

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ГРИНА

**О.Я. Коновалов\***, канд.техн.наук, **В.М. Михайлов**, докт.техн.наук, **Н.П. Петренко**  
**Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"**,  
 ул. Багалия, 21, Харьков, 61002, Украина, e-mail: [o.y.konovалov@gmail.com](mailto:o.y.konovалov@gmail.com)

*Разработан метод решения задачи продолжения магнитного потока с цилиндрической поверхности, на которой задано распределение касательной составляющей магнитной индукции, при помощи системы кольцевых бесконечно тонких проводников с токами и соответствующей функции Грина. Приведен пример определения профиля массивного одновиткового соленоида, создающего заданное распределение индукции импульсного магнитного поля на поверхности соосной длинной цилиндрической проводящей оболочки при резком поверхностном эффекте. Библ. 7, рис. 3.*

**Ключевые слова:** задача продолжения магнитного потока, функция Грина, импульсное магнитное поле, профиль массивного соленоида, резкий поверхностный эффект.

**Введение.** Сильные импульсные магнитные поля сложного пространственного распределения, используемые в магнитно-импульсных технологиях обработки металлов и прессования порошковых материалов, установках для ускорения проводящих тел, электрических аппаратах и экспериментальной физике, получают при помощи массивных соленоидов, выдерживающих значительные электродинамические усилия [1, 4]. Для определения профилей таких соленоидов, работающих в условиях резкого поверхностного эффекта, формулируют и решают задачу продолжения поля (силовой функции или магнитного потока) с оси или граничной поверхности во внешнее пространство – задачу Коши для уравнения эллиптического типа [2, 3], затем находят линии поля, одну из которых выбирают в качестве границы искомого профиля. В подынтегральные функции несобственных интегралов известных аналитических решений этой задачи [5] входит интегральное преобразование Фурье, заданное на граничной поверхности распределения поля  $F(\lambda)$ , однако оно известно для небольшого числа распределений. Цель работы – решение задачи продолжения поля с цилиндрической граничной поверхности при помощи системы элементарных сосредоточенных источников.

**Идея метода, формулировка и решение задачи продолжения поля.** Допустим, что создающий магнитное поле массивный соленоид можно заменить системой элементарных сосредоточенных источников – кольцевых проводников бесконечно тонкого поперечного сечения с известными токами. Изменяя число, расположение и величину токов элементарных источников, добиваемся соответствия получаемого с их помощью и заданного распределения поля на граничной поверхности. Затем строим линии поля, охватывающие все элементарные источники, и одну из них используем для построения искомого профиля.

Для реализации описанных действий найдем такое решение задачи продолжения поля, которое, в отличие от известных, не содержит  $F(\lambda)$  и в явном виде отражает действие элементарных источников поля. Рассмотрим вначале плоскомеридианное магнитное поле в непроводящей и немагнитной среде над цилиндрической граничной поверхностью  $r = R$ , на которой задано распределение осевой составляющей магнитной индукции в виде четной аналитической функции  $B(R, z)$  ( $r, z$  – радиальная и осевая цилиндрические координаты). Среда в области  $r \leq R$  является идеально сверхпроводящей, поэтому радиальная составляющая магнитной индукции на граничной поверхности равна нулю. Формулировка задачи продолжения магнитного поля с поверхности  $r = R$  относительно магнитного потока  $\Phi(r, z)$  и её решение имеют такой вид [5]:

$$\text{уравнение –} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0; \quad (1)$$

$$\text{граничные условия –} \quad \Phi(R, z) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 2\pi R B(R, z); \quad (2, 3)$$

$$\text{решение –} \quad \Phi(r, z) = 2\sqrt{2\pi R r} \int_0^{\infty} [I_1(\lambda r) K_1(\lambda R) - I_1(\lambda R) K_1(\lambda r)] F(\lambda) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (4)$$

где  $I_1, K_1$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка,  $F(\lambda)$  – косинус-преобразование Фурье  $B(R, z)$ ,  $\lambda$  – параметр преобразования.

