

## ДВИЖУЩИЕСЯ КООРДИНАТЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ УСТРОЙСТВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ПРОВОДНИКАМИ

О.Я. Коновалов\*, канд.техн.наук, В.М. Михайлов, докт.техн.наук

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт",

ул. Багалия, 21, Харьков, 61002, Украина,

e-mail: [valery.m.mikhailov@gmail.com](mailto:valery.m.mikhailov@gmail.com)

На примере проводящей оболочки анализируется проблема использования движущихся координат в расчетах электромагнитного поля внутри проводящего тела, движущегося с нерелятивистской скоростью, при известном внешнем магнитном поле. Обоснована необходимость обратного перехода из движущихся вместе с проводящим телом координат в исходные неподвижные координаты. Приведены расчеты магнитно-импульсного деформирования цилиндрической проводящей оболочки при помощи внешнего соленоида, на который разряжается конденсатор, с учетом изменения ее толщины. Библ. 7, рис. 3.

**Ключевые слова:** магнитное поле, движущийся проводник, движущиеся координаты.

**Введение.** В книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица отмечается существенное упрощение задачи расчета электромагнитного поля в движущемся недеформируемом проводящем теле, если используется жестко связанная с ним система координат (движущиеся координаты) [4, с. 306]. Внешнее магнитное поле при этом полагается известным. Очевидные упрощения – более простая форма уравнений поля в проводящем теле, которое становится неподвижным, и получение аналитических соотношений [1, 5].

*Целью работы* является анализ особенностей применения движущихся координат в тех случаях, когда внешнее магнитное поле является неизвестным и зависит от влияния неподвижных проводников, а также вихревых токов, вызванных движением проводящего тела.

**Основные допущения и исходная формулировка задачи.** Пусть однородное осевое магнитное поле создается цилиндрическим достаточно длинным бесконечно тонким неподвижным соленоидом 1, который выводами  $a, b$  подключается к источнику напряжения  $u(t)$  (рис. 1). Активным сопротивлением соленоида пренебрегаем. Внутри соленоида 1, соосно с ним, расположена цилиндрическая проводящая оболочка 2, деформируемая под действием внешнего магнитного поля. Напряженности магнитного и электрического поля  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  в цилиндрических координатах  $r, \psi, z$  (рис. 1,  $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$  – орты) имеют по одной, зависящей только от координаты  $r$  ненулевой проекции  $H_z$  и  $E_\psi$ , индексы которых в дальнейшем опускаем. Среда вне проводников является непроводящей и немагнитной. Примем следующие основные допущения: 1) выполняются условия квазистационарности; 2) электрофизические характеристики оболочки постоянны; 3) скорость движения оболочки значительно меньше скорости света; 4) толщина оболочки  $d \ll r_1$  ( $r_1$  – внутренний радиус оболочки), а волна электромагнитного поля, проникающего в оболочку, близка к плоской.

Исходная формулировка электромагнитной части задачи в неподвижных цилиндрических координатах имеет следующий вид:

уравнение для напряженности магнитного поля  $H(r, t)$  –

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \mu\gamma \frac{dH}{dt} = 0; \quad (1)$$

начальное условие –  $H(r, 0) = 0;$  (2)

граничные условия –  $\frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_1} - \mu_0\gamma \left[ V(r_1, t)H(r_1, t) + \frac{r_1}{2} \frac{dH(r_1, t)}{dt} \right] = 0,$  (3)

$$\frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_2} - \mu_0\gamma \left[ V(r_2, t)H(r_2, t) - \frac{r_3^2 - r_2^2}{2r_2} \frac{dH(r_2, t)}{dt} \right] - \frac{\gamma u(t)}{2\pi r_2 w} = 0. \quad (4)$$

Формулировка (1) – (4) отличается от приведенной в работе [2] уравнением (1) и граничным условием (4). В уравнении (1) использована полная производная  $H(r, t)$  по времени  $t$  [4],  $\mu, \gamma$  – абсолютная магнитная проницаемость и удельная электропроводность оболочки. В граничных условиях  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $w$  – число витков соленоида,  $V(r_1, t)$  и  $V(r_2, t)$  – скорости движения соответственно внутренней и внешней поверхностей оболочки,  $r_2, r_3$  – радиусы внешней и внутренней поверхности оболочки и соленоида. На рис. 1,  $a$  стрелками показаны положительные направления

