потенциального слагаемого. На отмеченное свойство задачи сопряжения в квазистационарной постановке обращают внимание авторы работы [14], в которой показано, что решение будет однозначным при задании дополнительных условий. Неопределенность в определении напряженности электрического поля является несущественной, если необходимо знать распределение индукции магнитного поля или ЭДС, индуцируемой в замкнутом контуре. Однако нахождение напряженности электрического поля становится необходимым, например, при определении локальных силовых характеристик действия электрического поля, определении плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  и в ряде других приложений.

Рассматриваемый класс явлений, как отмечается в [19], может излагаться как с помощью уравнений квазистационарного поля, так и на основе общих волновых уравнений. В последнем случае при формулировке задачи отмеченные выше затруднения не возникают. В этой связи в основу аналитического решения сформулированной квазистационарной задачи расчета электромагнитного поля произвольного контура с током целесообразно положить известное аналитическое решение трехмерной задачи о поле излучающего гармонического токового диполя  $\dot{I}dl$ , расположенного над плоской границей раздела сред, где  $\dot{I}$  – комплексная амплитуда тока [6, 7].

**Электромагнитное поле гармонического тока произвольного контура.** Введем комплексные амплитуды векторных полей  $\dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$  и потенциалов  $\dot{\mathbf{A}}, \dot{\varphi}$  для тока, изменяющегося во времени по гармоническому закону. В предположении, что проводник является бесконечно тонким, плотность тока в уравнении (5) для векторного потенциала можно записать с использованием импульсной функции Дирака

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \Delta \dot{\mathbf{A}}_e + k_e^2 \dot{\mathbf{A}}_e &= -\mu_0 \dot{I} \delta(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) \mathbf{t}_M, \\ z < 0: \quad \Delta \dot{\mathbf{A}}_i + k_i^2 \dot{\mathbf{A}}_i &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где волновой параметр среды  $k$  в общем случае в волновой теории определяется как  $k^2 = -j\omega\mu\mu_0\gamma + \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 = -j\omega\mu\mu_0\tilde{\gamma}$ , где  $\tilde{\gamma} = \gamma + i\omega\varepsilon\varepsilon_0$  – комплексная электропроводность среды;  $\omega$  – циклическая частота,  $j$  – мнимая единица. В квазистационарном приближении параметры  $\tilde{\gamma}_i = \gamma$  и  $k_i^2 = -j\omega\mu\mu_0\gamma$  отличны от нуля в области  $z < 0$  и равны нулю  $\tilde{\gamma}_e = 0, k_e^2 = 0$  в диэлектрической среде  $z > 0$ .

Отметим, что полученное в [15] аналитическое решение трехмерной задачи (9), (6), (8) для поля гармонического диполя представляет, по сути, частотный спектр изменяющегося во времени электромагнитного поля. Решение удалось найти, осуществив еще и двумерное преобразование Фурье по координатам, эффективность применения которого показана в [6, 15].

Формула прямого преобразования Фурье функции двух переменных  $f(x, y)$  по координатам имеет вид

$$f^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \quad (10)$$

где  $i$  – мнимая единица для данного преобразования. При этом, как обычно, дифференцированию по координатам  $x$  и  $y$  функций-оригиналов соответствует умножение их изображений  $f^*(\xi, \eta)$  на операторы  $i\xi$  и  $i\eta$  соответственно.

В результате применения к уравнениям (9) интегрального преобразования (10) вместо трехмерных уравнений в оригиналах получают уже одномерные уравнения для изображений векторного потенциала

$$\begin{aligned} z > 0: \quad & \frac{d^2 \dot{A}_e^*}{dz^2} - q_e^2 \dot{A}_e^* = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi^2} \delta(z-h) \mathbf{t}_M, \\ z < 0: \quad & \frac{d^2 \dot{A}_i^*}{dz^2} - q_i^2 \dot{A}_i^* = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $q^2 = \xi^2 + \eta^2 - k^2$ ,  $h = z_M = -z_{M1}$  – вертикальная координата точки истока на контуре. Здесь под координатами  $x, y, z$  и связанными с ними величинами  $\xi, \eta$  точки наблюдения  $Q$  понимаются локальные координаты с вертикальной осью, которая проходит через точку истока  $M$  на контуре, причем координата  $x$  отсчитывается в направлении единичного вектора  $\mathbf{e}_{\parallel}$ , параллельном проекции касательной к контуру  $\mathbf{t}$  на поверхность раздела сред (рисунок б).

Переходя к локальным полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & \xi = \vartheta \cos \psi, \\ y = \rho \sin \theta, & \eta = \vartheta \sin \psi, \end{cases} \quad (12)$$

величины, входящие в (11), принимают вид

$$q_e^2 = \vartheta^2, \quad q_i^2 = \vartheta^2 - k_i^2. \quad (13)$$

Граничные условия (6), выраженные через Фурье-изображения векторного потенциала, также упрощаются. В результате формулируется краевая задача для обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Переход к квазистационарной задаче осуществляется с помощью интегрирования вдоль замкнутого контура, составленного из токовых диполей, при неизменной комплексной амплитуде тока  $\dot{I}$  и с отбрасыванием в результате членов, обусловленных токами смещения.

