

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ И ВНЕ РАЗРЯДНОЙ КАМЕРЫ ВЫСОКОВОЛЬТНОЙ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

**В.М. Косенков**, канд. техн. наук, **В.М. Бычков**  
Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,  
пр. Октябрьский, 43–А, Николаев, 54018, Украина.  
E-mail: [v.m.kosenkov@gmail.com](mailto:v.m.kosenkov@gmail.com)

*Определены особенности задания граничных условий при математическом моделировании электромагнитного поля (ЭМП) высоковольтной электрогидравлической установки в конечном объеме расчетной области за пределами разрядной камеры. Их использование при расчете ЭМП внутри и вне разрядной камеры позволяет получить распределение поля, эквивалентное распределению ЭМП при использовании точных граничных условий на бесконечности – ошибка составляет не более 5%. Разработана математическая модель и алгоритм решения полученной системы уравнений на основе численных методов. Верификация модели и алгоритма выполнена на задачах, допускающих точные решения. Библиограф. 20, рис. 4.*

**Ключевые слова:** электрический разряд, конденсатор, разрядный канал в воде, математическая модель, электромагнитное поле, электрогидравлическая установка, граничные условия.

**Введение.** Усовершенствование современных электроразрядных технологий основывается на разработке методов и устройств для повышения скорости нарастания разрядных токов [2, 7, 10, 15], увеличения импульсной электрической мощности [2, 11, 16, 19], а также ограничения длительности импульсных токов в нагрузке [5, 12, 13], что способствует увеличению частоты составляющих импульсного электромагнитного поля (ЭМП), генерируемого каналом разряда между электродами и другими элементами разрядной цепи конденсатора (накопителя электрической энергии). Высокочастотные ЭМП за пределами разрядной камеры (РК) электроразрядных установок могут вызывать нарушение функциональной деятельности органов человека, в первую очередь его мозга [18]. Поэтому кроме задач структурно-параметрического синтеза разрядных цепей накопительных конденсаторов [2, 11, 12] и расчета распределения импульсных ЭМП внутри РК установок [5, 17, 19] необходимо анализировать их распределение за пределами таких камер, т.е. в конечных областях, где может находиться персонал, обеспечивающий работу установок. Особенно важно осуществлять анализ распределения ЭМП возле высоковольтных электрогидравлических установок (ЭГУ), которые формируют в воде кратковременные очень мощные электрические разряды, генерирующие очень мощные электромагнитные импульсы, негативно влияющие на персонал и приборы системы управления и контроля работы ЭГУ [2, 5, 15–19]. Сложность физического измерения предельных характеристик ЭМП ЭГУ и опасность поражения током людей, выполняющих измерения, определяет актуальность применения методов математического моделирования ЭМП с последующей экспериментальной проверкой получаемых результатов.

Основой математических моделей ЭМП систем типа ЭГУ, содержащих компоненты с различными электрическими и магнитными свойствами, служат уравнения электродинамики сплошных неоднородных сред [1, 3–9, 14–20]. Модели разных систем отличаются степенью учёта конструктивных особенностей моделируемой установки, электрических и магнитных характеристик материалов и граничными условиями. В большинстве случаев решение системы уравнений такого типа математических моделей можно получить только с помощью численных методов, которые применяются в пространственно ограниченных областях, на внешних границах которых нельзя применить условия на бесконечно удалённой границе [3, 4]. Поэтому на относительно близких к объекту моделирования искусственных внешних границах задают ряд условий для получения решений, соответствующих точным условиям на бесконечности [5–9]. Но анализ таких условий показал их противоречивость, вызывающую получение количественно и качественно разных результатов моделирования ЭМП в ограниченных пространствах вокруг их источника (электроразрядной системы). Поэтому возникла необходимость уточнить условия выбора граничных условий на внешних границах расчётной области, которые были бы адекватными условиям на бесконечно удалённой границе. Актуальность реше-

ния этой задачи возрастает при разработке новых электроразрядных установок, элементы которых имеют существенно неоднородные электрические и магнитные характеристики.

Поэтому **целью работы является** определение граничных условий на искусственных границах расчётной области конечных размеров, эквивалентных условиям на бесконечности, для разработки математической модели электромагнитного поля внутри разрядной камеры ЭГУ и за её пределами.

**Постановка задачи.** Для достижения цели надо составить систему уравнений ЭМП в цилиндрической разрядной камере ЭГУ и за её пределами, разработать алгоритм ее решения, а также определить граничные условия на внешних (искусственных) границах расчётной области, обеспечивающие согласование полученных решений с точными решениями в неограниченной области.

На рис. 1 показана электрическая схема замещения цепи разряда конденсатора емкостью  $C$  на межэлектродный промежуток, в котором образуется канал разряда 4; электроды РК обозначены цифрами 1 и 6; изолятор – 2; корпус РК – 3; разрядник – 5; вода – 7; коаксиальный кабель – 8; внешняя граница замкнутой области, в которой необходимо определить характеристики ЭМП, – 9.