Рассмотрим теперь плоскомеридианное магнитное поле кольцевого элементарного источника радиуса  $R_1$  с единичным током  $I = 1$ , внутри которого расположен соосный бесконечно длинный идеально сверхпроводящий цилиндр радиуса  $R$ . Среда вне цилиндра такая же, как и в задаче (1)–(3). Магнитный поток системы кольцевой проводник – цилиндр при  $r > R$  всюду, кроме соответствующей расположению источника точки  $M$  с

© Коновалов О.Я., Михайлов В.М., Петренко Н.П., 2016

\* ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-0679-4214>

координатами на меридианном сечении  $r = R_1$ ,  $z = z_M$ , удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Следовательно, он может быть представлен при помощи известной функции Грина для векторного потенциала  $G_A(r, z)$  [6] в таком виде:

$$\Phi(r, z) = G_\Phi(r, z) = \begin{cases} 2\mu_0 r R_1 \int_0^\infty \left[ K_1(\lambda R_1) \left( I_1(\lambda r) - \frac{I_1(\lambda R)}{K_1(\lambda R)} K_1(\lambda r) \right) \right] \cos(\lambda |z - z_M|) d\lambda, & r < R_1; \\ 2\mu_0 r R_1 \int_0^\infty \left[ K_1(\lambda r) \left( I_1(\lambda R_1) - \frac{I_1(\lambda R)}{K_1(\lambda R)} K_1(\lambda R_1) \right) \right] \cos(\lambda |z - z_M|) d\lambda, & r > R_1, \end{cases} \quad (5)$$

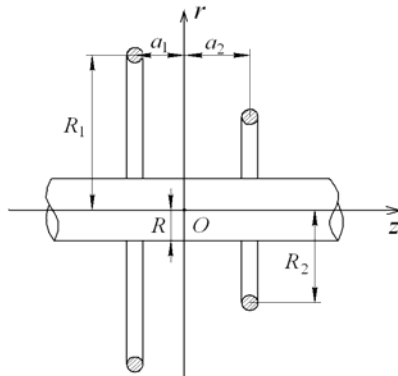


Рис. 1

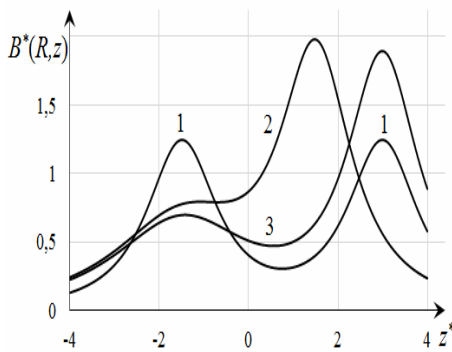


Рис. 2

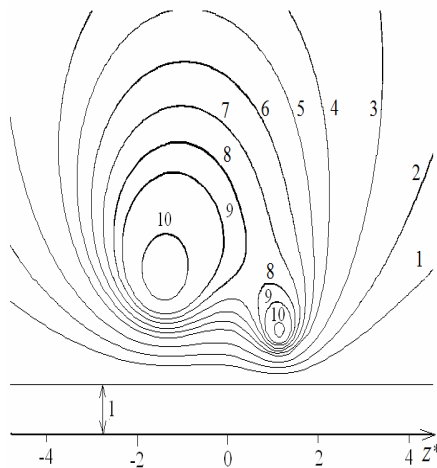


Рис. 3

индукции. В соленоиде и цилиндре резко проявляется поверхностный эффект. Заменяем соленоид, например, двумя кольцевыми источниками с одинаковыми токами  $I$ , расположенными на расстояниях  $a_1$  и  $a_2$  от плоскости  $z = 0$  (рис. 1). На рис. 2 показаны распределения индукции магнитного поля на поверхности цилиндра, полученные при  $a_1/R = 1,5$  и  $R_2/R = 2$ . Изменяли размеры  $R_1, a_2$ : для кривой 1 –  $R_1/R = 2, a_2/R = 3$ ; 2 – 3, 1,5; 3 – 3, 3. Принято  $B^*(R, z) = \pi R B(R, z) / (\mu_0 I)$ ,  $z^* = z/R$ . Пусть кривая 2 имеет наименьшие расхождения с заданным распределением  $B^*(R, z)$ . Для исходных данных этой кривой при помощи формулы (5) были рассчитаны координаты линий уровня магнитного потока  $\Phi(r, z)$  (силовых линий), показанных на рис. 3: для кривых 1–10 зна-