Опуская промежуточные выкладки, представим решение для Фурье-изображений по координатам векторного потенциала отдельно в диэлектрической  $z > 0$  и электропроводной  $z < 0$  средах

$$z > 0: \quad \dot{A}_e^* = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi^2} \oint_l \left\{ \frac{e^{-q_e |z-z_M|}}{2q_e} \mathbf{t} - \frac{e^{-q_e (z-z_{M1})}}{2q_e} \mathbf{t}_1 + \dot{Y}_{e\parallel}^* \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{e\perp}^* (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z \right\} dl, \quad (14)$$

$$z < 0: \quad \dot{A}_i^* = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi^2} \oint_l \left( \dot{Y}_{i\parallel}^* \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{i\perp}^* (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z + \dot{Y}_{i1}^* \mathbf{t}_{\perp} \right) dl. \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  представляют собой единичные векторы, касательные соответственно к исходному контуру в точке  $M$ , и к контуру, зеркально отраженному от границы раздела сред, в точки  $M_1$ , показанному на рисунке а пунктирной линией. Векторы  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  имеют одинаковые по величине и противоположные по направлению проекции на вертикальную ось  $\mathbf{t}_{1\perp} = -\mathbf{t}_{\perp}$  и одинаковые по величине и направлению проекции на поверхность раздела сред  $\mathbf{t}_{1\parallel} = \mathbf{t}_{\parallel}$ , то есть  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}$ .

Введенные в (14), (15) подынтегральные функции после исключения слагаемых, связанных с токами смещения, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{e\parallel}^* &= \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})}}{w(\vartheta)}, & \dot{Y}_{e\perp}^* &= i \cos \psi \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})}}{w(\vartheta)} = i \cos \psi \dot{Y}_{e\parallel}^*, \\ \dot{Y}_{i\parallel}^* &= \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M}}{w(\vartheta)}, & \dot{Y}_{i\perp}^* &= i \cos \psi \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M}}{w(\vartheta)} \mu, & \dot{Y}_{i1}^* &= e^{q_i z - \vartheta z_M} \frac{\mu}{\vartheta}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где} \quad w(\vartheta) = \frac{\mu \vartheta + q_i}{\mu} = \vartheta + \frac{1}{\mu} \sqrt{\vartheta^2 + j \omega \mu \mu_0 \gamma}. \quad (17)$$

Для получения решения относительно физических переменных необходимо осуществить обратное преобразование по координатам согласно выражению

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta) \cdot e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \int_0^{\infty} f_1^*(\vartheta) \vartheta d\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} f_2^*(\psi) e^{i\vartheta \rho \cos(\psi - \theta)} d\theta, \quad (18)$$

где подынтегральная функция, в качестве которой выступает любое из слагаемых в (14), (15), в общем случае имеет вид  $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\vartheta) f_2^*(\psi)$ .

Обратные преобразования Фурье для первых двух слагаемых в (14) известны [2]

$$\int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\vartheta|z-z_M|}}{2\vartheta} e^{i\vartheta \rho \cos(\psi - \theta)} d\psi \vartheta d\vartheta = \pi \frac{1}{r}, \quad \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})}}{2\vartheta} e^{i\vartheta \rho \cos(\psi - \theta)} d\psi \vartheta d\vartheta = \pi \frac{1}{r_1}. \quad (19)$$

Здесь  $r$  и  $r_1$  – расстояния между точкой наблюдения  $Q$  и точками истока на исходном контуре  $M$  и его зеркальном отражении  $M_1$  соответственно (рисунок *a*).

В свою очередь, применение обратного преобразования Фурье для слагаемых, содержащих функции  $\dot{Y}_{\parallel}^*$ ,  $\dot{Y}_{\perp}^*$  и  $\dot{Y}_1^*$  в (14) и (15), позволяет найти в виде аналитических зависимостей результат интегрирования только по углу  $\psi$  [5]

$$\dot{Y}_{e\parallel} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \quad \dot{Y}_{e\perp} = -2\pi \cos \theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \quad (20)$$

$$\dot{Y}_{i\parallel} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \quad \dot{Y}_{i\perp} = -2\pi \mu \cos \theta \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \quad \dot{Y}_1 = 2\pi \mu \int_0^{\infty} e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho) d\vartheta, \quad (21)$$

где  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.

В результате, подставляя (19)–(21) в (14) и (15), получим явные выражения в виде квадратур для определения во всем пространстве векторного потенциала трехмерного гармонически изменяющегося во времени электромагнитного поля. Заметим, что в [15] в выражениях, из которых следуют  $\dot{Y}_{e\perp}$  и  $\dot{Y}_{i\perp}$ , утерян знак « $\leftarrow$ ».