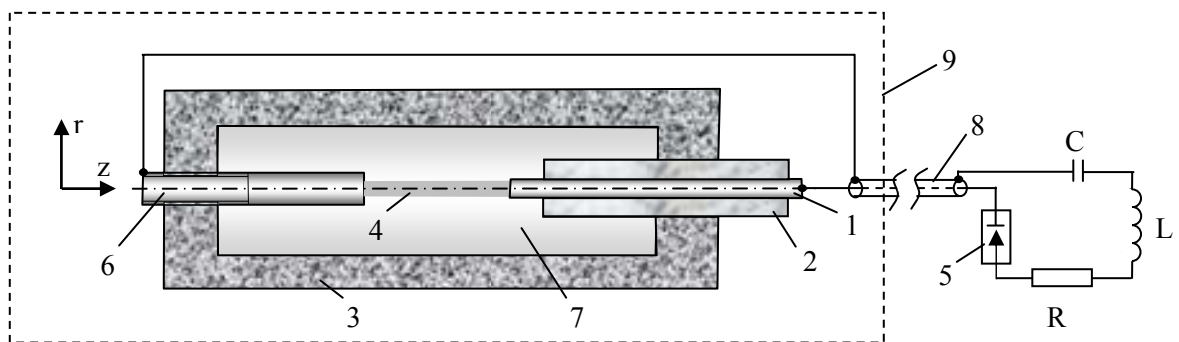


Рис. 1

При использовании скалярного и векторного потенциалов и калибровки Кулона для ЭМП, возникающего при электрическом разряде в воде, будут справедливы уравнения электродинамики [4]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}) - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \sigma \cdot \text{grad } \varphi + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi, \quad (2)$$

где  $\varphi$  – электрический скалярный потенциал [В];  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал [В·с/м];  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость [Гн/м];  $\mathbf{J}$  – вектор плотности тока [А/м<sup>2</sup>];  $\sigma$  – удельная объемная электропроводность среды [См/м];  $r, z$  – пространственные координаты [м];  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\rho_e$  – свободные заряды [К].

Для решения уравнений (1) и (2) необходимо задать магнитную проницаемость среды  $\mu$  и ее удельную электропроводность  $\sigma$ , а затем определить вектор плотности тока  $\mathbf{J}$ , напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  [В/м]; индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$  [Тл]; напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  [А/м] по соотношениям [1, 3, 4]

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu. \quad (3)$$

Длина электромагнитной волны, генерируемой в процессе разряда, существенно больше размеров РК и области моделирования, поэтому в любой момент времени ЭМП можно считать квазистатическим [1, 3, 4] и пренебречь составляющими уравнения (1) и (2), содержащими производные второго порядка  $A$  и  $\varphi$  по времени, а также производной по времени градиента  $\varphi$ . В отсутствие свободных зарядов правая часть уравнения (1) равна нулю. Появление скин-слоя в проводнике учитывает производная  $\partial A / \partial t$  в уравнении (2), при этом толщину скин-слоя определяем по формуле [3, 4]

$$\delta = (2 / \omega \mu \sigma)^{0,5}, \quad (4)$$

где  $\omega$  – круговая частота [рад/с].

Сопротивление и проводимость канала разряда как проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ , имеющего удельное сопротивление  $\rho$ , определим по формулам

$$R_{\text{ck}} = \rho l / S \quad \text{и} \quad \sigma = l / R_{\text{ck}} S. \quad (5, 6)$$

Для вычисления толщины скин-слоя использовались данные, полученные в расчетах математической модели, приведенной в статьях [17, 19] для момента времени, соответствующего первому максимуму силы тока в разрядной цепи. В расчетах длина канала разряда составляла 0,03 м, сопротивление – 0,0565 Ом, радиус канала разряда равнялся 0,003625 м, а круговая частота изменения силы тока – 105409 рад/с (с учетом того, что емкость конденсатора составляла 10 мкФ, а индуктивность его разрядной цепи – 9 мкГн). Используя эти данные в формуле (6), было определено, что проводимость канала разряда равнялась 12865 См/м. Тогда из формулы (4) следует, что толщина скин-слоя равна 0,034 м. То есть толщина скин-слоя на порядок больше радиуса канала разряда, поэтому явлением скин-эффекта можно пренебречь и считать, что производная  $\partial A/\partial t$  равна нулю. С учетом этих упрощений уравнения электродинамики неоднородной среды в цилиндрической системе координат (1) и (2) принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\frac{r}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}) = -\mathbf{J}, \quad (7, 8)$$

а напряженность электрического поля можно вычислить по формуле

$$\mathbf{E} = -grad \varphi. \quad (9)$$

Граничные условия для уравнений (1) и (2) определим из допущения, что на бесконечном удалении от РК индукция магнитного поля и электрический потенциал равны нулю, т.е.

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \pm \infty}} \mathbf{B} = 0, \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \pm \infty}} \varphi = 0. \quad (10)$$

Потенциал высоковольтного электрода равен разности потенциалов между электродами, а в месте подключения кабеля к низковольтному электроду *b* (рис. 1) электрический потенциал равен нулю. Производные скалярного потенциала  $\varphi$  по нормали к оси симметрии и внешним границам расчетной области также принимались равными нулю.