где  $G_\Phi(r, z)$  – функция Грина для магнитного потока,  $G_\Phi(r, z) = 2\pi r G_A(r, z)$ ,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Докажем, что зависимость (5) в области  $r < R_1$ , содержащей граничную поверхность, при условии, что удовлетворяется граничное условие (3), тождественна решению (4), т.е. является решением задачи (1) – (3). Для этого при помощи (5) получаем формулу для магнитной индукции на поверхности цилиндра

$$B(R, z) = \frac{\mu_0 R_1}{\pi R} \int_0^\infty \frac{K_1(\lambda R_1)}{K_1(\lambda R)} \cos(\lambda |z - z_M|) d\lambda. \quad (6)$$

Заметим, что формула (6) согласуется с известной формулой для поверхностной плотности тока в подобной задаче [7, с. 412]. Предположим теперь, что  $B(R, z)$ , определяемое формулой (6) при  $z_M = 0$ , является заданным распределением магнитной индукции. Выделим из подынтегральной функции формулы (6) косинус-преобразование Фурье  $B(R, z)$ . Принимая  $z_M = 0$ , получим

$$F(\lambda) = \frac{\mu_0 R_1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{K_1(\lambda R_1)}{K_1(\lambda R)}. \quad (7)$$

Подстановка (7) в (4) приводит к формуле (5) при  $z_M = 0$ ,  $r < R_1$ , что и доказывает сделанное утверждение (справедливость его при  $z_M \neq 0$  очевидна).

Таким образом, формула (5) является искомым решением задачи (1)–(3) для реализации разработанного метода. Естественно, что и сумма решений вида (5), слагаемые которой соответствуют различным кольцевым проводникам с токами, является решением этой задачи. В случае, когда  $I \neq 1$ , в формулы (5), (6) нужно ввести постоянный множитель  $I$ , имеющий размерность тока (то же относится и к системе проводников с токами  $I_k \neq 1$ ). В некоторых случаях соответствие формы получаемого и заданного распределений поля на граничной поверхности может быть достигнуто при небольшом числе элементарных источников и не требует значительного числа итераций.

Для определения профиля прямолинейного длинного массивного проводника или системы таких проводников, создающих заданное магнитное поле на плоской граничной поверхности, проводники заменяем параллельными осями с известными токами. Некоторые решения подобных задач, выраженные в элементарных функциях, изложены в одной из работ авторов [2].

**Пример расчета.** Пусть требуется найти профиль массивного одновиткового соленоида, обеспечивающего на поверхности соосного длинного проводящего цилиндра заданное распределение магнитной

чения  $\Phi^*(r, z)$  равны 0,0083; 0,013; 0,019; 0,026; 0,030; 0,034; 0,039; 0,044; 0,049; 0,055,  $\Phi^*(r, z) = \Phi(r, z) / (2\mu_0 RI)$  (все линии являются замкнутыми). Одну из этих линий, охватывающих оба кольцевых источника, и выбираем в качестве контура искомого профиля соленоида.

**Выводы.** Функция Грина для магнитного потока системы кольцевой единичный ток – соосный идеально сверхпроводящий бесконечно длинный цилиндр, а также сумма таких функций, каждое слагаемое которой соответствует току  $I_k$  из совокупности кольцевых токов  $k = \overline{1, n}$ , являются решениями задачи продолжения магнитного поля с цилиндрической поверхности, если заданное на ней распределение осевой составляющей магнитной индукции определяется нормальной производной функции Грина или суммой таких производных. Полученное решение рассматриваемой задачи пригодно для различных заданных распределений магнитной индукции на граничной поверхности и не содержит, в отличие от (4), их интегральных преобразований Фурье, которые могут быть не известны.