**Особенности распределения квазистационарного трехмерного электромагнитного поля.** Приведенные выражения получены на основе формального исключения из решения общей волновой задачи членов, связанных с токами смещения. Однако при переходе к квазистационарной постановке должно быть учтено условие замкнутости контура с током и, кроме того, необходимо проверить выполнение условий непрерывности векторного потенциала  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  в диэлектрической среде ( $z > 0$ ) и равенства нулю на границе в электропроводной среде нормальной компоненты напряженности электрического поля  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^- = 0$ .

Рассмотрим вначале электромагнитное поле, которое формируется в диэлектрической среде, выражение для векторного потенциала которого принимает вид

$$z > 0: \quad \mathbf{A}_e = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} \oint_l \left\{ \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} + \frac{1}{\pi} (\dot{Y}_{e\parallel} \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{e\perp} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z) \right\} dl. \quad (22)$$

Из (20) следует, что для выражения в круглых скобках вместо двух функций  $\dot{Y}_{e\parallel}$  и  $\dot{Y}_{e\perp}$  достаточно использовать одну вспомогательную функцию  $\dot{G}_e$  [2]

$$\dot{G}_e = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta, \quad (23)$$

для которой в локальных координатах справедливы равенства  $\dot{Y}_{e\parallel} = -\pi \partial \dot{G}_e / \partial z$ ,  $\dot{Y}_{e\perp} = \pi \partial \dot{G}_e / \partial x$ . В рассматриваемом выражении в (22) отсутствует вертикальная  $\mathbf{t}_\perp$  компонента касательного вектора, что позволяет представить векторный потенциал следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}] \times \text{grad } \dot{G}_e \right) dl. \quad (24)$$

Упростим результат интегрирования третьего слагаемого в выражении (24), используя условие замкнутости контура с током. Для этого учтем следующие соотношения:

$$\rho = \rho_{QM} = \rho_{QM1} = \sqrt{(x_Q - x_{M1})^2 + (y_Q - y_{M1})^2}, \quad (25)$$

$$[\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_M] = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_{M1}] \quad \text{grad}_Q \dot{G}_e(\mathbf{r}_{QM1}) = -\text{grad}_{M1} \dot{G}_e(\mathbf{r}_{QM1}), \quad dl_M = dl_{M1},$$

где показано, что аргументом функции  $\dot{G}_e(\mathbf{r}_{QM1})$  являются координаты вектора  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{QM1}$  (рисунок *a*), индексами внизу отмечены точки, по которым выполняются соответствующие операции, замена дифференцирования функции  $\dot{G}_e$  по точкам наблюдения  $Q$  на дифференцирование по точкам истока  $M_1$  сопровождается изменением знака перед функцией [12]. В результате с учетом равенства нулю циркуляции градиента скалярной функции для третьего слагаемого в (24) имеем

$$\oint_l [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_M] \times \text{grad}_Q \dot{G}_e dl_M = \oint_l \left\{ \mathbf{t}_{M1} (\mathbf{e}_z \cdot \text{grad}_Q \dot{G}_e) + \mathbf{e}_z (\mathbf{t}_{M1} \cdot \text{grad}_{M1} \dot{G}_e) \right\} dl_{M1} = \oint_l \mathbf{t}_{M1} \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z_Q} dl_{M1}. \quad (26)$$

Окончательно, опуская обозначения точек, выражения для векторного потенциала и индукции магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  в диэлектрической среде ( $z > 0$ ) упрощаются и принимают вид

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2 = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \mathbf{t}_1 \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) dl, \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \dot{\mathbf{B}}_0 + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} \oint_l \left[ \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} - \mathbf{t}_1 \times \text{grad} \left( \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) \right] dl. \quad (28)$$

Введенная в (23) функция  $\dot{G}_e$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \dot{G}_e = 0$ , в чем легко убедиться, применяя метод разделения переменных или непосредственной проверкой. Так как для любой функции вида  $\mathbf{t}_{M1} f(\mathbf{r}_{QM1})$  интеграл по замкнутому контуру от дивергенции от этой функции дает нулевое значение

$$\oint_l \text{div}_Q (\mathbf{t}_{M1} f(\mathbf{r}_{QM1})) dl_{M1} = -\int_l \mathbf{t}_{M1} \cdot \text{grad}_{M1} (f(\mathbf{r}_{QM1})) dl_{M1} = 0, \quad (29)$$

то, как следует из (27), найденное выражение для векторного потенциала действительно удовлетворяет условию (4) непрерывности векторного потенциала в диэлектрической среде в квазистационарном приближении  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

Наконец, из (27) вытекает, что для произвольного плоского контура, параллельного границе раздела сред, для которого  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z = 0$ , в области  $z > 0$  вертикальная составляющая векторного потенциала равна нулю  $\dot{\mathbf{A}}_e \cdot \mathbf{e}_z = 0$ . Ранее этот вывод был сделан в [2] для частного случая в отношении асимптотического разложения, которое справедливо для быстропротекающих процессов.