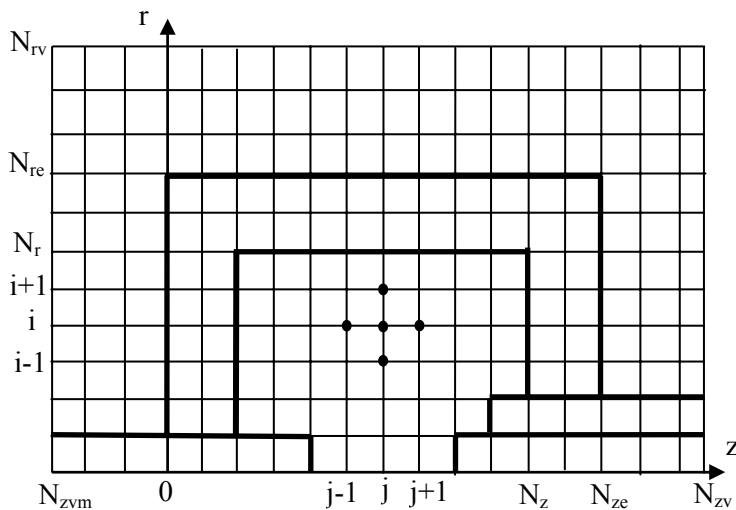


Рис. 2

**Решение задачи.** Непрерывную пространственную область  $\Omega$  на рис. 1 было преобразовано в дискретную область, представленную на рис. 2, где неподвижные пространственные слои по координатам  $r$  и  $z$  обозначены переменными  $i$  и  $j$ .

Дискретизация расчетной области в интервалах  $0 \leq j \leq N_{ze}$  и  $0 \leq i \leq N_{re}$  выполнена сеткой с равномерным шагом  $\Delta r$  и  $\Delta z$ .

Для внешней области (которая задавалась интервалами  $N_{zvm} \leq j \leq 0$ ,  $N_{ze} \leq j \leq N_{zv}$  и  $N_{re} \leq i \leq N_{rv}$ ) координаты расчетной сетки  $r_i$  и  $z_j$  задавались с переменными шагами  $\Delta r_i$  и  $\Delta z_j$ , определяемыми по формулам

$$\Delta r_i = \alpha \cdot \Delta r_{i-1}, \quad r_{i+1} = r_i + \Delta r_i, \quad \Delta z_j = \alpha \cdot \Delta z_{j-1}, \quad z_{j+1} = z_j + \Delta z_j, \quad (11)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, равный отношению большего шага сетки к меньшему на соседних интервалах (при  $\alpha = 1$  шаг является равномерным, а при  $1 < \alpha \leq 1,1$  – неравномерным).

Электрический скалярный потенциал  $\varphi$  и значения векторного потенциала  $\mathbf{A}$  после дискретизации и преобразования дифференциальных уравнений (7) и (8) определялись с применением метода Зейделя [8] по итерационным формулам

$$\tilde{\varphi}_{i,j}^{m+1} = \frac{1}{F \cdot (\alpha+1)} \cdot \left( \frac{(r_{i+1} \cdot \sigma_{i+1,j} + r_i \cdot \sigma_{i,j}) \cdot \varphi_{i+1,j}^m}{\Delta r_{i-1} \cdot \Delta r_i} + \frac{(r_{i-1} \cdot \sigma_{i-1,j} + r_i \cdot \sigma_{i,j}) \cdot \varphi_{i-1,j}^{m+1}}{(\Delta r_{i-1})^2} + \right. \\ \left. + \frac{r_i \cdot (\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j}) \cdot \varphi_{i,j+1}^m}{\Delta z_{j-1} \cdot \Delta z_j} + \frac{r_i \cdot (\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j-1}) \cdot \varphi_{i,j-1}^{m+1}}{(\Delta z_{j-1})^2} \right), \quad (12)$$

$$\tilde{A}_{i,j}^{m+1} = \frac{1}{G \cdot (\alpha+1)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_{i-1} \cdot \Delta r_i} \cdot \left[ \frac{r_{i+1}}{\mu_{i+1,j}} + \frac{r_i}{\mu_{i,j}} \right] \cdot A_{i+1,j}^m + \frac{1}{(\Delta r_{i-1})^2} \cdot \left[ \frac{r_{i-1}}{\mu_{i-1,j}} + \frac{r_i}{\mu_{i,j}} \right] \cdot A_{i-1,j}^{m+1} + \right. \\ \left. + \frac{r_i}{\Delta z_{j-1} \cdot \Delta z_j} \cdot \left[ \frac{1}{\mu_{i,j+1}} + \frac{1}{\mu_{i,j}} \right] \cdot A_{i,j+1}^m + \frac{r_i}{(\Delta z_{j-1})^2} \cdot \left[ \frac{1}{\mu_{i,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j-1}} \right] \cdot A_{i,j-1}^{m+1} + J_{i,j} \cdot r_i \right), \quad (13)$$