1. Белый И.В., Фуртик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков: Вища школа, 1977. – 168 с.
2. Васецкий Ю.М., Власов Д.И., Коновалов О.Я., Михайлов В.М. Некоторые решения задач продолжения плоского поля в элементарных функциях // Збірник праць конференції SIMULATION-2012. – К.: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – 2012. – С. 232-236.
3. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск, 1962. – 352 с.
4. Лагутин А.С., Ожогин В.И. Сильные импульсные магнитные поля в физическом эксперименте. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 192 с.
5. Михайлов В.М. Определение профилей электродов и соленоидов для создания заданных распределений поля // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск “Проблеми сучасної електротехніки”. – 2000. – Ч. 6. – С. 13-16.
6. Михайлов В.М. Функция Грина и интегральные уравнения плоскомеридианных полей устройств с длинными цилиндрами // Электричество. – 1991. – № 10. – С. 38-42.
7. Смайт В. Электростатика и электродинамика. – М.: ИЛ, 1954. – 604 с.

УДК 621.3

#### РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРОДОВЖЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ З ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПОВЕРХНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ГРИНА

**О.Я. Коновалов**, канд.техн.наук, **В.М. Михайлов**, докт.техн.наук, **М.П. Петренко**

**Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»**,

**вул. Багалия, 21, Харків, 61002, Україна.**

**e-mail: [o.v.konovalov@gmail.com](mailto:o.v.konovalov@gmail.com)**

*Розроблено метод розв'язання задачі продовження магнітного потоку з циліндричної поверхні, на якій задано розподіл дотичної складової магнітної індукції, за допомогою системи кільцевих нескінченно тонких провідників зі струмами й відповідної функції Гріна. Наведено приклад визначення профілю масивного одновиткового соленоїда, що утворює заданий розподіл індукції імпульсного магнітного поля на поверхні співвісної довгої циліндричної провідної оболонки при різкому поверхневому ефекті. Бібл. 7, рис. 3.*

**Ключові слова:** задача продовження магнітного потоку, функція Гріна, імпульсне магнітне поле, профіль масивного соленоїда, різкий поверхневий ефект.

#### SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE MAGNETIC FIELD CONTINUATION FROM CYLINDRICAL SURFACE BY USING GREEN'S FUNCTION

**O.Ya. Konovalov, V.M. Mikhailov, M.P. Petrenko**

**National technical university “Kharkiv polytechnic institute”**,

**Bagaliia str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine.**

**e-mail: [o.v.konovalov@gmail.com](mailto:o.v.konovalov@gmail.com)**

*The method for solving of the problem of continuing magnetic flux from cylindrical surface with a given distribution of the tangential component of the magnetic induction is developed. The using of circular infinitely thin conductors with the currents and the responding of Green's function is proposed. An example of determining the profile of massive single-turn solenoid, for generating given induction distribution of pulsed magnetic field on surface of the long cylindrical shell with sharp skin effect in conductors. References 7, figures 3.*

**Key words:** problem of the magnetic flux continuation, Green's function, pulse magnetic field, profile of massive solenoid, a sharp skin effect.

1. Belyj I.V., Fertik S.M., Khimenko L.T. Magnetic pulse-forming hand-book. – Kharkiv: Vyshcha shkola, 1977. – 168 p. (Rus)
2. Vasetskiy Yu.M., Vlasov D.I., Konovalov O.Ya., Mikhailov V.M. Some solves in elementary functions of continue flat field problem // Conference proceedings SIMULATION-2012. – 2012. – Pp. 232-236. (Rus)
3. Lavrentev M.M. About some ill-posed problems of mathematical physics. – Novosibirsk, 1962. – 352 p. (Rus)
4. Lagutin A.S., Ozhogin V.I. Strong pulse magnetic fields in physical experiment. – Moskva: Energoatomizdat, 1988. – 192 p. (Rus)
5. Mikhailov V.M. Shapes determination of the electrodes and coils to generate predetermined field distributions // Tekhnichna Elektrodynamika. Tematychnyi vypusk "Problemy suchasnoi elektrotekhniki". – 2000. – Part 6. – Pp. 13-16. (Rus)
6. Mikhailov V.M. The Green's function and integral equations axisymmetric field devices with long cylinders // Elektrichestvo. – 1991. – No 10. – Pp. 38-42. (Rus)
7. Smite V. Electrostatics and Electrodynamics. – Moskva: Inostrannaia Literatura, 1954. – 604 p. (Rus)

Надійшла 15.01.2016

Остаточний варіант 12.07.2016