Без учета утерянного в [15] знака « $\rightarrow$ » в выражении, аналогичном (20) для  $\dot{Y}_{e\perp}$  и в (21) для  $\dot{Y}_{e\parallel}$ , не удастся использовать единую функцию  $\dot{G}_e$  и, что более существенно, в этом случае в диэлектрической среде в квазистационарном приближении не выполняется необходимое условие непрерывности векторного потенциала  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

Так как в диэлектрической области  $z > 0$  найдено выражение (27) только для векторного потенциала, то это дает возможность определить лишь одно слагаемое напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_{eV} = -j\omega \dot{\mathbf{A}}_e$ .

Рассмотрим теперь *электромагнитное поле в электропроводной среде*. Используя обозначения (21), выражение для векторного потенциала в области  $z < 0$  принимает вид

$$z < 0: \dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi^2} \oint_l \left( \dot{Y}_{i\parallel} \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{i\perp} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z + \dot{Y}_{i1} \mathbf{t}_{\perp} \right) dl. \quad (30)$$

Упростим (30), исключив второе слагаемое в подынтегральной функции. Для этого используем, как и прежде, условие замкнутости контура с током. Введением функции

$$\dot{G}_{i1} = 2\pi\mu \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \quad (31)$$

выражение (30) можно записать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi^2} \oint_l \left\{ - \left( \frac{\partial \dot{G}_{i1}}{\partial x_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) + \frac{\partial \dot{G}_{i1}}{\partial z_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right) \mathbf{e}_z + \left[ \dot{Y}_{i\parallel} \mathbf{t}_{\parallel} + \left( \frac{\partial \dot{G}_{i1}}{\partial z_M} + \dot{Y}_{i1} \right) \mathbf{t}_{\perp} \right] \right\} dl. \quad (32)$$

Так как интеграл по замкнутому контуру от первого слагаемого, заключенного в (32) в круглые скобки, равен нулю, окончательно выражение для векторного потенциала электромагнитного поля в электропроводной среде принимает вид, где каждое слагаемое в подынтегральной функции обусловлено элементом тока соответствующего направления

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} 2 \oint_l \left\{ \mathbf{t}_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + \mathbf{t}_{\perp} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i d\vartheta \right\} dl. \quad (33)$$

Найдем величину  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i$ , значение которой в силу принятой калибровки Лоренца (4) не обязательно равно нулю. Тем самым, согласно (4) определим распределение скалярного потенциала электромагнитного поля  $\dot{\varphi}_i = -\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i / \mu \mu_0 \gamma$ .

Исходя из (33) и используя локальные цилиндрические координаты (рис. 1, б), имеем

$$\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} 2 \oint_l \left\{ - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \cos \theta \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta^2 d\vartheta + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i^2 d\vartheta \right\} dl. \quad (34)$$

Исключим из записанного выражения первое слагаемое, связанное с ненулевой проекцией касательной к поверхности раздела сред  $\mathbf{t}_{\parallel}$ . Для этого с использованием вспомогательной функции

$$\dot{G}_{i2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \quad (35)$$

получим такое выражение  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i$ :

$$\begin{aligned} \text{div } \dot{\mathbf{A}}_i &= \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} 2 \oint_l \left\{ - \left( \frac{\partial \dot{G}_{i2}}{\partial x_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) + \frac{\partial \dot{G}_{i2}}{\partial z_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right) + \left[ \left( \frac{\partial \dot{G}_{i2}}{\partial z_M} + \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i^2 d\vartheta \right) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right] \right\} dl = \\ &= \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} 2 j \omega \mu \mu_0 \gamma \oint_l \left\{ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \right\} dl, \end{aligned} \quad (36)$$

и соответственно выражение для комплексной амплитуды скалярного потенциала

$$\dot{\varphi}_i = - \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} 2 j \omega \mu \mu_0 \gamma \oint_l \left\{ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \right\} dl. \quad (37)$$

Из (36) и (37) вытекает, в частности, что если отсутствуют участки контура с не равной нулю нормальной компонентой  $\mathbf{t}_{\perp}$ , иными словами, используются плоские контуры, лежащие в плоскости, параллельной границе раздела сред, то  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i = 0$  и  $\dot{\varphi}_i = 0$ . Для таких контуров напряженность электрического поля в электропроводной среде  $\dot{\mathbf{E}}_i = \dot{\mathbf{E}}_{iV} + \dot{\mathbf{E}}_{iP} = -j\omega \dot{\mathbf{A}}_i - \text{grad } \dot{\varphi}_i$  не содержит потенциальной составляющей и напряженность электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_i = -j\omega \dot{\mathbf{A}}_i$  определяется непосредственно распределением в пространстве векторного потенциала.

Наконец, найдем выражение для напряженности электрического поля в области  $z < 0$  в случае пространственной конфигурации контура с током и его произвольной ориентации относительно плоской границы раздела сред.