где  $m$  – номер итерации;

$$F = \frac{1}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \left[ \frac{r_{i+1} \cdot \sigma_{i+1,j} + r_i \cdot \sigma_{i,j}}{\Delta r_i} + \frac{r_{i-1} \cdot \sigma_{i-1,j} + r_i \cdot \sigma_{i,j}}{\Delta r_{i-1}} \right] + \\ + \frac{r_i}{(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})} \left[ \frac{\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j}}{\Delta z_j} + \frac{\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j-1}}{\Delta z_{j-1}} \right], \\ G = \frac{1}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \left[ \frac{1}{\Delta r_i} \left( \frac{r_{i+1}}{\mu_{i+1,j}} + \frac{r_i}{\mu_{i,j}} \right) + \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \left( \frac{r_{i-1}}{\mu_{i-1,j}} + \frac{r_i}{\mu_{i,j}} \right) \right] + \\ + \frac{r_i}{(\Delta z_j + \Delta z_{j-1})} \left[ \frac{1}{\Delta z_j} \left( \frac{1}{\mu_{i,j+1}} + \frac{1}{\mu_{i,j}} \right) + \frac{1}{\Delta z_{j-1}} \left( \frac{1}{\mu_{i,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j-1}} \right) \right].$$

Для вычисления составляющих векторного потенциала  $A_z$  и  $A_r$  по формуле (13) предварительно определяли плотности токов  $J_z$  и  $J_r$  по формулам (3).

Потенциалы, определенные на первом шаге с использованием формул (12) и (13), корректировали на втором шаге по формулам последовательной верхней релаксации, приведенным в [9]

$$\varphi_{i,j}^{m+1} = (\lambda - 1) \cdot \varphi_{i,j}^m + \lambda \cdot \tilde{\varphi}_{i,j}^{m+1}, \quad A_{i,j}^{m+1} = (\lambda - 1) \cdot A_{i,j}^m + \lambda \cdot \tilde{A}_{i,j}^{m+1}, \quad (14)$$

где  $\lambda \in (1; 2)$  – коэффициент верхней релаксации.

**Определение граничных условий для электрического скалярного и векторного потенциалов на внешней границе расчетной области.** Исследования показали, что соотношения (10) не позволяют непосредственно задавать граничные условия для определения электрического скалярного и векторного потенциалов из-за пространственной ограниченности расчетной области на рис. 2.

В [6, 7, 9] приводят разные способы задания условий на границах расчетной области конечных размеров. В [7] определяют ЭМП возле двух параллельных пластин с противоположными токами при равных нулю составляющих вектора магнитной индукции и векторного потенциала в направлении нормали к границе, удаленной от проводника на значительное расстояние. Производную векторного потенциала по нормали к плоскости симметрии задавали равной нулю. В работе [8] выполнен расчет импульсного магнита в области, ограниченной внешней границей. Векторный потенциал на ней и его производную по нормали к границе принимали равными нулю и задавали равным нулю векторный потенциал на оси симметрии. В работе [9] выполнен расчет магнитного поля винтового динамо в торе. При выполнении такого расчета на внешней границе задавали равными нулю значения нормальной компоненты векторного потенциала и производной его тангенциальной компоненты.

Наши исследования показали, что, если внешняя граница расчетной области находится на относительно малом расстоянии от цилиндрического проводника с током радиусом  $a$ , то применение таких граничных условий может вызывать большую погрешность (больше 30%) при расчете ЭМП вне РК. Использование условий равенства нулю производной векторного потенциала по нормали к внешней границе и равенства нулю векторного потенциала на оси симметрии [7] дают качественно и количественно неверные результаты. В то же время в [6] показано, что расчеты некоторых задач могут достаточно хорошо согласовываться с результатами точных решений при таких граничных усло-

виях, как равенство нулю векторного потенциала на внешней границе расчетной области и равенство нулю производной векторного потенциала по нормали к оси симметрии.

Для анализа граничных условий используем известное точное решение задачи определения магнитного поля внутри и за пределами цилиндрического проводника с током [1, 3, 4]

$$A_z = \begin{cases} -\frac{1}{4} \cdot \mu\mu_0 J r^2 & \text{при } r \leq a, \\ -\frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \cdot \ln(r) - \frac{1}{4} \mu\mu_0 J a^2 - \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \cdot \ln(a) & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (15)$$

где  $a$  – радиус проводника.