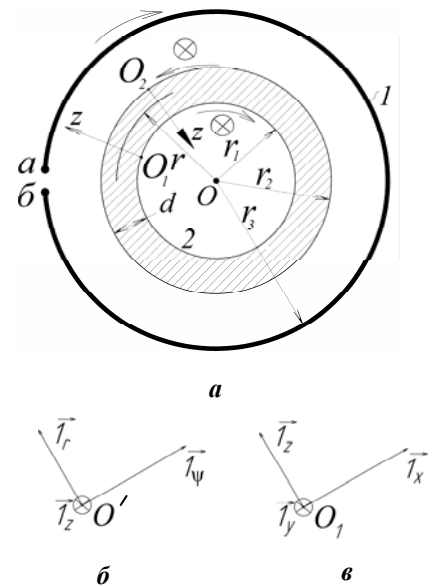


Рис. 1

обхода контуров, крестиками – направление  $\vec{H}$ . Напряжение  $u(t)$  принято равномерно распределенным по виткам соленоида. В уравнении движения оболочки не учитываются упругие деформации, а также использовано условие текучести Сен-Венана [3].

**Переход в движущиеся координаты.** Вначале полагаем, что все точки оболочки движутся с одинаковой скоростью и ее толщина  $d$  остается неизменной, т.е. соблюдаются известные условия перехода в движущиеся декартовы координаты  $x, y, z$  с началом в точке  $O_1$  (рис. 1,  $a, b, \vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  – орты, ось  $z$  перпендикулярна

граничным поверхностям) [4]. В этих координатах  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  имеют по одной, зависящей только от координаты  $z$  ненулевой проекции  $H_y$  и  $E_x$ . С одной стороны, в движущихся координатах оболочка неподвижна. Поэтому в уравнении для  $H(z, t)$ ,  $0 \leq z \leq d$ , соответствующем и аналогичном (1), полная производная по времени переходит в частную и, следовательно, отсутствует информация о движении оболочки. Кроме того, магнитное поле на граничных поверхностях оболочки, зависящее от ее движения, неизвестно. С другой стороны, задача для уравнения поля решается совместно с задачей для уравнения движения оболочки. Таким образом, неизбежен обратный переход из движущихся координат, в которых наблюдатель не видит движения [6], в исходные неподвижные координаты. Аналитические или численные соотношения между  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  на граничных поверхностях оболочки, полученные в движущихся координатах, соответствуют точке зрения Лагранжа на движение в неподвижных координатах [7]. Поэтому при обратном переходе напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  вследствие инвариантности сохраняет свои значения, а напряженность электрического поля принимает смысл эффективной напряженности электрического поля  $\vec{E}^o$  [4].

При  $d \neq \text{const}$  точки оболочки, имеющие различные радиальные координаты, движутся с различными скоростями, и поэтому в движущихся координатах оболочка не является неподвижной, что затрудняет получение аналитических соотношений. Однако использование движущихся координат с началом на одной из граничных поверхностей может быть удобным для составления алгоритма численного решения задачи. В рассматриваемом случае в уравнении для  $H(z, t)$ , соответствующем (1), полная производная по времени остается, а при расположении начала координат в точке  $O_1$  в дополнительных условиях (2) – (4) нужно всюду заменить  $r$  на  $z$ , дифференцирование по  $r$  на дифференцирование по  $z$ , границы  $r = r_1, r_2$  на границы  $z = 0, d$ . При расположении начала движущихся координат в точке  $O_2$  изменяются направление оси  $z$  и положение границ  $z = 0$  и  $z = d$  (рис. 1,  $a$ ), что необходимо учесть при формулировке граничных условий. Для определения реальной скорости движения оболочки обратный переход в исходные неподвижные координаты необходим и в этом случае. Таким