Используя (33) и (37), после выполнения необходимых операций получим выражение

$$\dot{E}_i = \dot{E}_{iV} + \dot{E}_{iP} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} 2j\omega \oint_l \left\{ t_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + (t \cdot e_z) e_{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \right\} dl, \quad (38)$$

где  $e_{\rho} = e_{\parallel} \cos \theta + e_y \sin \theta$  – единичный вектор вдоль радиального направления локальной цилиндрической системы координат.

Таким образом, в данной задаче распределения квазистационарного электромагнитного поля при плоской поверхности раздела сред в электропроводной среде напряженность электрического поля и плотность тока не имеют составляющих, направленных перпендикулярно поверхности, независимо от геометрии контура, вдоль которого протекает переменный ток. Ранее этот результат был получен только в точках поверхности раздела сред [3] для подтверждения выполнения граничного условия (7). Теперь вывод распространяется на все полупространство.

Указанная особенность в распределении плотности тока для трехмерной электромагнитной задачи отмечалась также и для ряда расчетных моделей линейной индукционной электрической машины при ограниченной толщине вторичного тела [11]. Однако в общей постановке для произвольной геометрии исходных контуров с током задача не рассматривалась.

Подчеркнем, что полученный в нашей работе результат об отсутствии вертикальной компоненты напряженности электрического поля в электропроводной среде явился следствием решения волновой задачи теории поля. Покажем, что данный вывод для квазистационарной задачи имеет более общие основания. Действительно, из уравнений Максвелла (1) следует, что в электропроводной среде распределение  $z$ -компоненты комплексной амплитуды напряженности электрического поля  $\dot{E}_{iz}$  описывается однородным дифференциальным уравнением второго порядка при заданном нулевом значении на границе (7) и ограниченности на бесконечности

$$\begin{cases} \Delta \dot{E}_{iz} - j\omega \mu \mu_0 \gamma \dot{E}_{iz} = 0, \\ \dot{E}_{iz}(z=0) = 0, \quad \dot{E}_{iz}(\infty) = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Решение соответствующей задачи параболического типа «без начальных условий» для полубесконечной области [13] имеет единственное нулевое значение. Данное положение подтверждает сделанный в работе вывод.

Так как для линейной задачи справедлив принцип суперпозиции, то сделанный вывод относительно отсутствия вертикальной составляющей плотности тока в электропроводной среде имеет более общий характер. Во-первых, так как в квазистационарной постановке любой контур с током должен быть замкнутым, то вывод справедлив для любого заданного распределения исходного тока в диэлектрической среде, а не только при его протекании вдоль конкретного контура. Во-вторых, так как произвольная зависимость тока от времени (с известными ограничениями) может быть представлена своим частотным спектром, то полученный результат справедлив и для любой зависимости от времени исходного тока.

**Источники поля и условия на границе раздела сред.** Найденные результаты распределения поля в области  $z < 0$  и особенностей распределения плотности тока позволяют установить источники поля и его значения на границе раздела сред в диэлектрической среде, а также при определенных ограничениях на конфигурацию контура с током найти напряженность электрического поля во всем объеме в области  $z > 0$ .

Выражение для касательной составляющей напряженности поля в диэлектрической среде  $\dot{E}_{\tau}^+$  непосредственно следует из граничного условия (6) и определяется из (38) при  $z = 0$ :  $\dot{E}_{\tau}^+ = \dot{E}_{i\tau}(z=0)$ .

Нормальную компоненту напряженности электрического поля в диэлектрической среде  $e_z \cdot \dot{E}^+$  можно определить, учитывая отсутствие в электропроводной среде компоненты плотности тока, перпендикулярной плоской поверхности раздела сред. Для этого представим векторный потенциал по-другому, а именно, как потенциал, который определяется только токами, протекающими во всем пространстве:  $\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_c$ , где  $\dot{A}_0$  – векторный потенциал, обусловленный током исходного контура в (27),  $\dot{A}_c$  – векторный потенциал, определяемый индуцированными токами в области  $z < 0$



$$\dot{A}_c = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\gamma \dot{E}_i}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{j_{Sm}}{r} dS. \quad (40)$$

Здесь учитывается как плотность токов проводимости  $\gamma \dot{E}_i$ , так и плотность токов намагничивания  $(\mu - 1)\gamma \dot{E}_i$  в объеме  $V_i$  и поверхностная плотность токов намагничивания  $j_{Sm} = -(\mu - 1)e_z \times \dot{H}^-$  на поверхности раздела сред.