Векторный магнитный потенциал имеет только одну составляющую, направленную параллельно оси  $z$ , и зависит от координаты  $r$ . Из (15) следует, что за пределами проводника ( $r > a$ ) векторный потенциал изменяется по логарифмической зависимости. Эта зависимость использована для вычисления потенциала на внешней цилиндрической границе расчетной области ( $i=N_{rv}$ ) по величинам потенциала в двух соседних узлах сетки ( $N_{rv}-2$ ) и ( $N_{rv}-1$ ) (рис. 2) по формуле

$$A_{z N_{rv}, j} = (A_{z N_{rv}-2, j} - A_{z N_{rv}-1, j}) / \ln \frac{r_{N_{rv}-2}}{r_{N_{rv}-1}} \cdot (\ln(r_{N_{rv}}) - \ln(r_{N_{rv}-1})) + A_{z N_{rv}-1, j}. \quad (16)$$

На плоских границах расчетной области, расположенных вблизи стенок разрядной камеры, можно задавать граничные условия, аналогичные условиям при решении задачи распределения векторного потенциала возле поверхности плоской шины с током [3, 4]. Тогда векторный потенциал в направлении нормали к поверхности шины изменяется по линейному закону. Используя эту закономерность, определяем потенциал на левой границе ( $N_{zvm}$ ) расчетной области (рис. 2)

$$A_{z i, N_{zvm}} = \frac{A_{z i, N_{zvm}+1} - A_{z i, N_{zvm}+2}}{z_{i, N_{zvm}+1} - z_{i, N_{zvm}+2}} \cdot (z_{i, N_{zvm}} - z_{i, N_{zvm}+1}) + A_{z i, N_{zvm}+1}, \quad (17)$$

а на правой границе ( $N_{zv}$ ) –

$$A_{z i, N_{zv}} = \frac{A_{z i, N_{zv}-1} - A_{z i, N_{zv}-2}}{z_{i, N_{zv}-1} - z_{i, N_{zv}-2}} \cdot (z_{i, N_{zv}} - z_{i, N_{zv}-1}) + A_{z i, N_{zv}-1}. \quad (18)$$

Из точного решения для проводника с током [1] известно, что индукция магнитного поля на оси симметрии равна нулю. Тогда из (3) следует, что производная векторного потенциала на оси симметрии должна быть равна нулю

$$\partial A_z / \partial z = 0. \quad (19)$$

Дискретизация условия (19) с помощью односторонних разностей приводит к определению значения потенциала на оси симметрии из равенства  $A_{z 0, j} = A_{z 1, j}$ .

**Тестирование математической модели.** Тестирование математической модели ЭМП выполняем путём сравнения результатов моделирования с точным решением задачи определения магнитного поля внутри и за пределами проводника с током [1] и в коаксиальном кабеле, токи в котором направлены встречно [3]. Согласно результатам работы [1], в цилиндрическом проводнике круглого сечения течет ток плотностью  $2785 \text{ А/м}^2$ , а его относительная магнитная проницаемость равна четырем.

Проводник окружает диэлектрик с относительной магнитной проницаемостью, равной единице. Радиус проводника равен  $0,2 \text{ м}$ . Внешняя граница расчетной области расположена на расстоянии  $0,55 \text{ м}$  от оси проводника. Для сравнения выполним расчет векторного потенциала и напряженности магнитного поля в заданной расчетной области при различных граничных условиях на оси симметрии и внешней границе области.

На рис. 3, а и б показаны расчетные зависимости напряженности магнитного поля и векторного потенциала от расстояния до оси проводника с током.

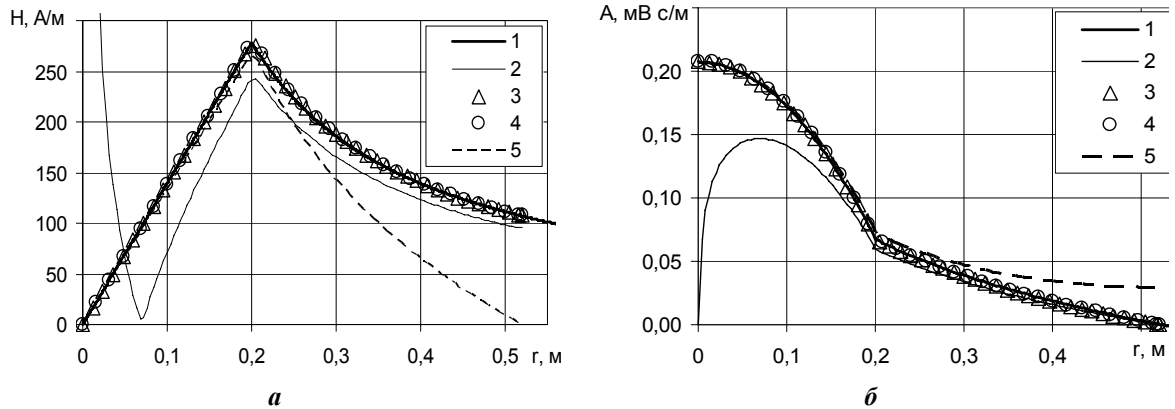


Рис. 3

Кривые 1 определяют точное решение задачи для проводника с током в работе [1], а линии 2 – расчет ЭМП при допущении, что потенциал равен нулю на оси симметрии, а на внешней границе он определяется по формуле (16). Кривыми 3–5 показаны результаты расчета при условии, что на оси симметрии производная потенциала по нормали к ней равна нулю, линией 3 – потенциал на внешней границе определен по формуле (16), линией 4 – он равен нулю, а линией 5 – его производная равна нулю. Из рис. 3, *а* и *б* видно, что точному решению лучше всего соответствуют результаты, полученные при условии равенства нулю производной потенциала на оси симметрии, а также когда на внешней границе расчетной области потенциал равен нулю или определен по формуле (16).