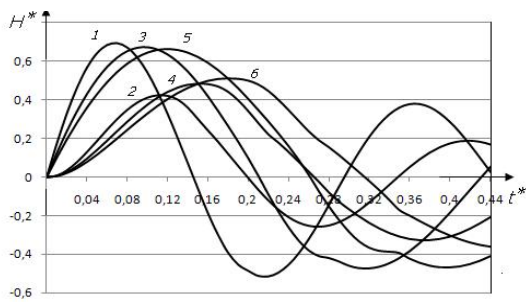


Рис. 2

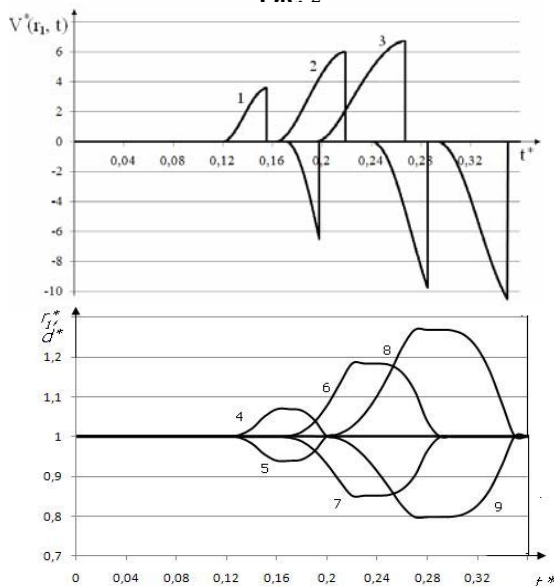


Рис. 3

образом, численное решение электромагнитной части задачи осуществляется в движущихся декартовых координатах, но координаты и скорости отдельных точек, учитываемые в этом решении, определяются в неподвижных цилиндрических координатах.

**Результаты расчетов.** Рассматривался разряд конденсатора емкостью  $C$ , предварительно заряженного до напряжения  $U_0$ , на соленоид. Для этого случая в граничном условии

$$(4) \text{ следует положить } u(t) = U_0 - \frac{b}{Cw} \int_0^t H(r_2, \tau) d\tau \quad (b - \text{длина}$$

соленоида). Исходные данные:  $r_1(0) = 8$  мм,  $d(0) = 0,5$  мм,  $r_3(0) = 15$  мм,  $w = 20$ ,  $b = 150$  мм,  $\gamma = 0,15 \cdot 10^8$  См/м,  $\mu = \mu_0$ , плотность материала оболочки  $\rho_{\text{мех}} = 0,27 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>, предел текучести  $\sigma_s = 1,04 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. Сжатие оболочки в начале процесса предотвращали помещенным внутри нее диэлектрическим цилиндром. Учитывали изменение толщины оболочки. На рис. 2 представлены результаты расчета напряженности магнитного поля на внешней (кривые 1, 3, 5) и внутренней (кривые 2, 4, 6) поверхностях оболочки, а на рис. 3 – скорости движения  $V(r_1, t)$  (кривые 1–3) и радиуса внутренней поверхности (кривые 4, 6, 8), а также толщины оболочки (кривые 5, 7, 9). Величины со звездочками являются безразмерными:  $t^* = t/t_0$ ,  $H^* = H/H_0$ ,  $d^* = d(t)/d(0)$ ,  $r_1^* = r_1/r_1(0)$ ,  $V^*(r_1, t) = V(r_1, t)/V_0$ ,  $t_0 = 500$  мкс,  $H_0 = 1,28 \cdot 10^7$  А/м,  $V_0 = 16$  м/с. Изменяли  $C$  и  $U_0$  так, чтобы величина  $U_0 \sqrt{C}$  оставалась постоянной:  $C = 300, 600, 900$  мкФ, соответственно  $U_0 = 5,657; 4; 3,266$  кВ. Первым значениям  $C$  и  $U_0$  соответствуют кривые 1, 2 на рис. 2 и 1, 4, 5 на рис. 3, вторым – кривые

3, 4 и 2, 6, 7, третьим – 5, 6 и 3, 8, 9. Из рис. 2 и 3 следует, что при увеличении емкости и принятом соотношении между  $C$  и  $U_0$  первая амплитуда  $H(r_2, t)$  изменяется незначительно, в то время как первая амплитуда  $H(r_1, t)$  существенно возрастает из-за увеличения длительности импульса и ускорения проникновения магнитного поля внутрь оболочки. Это приводит к увеличению скорости расширения и внутреннего радиуса оболочки, а также к уменьшению её толщины. После расширения и остановки происходит сжатие оболочки, при этом скорость изменяет знак на противоположный, а радиус  $r_1$  и толщина принимают начальные значения. Максимальные скорости сжатия выше, поскольку сжимаемая оболочка после расширения имеет меньшую исходную толщину.

**Выводы.** 1. Если внешнее магнитное поле на поверхности движущегося в нем проводящего тела неизвестно, то после перехода в движущиеся вместе с телом координаты и, возможно, получения аналитических соотношений между векторами поля на его поверхностях необходим обратный переход в исходные неподвижные координаты, в которых определяется скорость недеформируемого тела или скорость точек деформируемого тела, используемые в численном решении комплексной задачи.

2. В случае недеформируемого тела при переходе из движущихся в неподвижные координаты частная производная по времени напряженности магнитного поля, входящая в уравнение, переходит в полную производную, а для составления граничных условий необходимо использовать закон электромагнитной индукции с полной производной магнитного потока.