Выражение (40) справедливо, если во всем пространстве для векторного потенциала справедлива калибровка Кулона, то есть выполняется условие непрерывности  $\text{div } \dot{A} = 0$  [12], причем, очевидно, оба слагаемых  $\dot{A}_0 + \dot{A}_c$  также по отдельности удовлетворяют этому условию. (Заметим, что  $\dot{A}_c$  в общем случае отличается от суммы  $\dot{A}_1 + \dot{A}_2$  в (27) при  $z > 0$  и  $\dot{A}_0 + \dot{A}_c$  отличается от  $\dot{A}_i$  в (33) при  $z < 0$  на величину градиента скалярной функции, что связано с другим условием калибровки). При выбранной калибровке напряженность электрического поля представляется суммой напряженностей полей  $\dot{E} = \dot{E}_\sigma + \dot{E}_j$ , где скалярный потенциал  $\dot{\phi}_\sigma$  и связанное с ним потенциальное слагаемое напряженности электрического поля  $\dot{E}_\sigma = -\text{grad } \dot{\phi}_\sigma$  обусловлено электрическими зарядами [17], которые в рассматриваемой задаче сосредоточены на границе раздела сред с поверхностной плотностью  $\dot{\sigma}$

$$\dot{\phi}_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_e\epsilon_0} \int_S \frac{\dot{\sigma}}{r} dS. \quad (41)$$

Второе же слагаемое напряженности электрического поля  $\dot{E}_j = -j\omega(\dot{A}_0 + \dot{A}_c)$  определяется токами, протекающими в системе, включая ток контура и токи, индуцированные в электропроводной среде.

Существенным обстоятельством в представлении  $\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_c$  является, как следует из (40), равенство нулю вертикальной компоненты векторного потенциала  $\dot{A}_c$  и соответственно равенство нулю слагаемого напряженности электрического поля  $-j\omega\dot{A}_c$ . Нормальная компонента суммарного поля может появиться только в связи с протеканием тока в направлении, перпендикулярном границе раздела сред. Такая ситуация возможна для контуров пространственной конфигурации или для плоских контуров, лежащих в плоскости, которая некомпланарна границе раздела сред.

Нормальные составляющие напряженности электрического поля, созданного поверхностным зарядом, по разные стороны граничной поверхности равны и противоположны по знаку. Кроме того, в электропроводной среде данная вертикальная составляющая поля электрических зарядов на границе компенсируется напряженностью индуцированного электрического поля, то есть

$$\dot{E}_{\sigma z}^+ = -\dot{E}_{\sigma z}^-, \quad \dot{E}_{\sigma z}^- - j\omega\dot{A}_{0z}^- = 0. \quad (42)$$

Учитывая непрерывность нормальной составляющей векторного потенциала  $\dot{A}_{0z}^+ = \dot{A}_{0z}^-$ , поверхностная плотность электрического заряда, исходя из граничного условия, будет  $\dot{\sigma} = \epsilon_e\epsilon_0\dot{E}_z^+$ . Отсюда найдем значение поверхностной плотности заряда и величину нормальной компоненты напряженности электрического поля, которые, как оказывается, полностью определяются только векторным потенциалом тока исходного контура

$$\dot{\sigma}(\epsilon_e\epsilon_0)^{-1} = \dot{E}_z^+ = -2j\omega\dot{A}_{0z}. \quad (43)$$

Ранее такое же соотношение было получено для задачи об электромагнитном поле в случае сильного скин-эффекта [4]. На основании проведенных в настоящей работе исследований установлено, что соотношение (43) имеет значительно более общий характер, оно не зависит от электропроводности и магнитной проницаемости среды, над плоской поверхностью которой протекает переменный электрический ток. Причем, в этом случае (43) справедливо не только для гармонических токов, но и для произвольной зависимости от времени исходного тока контура, и, кроме того, на основании принципа суперпозиции результат остается верным для любой исходной системы замкнутых токов

$$\sigma(\epsilon_e\epsilon_0)^{-1} = E_z^+ = -2\partial A_{0z} / \partial t. \quad (44)$$

Так как поверхностная плотность электрического заряда, а следовательно, и соответствующая потенциальная составляющая напряженности электрического поля, связаны с наличием участков контуров, перпендикулярных плоской поверхности электропроводного тела, то при их отсутствии – при

протекании исходных токов вдоль плоских контуров, параллельных границе раздела сред – напряженность электрического поля имеет только вихревую составляющую и для ее расчета достаточно знать распределение векторного потенциала электромагнитного поля.

**Выводы.** 1. На основе известного решения задачи о поле излучающего гармонического токового диполя и использования условия замкнутости контуров с током развита аналитическая теория расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля переменного тока, протекающего вдоль контура, расположенного вблизи плоской поверхности электропроводного намагничивающегося тела, без ограничений на геометрию контура, электрофизические свойства среды и частоту поля.

2. В квазистационарном приближении в случае плоской границы раздела диэлектрической и электропроводной сред напряженность электрического поля и плотность тока в электропроводном полупространстве не содержат составляющей, перпендикулярной граничной поверхности, для любого распределения системы исходных токов в диэлектрической среде и произвольной зависимости токов от времени.