В [3] получен точный расчет ЭМП в коаксиальном кабеле, где изоляция, жила и оболочка выполнены из немагнитного материала. Токи в жиле и оболочке обратно направлены и равны 200 А. Радиус жилы кабеля равнялся 6 мм, внешний радиус изоляции – 14 мм, а внешний радиус электропроводной оболочки – 15 мм. Внешняя граница расчетной области выбиралась на расстоянии 16 мм от оси кабеля. Выполнены расчеты векторного потенциала и напряженности магнитного поля в заданной расчетной области при различных граничных условиях на оси симметрии и внешней границе области. Расчетные зависимости напряженности магнитного поля и векторного потенциала от радиальной координаты для коаксиального кабеля показаны на рис. 4, *а* и *б*.

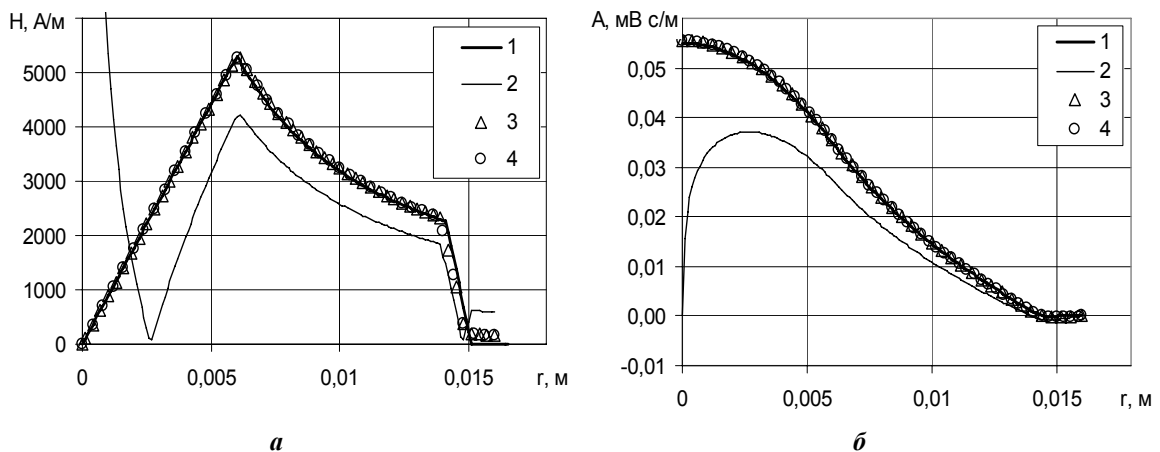


Рис. 4

Линиями 1–4 показаны результаты, полученные при граничных условиях, аналогичных условиям, при которых получены кривые 1–4 на рис. 3, *а* и *б*. Для граничного условия, когда производная векторного потенциала по нормали к границе равнялась нулю, вычислительный процесс при решении задачи для коаксиального кабеля расходится. Из рис. 4, *а* и *б* видно, что точному решению для коаксиального кабеля [3] соответствуют численные решения, полученные при условии равенства нулю производной потенциала на оси симметрии, а также когда на внешней границе расчетной области потенциал равен нулю или определен по формуле (16). Тестирование математической модели с выбранными граничными условиями показало, что погрешность расчетов не превышает 5%.

**Заключение.** Полученные результаты показывают, что при расчете векторного потенциала вне разрядной камеры высоковольтных ЭГУ наиболее целесообразно задавать производную вектор-

ного потенциала по нормали к оси симметрии, равной нулю в соответствии с формулой (19), а на внешней границе расчетной области задавать условие по формуле (16), либо принимать векторный потенциал равным нулю, что наиболее просто реализовывать в вычислительном процессе. Граничные условия возле плоских поверхностей разрядной камеры можно задавать по формулам (17) и (18) по аналогии с точным расчетом [3, 4] магнитного поля вблизи плоской шины с током.

Тестирование математической модели с выбранными граничными условиями показало, что погрешность проводимых расчетов не превышает 5%, поэтому такой подход можно рекомендовать при расчете электромагнитных полей внутри и за пределами разрядной камеры ЭГУ.

1. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. – М.: Энергия, 1970. – 376 с.
2. Вовченко А.И., Тертилов Р.В. Синтез емкостных нелинейно-параметрических источников энергии для разрядно-импульсных технологий // Зб. наук. праць Національного ун-ту кораблебудування. – 2010. – № 4. – С. 118–124.
3. Даревский А.И., Кухаркин Е.С. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. – М.: Высш. школа, 1965. – 284 с.
4. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. – М.: Высш. школа, 1986. – 240 с.
5. Косенков В.М. Влияние длины канала высоковольтного разряда в воде на эффективность пластического деформирования цилиндрической оболочки // ЖТФ. – 2011. – Т. 81. – № 10. – С. 133–139.
6. Кутарев А.М., Журкин М.И. Сравнение результатов расчета магнитного поля методом конечных разностей с использованием векторного и скалярного потенциалов магнитного поля // Вестник ОГУ. – 2005. – №4. – С. 127–130.
7. Латик Р.М., Мартышкин П.В. Расчет и измерения прототипа импульсного магнита конверсионной системы инжекционного комплекса ВЭПП – 5. – Новосибирск.: Институт ядерной физики, 1999. – 33 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
9. Степанов Р.А., Чулин А.В., Фрик П.Г. Винтовое динамо в торе // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – № 1. – С. 109–117.
10. Щерба А.А., Супруновская Н.И. Закономерности повышения скорости нарастания разрядных токов в нагрузке при ограничении их максимальных значений // Техн. електродинаміка. – 2012. – № 5. – С. 3–10.
11. Щерба А.А., Супруновская Н.И. Синтез электрических цепей с емкостными накопителями энергии в полупроводниковых формирователях мощных разрядных импульсов // Техн. електродинаміка. – 2014. – № 1. – С. 3–11.
12. Щерба А.А., Супруновская Н.И., Иващенко Д.С. Моделирование нелинейного сопротивления электроискровой нагрузки для синтеза цепи разряда конденсатора по временным характеристикам // Техн. електродинаміка. – 2014. – № 3. – С. 12–18.
13. Щерба А.А., Супруновская Н.И., Сеницин В.К., Иващенко Д.С. Аперриодические и колебательные процессы разряда конденсатора при принудительном ограничении длительности токов в нагрузке // Техн. електродинаміка. – 2012. – № 3. – С. 9–10.
14. Dimbylow P.J. Current densities in a 2 mm resolution anatomically realistic model of the body induced by low frequency electric fields // Phys. Med. Biol. – 2000. – No 45. – Pp. 1013–1022.
15. Gillard A., Golovashchenko S., Mamutov A. Effect of quasi-static prestrain on the formability of dual phase steels in electrohydraulic forming // Journal of Manufacturing Processes. – 2013. – Vol. 15. – Pp. 201–218.
16. Golovashchenko S.F., Gillard A., Mamutov A., Bonnen J., Tang Z. Electrohydraulic Trimming of Advanced and Ultra High Strength Steels // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – Vol. 214. – Pp. 1027–1043.
17. Kosenkov V.M., Bychkov V.M. Mathematical modeling of transient processes in the discharge circuit and chamber of an electrohydraulic installation // Surface engineering and applied electrochemistry. – 2015. – Vol. 51. – No 2. – Pp. 167–173.
18. Rezinkina, M., Bydianskaya, E., Shcherba, A. Alteration of brain electrical activity by electromagnetic field // Environmentalist. – 2007. – Vol. 27. – No 4. – Pp. 417–422.
19. Shcherba A.A., Kosenkov V.M., Bychkov V.M. Mathematical closed model of electric and magnetic fields in the discharge chamber of an Electrohydraulic installation // Surface engineering and applied electrochemistry. – 2015. – Vol. 51. – No 6. – Pp. 581–588.
20. Taflove A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. – Boston; London: Artech House. – 2000. – 852 p.

УДК 519.6:537.8:537.528

## ГРАНИЧНІ УМОВИ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ВСЕРЕДИНИ ТА ЗОВНІ РОЗРЯДНОЇ КАМЕРИ ВИСОКОВОЛЬТНОЇ ЕЛЕКТРОГІДРАВЛІЧНОЇ УСТАНОВКИ

В.М.Косенков, канд.техн.наук, В.М.Бичков

e-mail: [v.m.kosenkov@gmail.com](mailto:v.m.kosenkov@gmail.com)

Інститут імпульсних процесів і технологій НАН України, пр. Жовтневий, 43 -А, Миколаїв, 54018, Україна.

Визначено особливості вибору граничних умов при математичному моделюванні електромагнітного поля (ЕМП) високовольтної електрогідролічної установки в обмеженому об'ємі розрахункової області за межами розрядної камери. Їхнє використання при розрахунку ЕМП усередині і поза межами розрядної камери дозволяє отримувати розподіл поля, еквівалентний розподілу ЕМП при використанні точних граничних умов на нескінченності – помилка складає не більше 5%. Розробле-

но математичну модель і алгоритм рішення отриманої системи рівнянь на основі чисельних методів. Верифікація моделі і алгоритму виконана на задачах, що допускають точні рішення. Бібл. 20, рис. 4.

**Ключові слова:** електричний розряд, конденсатор, розрядний канал у воді, математична модель, електромагнітне поле, електрогідрравлічна установка, граничні умови.

## BOUNDARY CONDITIONS FOR MATHEMATICAL SIMULATION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD INSIDE AND OUTSIDE OF THE DISCHARGE CHAMBER OF HIGH-VOLTAGE ELECTRO-HYDRAULIC INSTALLATION

V.M. Kosenkov, V.M. Bychkov

Institute of pulse processes and technologies of National Academy of Sciences of Ukraine,

pr. Zhovtnevyi, 43-a, Mykolayiv, 54018, Ukraine.