1. Биченков Е.И. Влияние конечной проводимости на получение сильных магнитных полей путем быстрого обжаривания проводящих оболочек // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1964. – № 6. – С. 3-5.
2. Бондина Н.Н., Коновалов О.Я., Михайлов В.М. Преобразование краевой задачи проникновения импульсного магнитного поля в движущуюся проводящую оболочку // Технічна електродинаміка. – 2014. – № 5. – С. 8-10.
3. Ильющин А.А., Огибалов П.М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. – М.: Изд. МГУ, 1960. – 288 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИТТЛ, 1982. – 624 с.
5. Михайлов В.М., Письменный Э.И. Импульсное магнитное поле массивного соленоида с движущейся проводящей оболочкой // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1978. – № 5. – С. 73-78.
6. Поливанов К.М. К 100-летию «Трактата об электричестве и магнетизме» Дж.К. Максвелла // Электричество. – 1974. – № 3. – С. 1-8.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 536 с.

УДК 621.3

#### **РУХОМІ КООРДИНАТИ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ ПРІСТРОЇВ З ПРОВІДНИКАМИ, ЩО РУХАЮТЬСЯ**

**О. Я. Коновалов**, канд.техн.наук, **В. М. Михайлов**, докт.техн.наук

**Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»**,

**вул. Багалия, 21, Харків, 61002, Україна.**

**e-mail: [valery.m.mikhailov@gmail.com](mailto:valery.m.mikhailov@gmail.com)**

*На прикладі провідної оболонки аналізується проблема використання рухомих координат у розрахунках електромагнітного поля всередині провідного тіла, що рухається з нерелятивістською швидкістю, при невідомому зовнішньому магнітному полі. Обґрунтовано необхідність зворотного переходу з координат, що рухаються з провідним тілом, у вихідні нерухомі координати. Наведено результати розрахунків магнітно-імпульсного деформування циліндричної провідної оболонки за допомогою зовнішнього соленоида, на який розряджається конденсатор, з урахуванням зміни її товщини. Бібл. 7, рис. 3.*

**Ключові слова:** магнітне поле, провідник, що рухається, рухомі координати.

#### **MOVING COORDINATES IN ELECTROMAGNETIC FIELD OF DEVICES WITH MOVING CONDUCTORS**

**O.Ya. Konovalov, V.M. Mikhailov**

**National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”**,

**Bagaliia str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine.**

**e-mail: [valery.m.mikhailov@gmail.com](mailto:valery.m.mikhailov@gmail.com)**

*On the conductive shell example the problem of using moving coordinates in calculations of electromagnetic field within conductive body, which moving with non-relative velocity is analyzed. Cases with unknown external magnetic field are observed. A necessity of reverse transition from coordinates, which moving with conductive body, to initial still coordinates is justified. Calculation results of magnetic pulse forming of cylindrical conductive shell by external coil, on which capacitor discharges are presented. The changing of shell thickness is considered. It was founded, that after expansion and stopping the shell the compression with higher velocity. References 7, figures 3.*

**Key words:** magnetic field, moving conductive body, moving coordinates.

1. Bichenkov E.I. Influence finite conductive to strong magnetic field generating by fast forming conductive shell // Zhurnal Prikladnoy Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki. – 1964. – No 6. – Pp. 3-5. (Rus)
2. Bondina N.N., Konovalov O.Ya., Mikhailov V.M. The transformation of a problem about pulsed magnetic field penetration into movable conductive shell // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2014. – No 5. – Pp. 8-10. (Rus)
3. Il'yushin A.A., Ogibalov P.M. Elastic-plastic deformation of hollow cylinders. – Moskva: MSU, 1960. – 288 p. (Rus)
4. Landau L.D., Lifshits E.M. Electrodynamics of the continuum. – Moskva: GITTL, 1982. – 624 p. (Rus)
5. Mikhailov V.M., Pismennyy E.I. Pulsed magnetic field of massive coil with moving conductive shell // Izvestiia AN SSSR. Energetika i Transport. – 1978. – No 5. – Pp. 73-78. (Rus)
6. Polivanov K.M. To century of “A treatise on electricity and magnetism” by J.C. Maxwell // Elektrichestvo. – 1974. – No 3. – Pp. 1-8. (Rus)
7. Sedov L.I. Continuum Mechanics. T. 1. – Moskva: Nauka, 1973. – 536 p. (Rus)

Надійшла 03.02.2016  
Остаточний варіант 14.04.2016