3. Перпендикулярная компонента напряженности электрического поля на поверхности диэлектрической среды и поверхностная плотность электрического заряда не зависят от свойств электропроводной среды и определяются только вертикальной составляющей индуцированного электрического поля исходной системы токов в диэлектрической среде при их произвольной зависимости от времени.

1. Батыгин Ю.В., Головащенко С.Ф., Чаплыгин Е.А. Магнитно-импульсное притяжение немагнитных материалов // *Электричество*. – 2014. – № 2. – С. 40–52.
2. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле импульсного тока, протекающего над проводящим полупространством / Препр. АН Украины. Ин-т электродинамики; №721. – К.: 1992. – 37 с.
3. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Аналитический метод расчета электромагнитного поля и плотности потока мощности в системе токовый контур–проводящее полупространство // *Технічна електродинаміка*. Темат. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2000. – Ч. 2. – С. 16–19.
4. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле пространственного контура с током над плоской поверхностью проводящего тела с сильным скин-эффектом // *Электричество*. – 2014. – № 3. – С. 55–61.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
6. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 727 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд. Иностран. лит., 1958. – 501 с.
8. Кондратенко И.П., Рацеккин А.П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами // *Технічна електродинаміка*. – 1999. – № 3. – С. 3–9.
9. Макаров В.М. Векторный потенциал криволинейного провода, лежащего в вертикальной плоскости над землей // *Электронное моделирование*. – 1987. – Т. 9. – № 2. – С. 41–45.
10. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля. – М.: Энергия, 1969. – 352 с.
11. Рацеккин А.П. О двух предельных решениях для анализа поперечного краевого эффекта в индукционных МГД-машинах // *Магнитная гидродинамика*. – 1978. – № 4. – С. 107–111.
12. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 620 с.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
14. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. – К.: Техніка, 1974. – 352 с.
15. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.
16. Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Т.3.: Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями. – Харьков: ХНА-ДУ, 2009. – 240 с.
17. Федорченко А.М. Теоретическая физика. Классическая электродинамика. – К.: Вища школа, 1988. – 280 с.
18. Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле линейного проводника с током, параллельного граничной плоскости «воздушная среда–проводящее полупространство» // *Электричество*. – 1997. – № 12. – С. 55–61.
19. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 775 с.
20. Acero J., Alonso R., Burdio J.M., Barragan L.A., Puyal D. Analytical Equivalent Impedance for a Planar Induction Heating System // *IEEE Transaction on Magnetics*. – 2006. – Vol. 42. – No 1 – Pp. 84–86.
21. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. – Marcel Dekker Inc., 2003. – 777 p.

УДК 621.3.011

**АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ КВАЗІСТАЦІОНАРНОГО ТРИВИМІРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ СТРУМУ, ЩО ПРОТІКАЄ ПО КОНТУРУ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ПОБЛИЗУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА**

**Ю.М. Васецкий, докт. техн. наук, К.К. Дзюба**  
**Інститут електродинаміки НАН України,**

*На основі відомого аналітичного рішення задачі про поле випромінюючого гармонійного струмового диполя розвинуто аналітичний метод розрахунку квазістационарного тривимірного електромагнітного поля, що створено довільним просторовим струмовим контуром, розташованим поблизу електропровідного тіла із плоскою поверхнею. Розв'язок з урахуванням замкнутості контурів зі струмом знайдено у вигляді квадратур для векторного потенціалу, індукції магнітного і напруженості електричного полів у діелектричному й електропровідному середовищах без обмеження на геометрію контуру, властивостей середовищ та частоту поля. Встановлено, що густина струму в електропровідному середовищі не містить складової, що перпендикулярна до граничної поверхні для будь-якої системи вихідних струмів і довільної залежності струмів від часу. Як наслідок, перпендикулярна компонента напруженості електричного поля на поверхні діелектричного середовища і поверхнева густина електричного заряду не залежать від властивостей електропровідного середовища й визначаються тільки вертикальною складовою індукованого електричного поля вихідної системи струмів у діелектричному середовищі при довільній залежності від часу. Бібл. 21, рис. 1.*

**Ключові слова:** квазістационарне тривимірне електромагнітне поле, довільний контур зі струмом, вихрові струми.

## AN ANALYTICAL CALCULATION METHOD OF QUASI-STATIONARY THREE-DIMENSIONAL ELECTROMAGNETIC FIELD CREATED BY THE ARBITRARY CURRENT CONTOUR THAT LOCATED NEAR CONDUCTING BODY

Yu.M.Vasetsky, K.K.Dziuba

Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,

pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine.