E-mail: [v.m.kosenkov@gmail.com](mailto:v.m.kosenkov@gmail.com)

*Features of the defining of boundary conditions for mathematical simulation of electromagnetic field (EMF) of high-voltage electro-hydraulic installation in final volume of computational domain outside of the discharge chamber are determined. Their use in the calculation of EMF inside and outside of discharge chamber allows to obtain the field distribution, which is equivalent to the distribution of EMF when using the exact boundary conditions at infinity - the error is not more than 5%. The mathematical model and algorithm for solving the obtained system of equations based on numerical methods are developed. Verification of the model and the algorithm is executed on the tasks that admit exact solutions. References 20, figures 4.*

**Keywords:** electrical discharge, capacitor, discharge channel in the water, the mathematical model, electromagnetic field, electro-hydraulic installation, boundary conditions.

1. Binns K., Laursen P. Analysis and computation of electrical and magnetic field problems. – Moskva: Energiia, 1970. – 376 p. (Rus)
2. Vovchenko A.I., Tertilov R.V. Synthesis of capacitive non-linear- parametrical energy sources for discharge-pulse technologies // Zbirnyk naukovykh pratz Natsionalnoho Universytetu Korablebuduvannia. – 2010. – No 4. – Pp. 118–124. (Rus)
3. Darevsky A.I., Kukharkin Ye.S. Theoretical foundations of electrical engineering. Part 2. – Moskva: Vysshaia shkola, 1965. – 284 p. (Rus)
4. Demirchan K.S., Chechurin V.L. Machine calculations of electromagnetic fields. – Moskva: Vysshaia shkola, 1986. – 240 p. (Rus)
5. Kosenkov V.M. Influence of the length of the channel of a high-voltage discharge in water on the efficiency of plastic deformation of a cylindrical shell // Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki. – 2011. – Vol. 81. – No 10. – Pp. 133–139.
6. Kutarev A.M., Zhurkin M.I. Comparison of the calculated magnetic field by the finite difference method with use of the vector and scalar potential of the magnetic field // Vestnik OGU. – 2005. – No 4. – Pp. 127–130. (Rus)
7. Lapik R.M., Martyshkin P.V. Calculation and measurements of the prototype magnet of the conversion system of VEPP-5 injection complex. – Novosibirsk: Institut Yadernoi Fiziki, 1999. – 33 p. (Rus)
8. Samarsky A.A., Gulin A.V. Numerical methods. – Moskva: Nauka, 1989. – 432 p. (Rus)
9. Stepanov R.A., Chupin A.V., Frik P.G. Screw dynamo in a torus // Vychislitelnaia Mekhanika Sploshnykh Sred. – 2008. – Vol. 1. – Pp. 109–117. (Rus)
10. Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Synthesis of electrical circuits with capacitive energy storages in semiconductor powerful shapers of discharge pulses // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2014. – No 1. – Pp. 3–11. (Rus)
11. Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Regularities of increasing rate of current rise under loading at limiting its maximal values // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2012. – No 5. – Pp. 3–10. (Rus)
12. Shcherba A.A., Suprunovska N.I., Ivashchenko D.S. Modeling of nonlinear resistance of electro-spark load for synthesis of discharge circuit of capacitor by time parameters // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2014. – No 3. – Pp. 12–18. (Rus)
13. Shcherba A.A., Suprunovska N.I., Synytsyn V.K., Ivashchenko D.S. Aperiodic and Oscillatory Processes of Capacitor Discharge at Forced Limitation of Duration // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2012. – No 3. – Pp. 9–10. (Rus)
14. Dimbylow P.J. Corrent densities in a 2 mm resolution anatomically realistic model of the body induced by low frequency electric fields // Phys. Med. Biol. – 2000. – No 45. – Pp. 1013–1022.
15. Gillard A., Golovashchenko S., Mamutov A. Effect of quasi-static prestrain on the formability of dual phase steels in electrohydraulic forming // Journal of Manufacturing Processes. – 2013. – Vol. 15. – Pp. 201–218.
16. Golovashchenko S.F., Gillard A., Mamutov A., Bonnen J., Tang Z. Electrohydraulic Trimming of Advanced and Ultra High Strength Steels // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – Vol. 214. – Pp. 1027–1043.
17. Kosenkov V.M., Bychkov V.M. Mathematical modeling of transient processes in the discharge circuit and chamber of an electrohydraulic installation // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. – 2015. – Vol. 51. – No 2. – Pp. 167–173.
18. Rezinkina, M., Bydianskaya, E., Shcherba, A. Alteration of brain electrical activity by electromagnetic field // Environmentalist. – 2007. – Vol. 27. – No 4. – Pp. 417–422.
19. Shcherba A.A., Kosenkov V.M., Bychkov V.M. Mathematical closed model of electric and magnetic fields in the discharge chamber of an Electrohydraulic installation // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. – 2015. – Vol. 51. – No 6. – Pp. 581–588.
20. Taflov A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. – Boston; London: Artech House. – 2000. – 852 p.

Надійшла 11.11.2014

Остаточний варіант 25.02.2016