E-mail: [yuriv.vasetsky@gmail.com](mailto:yuriv.vasetsky@gmail.com)

*On the basis of the analytical decision of problem on a field of radiating harmonious current dipole the analytical calculation method of quasi-stationary three-dimensional electromagnetic field created by arbitrary spatial current contour, located near conducting body with a flat surface is developed. The analytical decision taking into account closed current contour is found for vector potential, induction of magnetic field and intensity of electric field in dielectric and conducting media without limitations on contours geometry, media properties and current frequency. It is established, that the current density in the conducting medium has no component directed perpendicularly to flat surface of body for any initial current system and for any dependence of currents on time. As consequence, the perpendicular component of electric field intensity on a surface of the dielectric medium and surface density of electric charge do not depend on properties of the conductive medium and they are defined only by a vertical component of the induced electric field of the initial currents at any dependence on time. References 21, figure 1.*

**Key words:** quasi-stationary three-dimensional electromagnetic field, arbitrary spatial current contour, eddy currents.

1. *Batygin Yu.V., Golovaschenko S.F., Chaplygin E.A.* Magnetic-Impulse Attraction of Nonmagnetic Metals // *Elektri-chestvo*. – 2014. – No 2. – Pp. 40–52. (Rus)
2. *Vasetskiy Yu.M.* Electromagnetic field of the pulse current flying above conducting half-space / Preprint AN Ukrainy. Instytut elektrody-namiky; No 721. – Kyiv: 1992. – 37 p. (Rus)
3. *Vasetskiy Yu.M., Gorodzha L.V., Mazurenko I.L.* Analytical calculation method of an electromagnetic field and density of power flow in system current contour conductive half-space // *Tekhnichna Elektrodyamika. Tematychnyi vypusk "Problemy suchasnoi elektrotekhniki"*. – 2000. – Ch. 2. – Pp. 16–19. (Rus)
4. *Vasetskiy Yu.M.* The electromagnetic field of a spatial loop with a current above a flat surface of a conducting body with a strong skin-effect // *Elektrichestvo*. – 2014. – No 3. – Pp. 55–61. (Rus)
5. *Gradshteyn I.S. Ryzhik I.M.* Tables of integrals, the sums, series and products. – Moskva: Fizmatgiz, 1962. – 1100 p. (Rus)
6. *Grinberg G.A.* The selected questions of the mathematical theory of the electric and magnetic phenomena. – Moskva-Leningrad: Izdatelstvo AN SSSR, 1948. – 727 p. (Rus)
7. *Zommerfeld A.* *Elektrodynamik*. – Moskva: Izdatelstvo Inostrannoi literatury, 1958. – 501 p. (Rus)
8. *Kondratenko I.P., Rashchepkin A.P.* Induction heating of a moving strip current contours // *Tekhnichna Elektrodyamika*. – 1999. – No 3. – Pp. 3–9. (Rus)
9. *Makarov V.M.* Vector potential of the curvilinear wire laying in a vertical plane over the earth // *Elektronnoe modelirovanie*. – 1987. – Vol. 9. – No 2. – Pp. 41–45.
10. *Polivanov K.M.* Theoretical bases of electrical engineers. Vol. 3. The theory of electromagnetic field. – Moskva: Energiia, 1969. – 352 p.
11. *Rashchepkin A.P.* About two limiting decisions for the analysis of cross-section boundary effect in induction MHD-machine // *Magnitnaia gidrodinamika*. – 1978. – No 4. – Pp. 107–111. (Rus)
12. *Tamm I.E.* Bases of the theory of electricity. – Moskva: GITTL, 1956. – 620 p. (Rus)
13. *Tihonov A.N., Samarskiy A.A.* Equations of mathematical physics. – Moskva: Nauka, 1966. – 724 p. (Rus)
14. *Tozoni O.V., Maergoyz I.D.* Calculation of three-dimensional electromagnetic fields. – Kyiv: Tekhnika, 1974. – 352 p. (Rus)
15. *Tozoni O.V.* Method of secondary sources in the electrical engineer. – Moskva: Energiia, 1975. – 296 p. (Rus)
16. *Turenko A.N., Batygin Yu.V., Gnatov A.V.* Pulse magnetic fields for progressive technologies. – Vol. 3: The theory and experiment of an attraction of thin-walled metals by pulse magnetic fields. – Kharkov: HNADU, 2009. – 240 p. (Rus)
17. *Fedorchenko A.M.* The theoretical physics. Classical electrodynamics. – Kyiv: Vyscha shkola, 1988. – 280 p. (Rus)
18. *Tsitsikyan G.N.* Electromagnetic field of a linear conductor with a current, that parallel to a boundary plane «the air medium - conducting half-space» // *Elektrichestvo*. – 1997. – No 12. – Pp. 55–61. (Rus)
19. *Shimoni K.* Theoretical electrical engineer. – Moskva: Mir, 1964. – 775 p. (Rus)
20. *Acero J., Alonso R., Burdío J.M., Barragan L.A., Puyal D.* Analytical Equivalent Impedance for a Planar Induction Heating System // *IEEE Transaction on Magnetics*. – 2006. – Vol. 42. – No 1. – Pp. 84–86.
21. *Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M.* Handbook of induction heating. – Marcel Dekker Inc., 2003. – 777 p.

Надійшла 27.03.2017  
Остаточний варіант 21.04.2017