

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СХОДИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**И.С. Петухов**, докт. техн. наук

**Институт электродинамики НАН Украины,**

**пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина. e-mail: [igor\\_petu@mail.ru](mailto:igor_petu@mail.ru)**

*Рассмотрена проблема повышения точности моделирования переменного магнитного поля в ферромагнитной среде методом конечных элементов путем учета высших временных гармоник поля и связанная с ней проблема обеспечения сходимости итерационного процесса. Описана численно-гармоническая модель, а также предложенный алгоритм решения, основанный на модифицированном методе Ньютона. Для ускорения сходимости алгоритм включает процедуру оптимизации коэффициента демпфирования методом золотого сечения, а также свод эвристических правил, обеспечивающих надежность и скорость сходимости. При решении задачи о возбуждении магнитного поля в прямоугольной области синусоидальным током предложенный алгоритм показал сходимость в несколько раз лучшую, чем пакет COMSOL версий 3.1 и 3.5. Библ. 4, рис. 3.*

**Ключевые слова:** ферромагнитная среда, периодический процесс, временные гармоники, поверхностный эффект, метод конечных элементов, метод Ньютона, оптимизация сходимости.

**Введение.** Практически все современные программные продукты, ориентированные на моделирование физических полей, большинство которых основано на методе конечных элементов (МКЭ), содержат средства моделирования переменного магнитного поля в нелинейной электропроводящей среде. Как правило, для упрощения решения во временной области периодический процесс представляется эквивалентной синусоидой. При построении системы уравнений МКЭ для учета влияния нелинейных свойств ферромагнетика по его характеристике намагничивания устанавливается соответствие между комплексными амплитудами напряженности поля и магнитной индукции. Это приводит к погрешностям, связанным с искажением (уплощением) временной зависимости магнитной индукции.

Более точное решение, предложенное в [2], включает в себя несколько гармоник поля и позволяет учесть искажение магнитной индукции, вызванное насыщением ферромагнетика.

В численных моделях увеличение числа искомого амплитуд гармоник в решении влечет за собой кратное увеличение порядка системы уравнений. Такое увеличение не является критическим, если искажение поля вызвано только насыщением ферромагнетика, и для определения потерь от вихревых токов с точностью менее 1 %, как показывают результаты моделирования, достаточно первых трех, максимум пяти гармоник.

Увеличение порядка системы уравнений не является единственным усложнением, вызванным стремлением учесть наличие высших временных гармоник. Вторым усложнением является ухудшение сходимости итерационного процесса решения системы нелинейных уравнений, получаемой с применением МКЭ. Для обеспечения хорошей сходимости в [2] было предложено использовать модифицированный (демпфированный) метод Ньютона [3] с оптимизацией коэффициента демпфирования и дополнительным эвристическим алгоритмом.

*Целью настоящей статьи* является исследование скорости сходимости предложенного алгоритма.

**Математическая модель.** Двухмерное магнитное поле в проводящей среде описывается уравнением относительно векторного магнитного потенциала  $A(x, y, t)$ , имеющего одну пространственную составляющую

$$\nabla \times \mathbf{f}(\nabla \times A) + \gamma \partial A / \partial t = J_w, \quad (1)$$

где  $\mathbf{f}$  – нелинейная векторная функция, отражающая зависимость пространственных составляющих напряженности поля ( $H_x, H_y$ ) от составляющих магнитной индукции ( $B_x, B_y$ ),  $\gamma$  – электропроводность среды,  $t$  – время,  $J_w$  – сторонняя плотность тока. Периодическое во времени решение этого уравнения  $A(x, y, t)$  представим тригонометрическим полиномом, приняв период равным единице. Тогда, выбрав базисные функции в виде произведения тригонометрических функций и геометрических базисных функций  $N(x, y)$  [1], получаем общий вид решения на сетке конечных элементов, содержащей  $n$  узлов

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^{n_g} [A_{cg} \cos(gt) + A_{sg}(x, y) \sin(gt)] N(x, y), \quad (2)$$

где  $n_g$  – число гармоник,  $A_{cg}, A_{sg}$  – соответственно амплитуды составляющих каждой из гармоник.

Для исследования влияния на процесс сходимости исключительно нелинейности рассмотрим простейшую прямоугольную область (рис. 1), состоящую из ферромагнитной подобласти (внизу) и подобласти, моделирующей обмотку (вверху), равномерно заполненную синусоидально изменяющейся плотностью тока  $J_w$ . Выбранный тип граничных условий на рис. 1 обеспечивает одномерный характер магнитного поля с целью исклю-

чения влияния геометрических неоднородностей на процесс сходимости решения. Физически рассматриваемая подобласть соответствует половине сечения протяженного стального листа, на поверхности которого расположена равномерно распределенная однофазная обмотка с током.

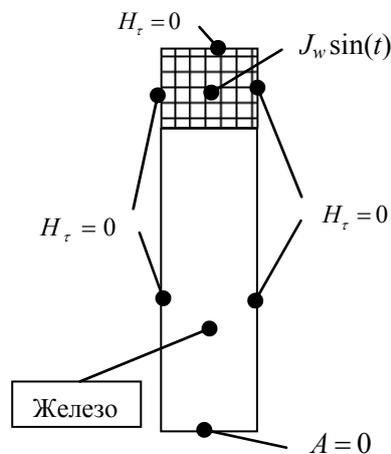


Рис. 1

на левой границе полученного интервала. Кроме того, в алгоритм вводятся три эвристические правила [2]: 1) если после четырех шагов оптимизации левая граница найденного интервала имеет значением нуль, то следует брать минимальное (наперед заданное) значение  $\beta$ ; 2) если на прошлой и текущей итерациях выполнялось условие 1, то значение  $\beta$  следует удвоить; 3) если условие 1 выполнялось на предыдущей итерации, а на текущей найдено оптимальное значение  $\beta=1$ , то на протяжении следующих трех итераций значение  $\beta$  не должно превышать  $1/\sqrt{2}$ .

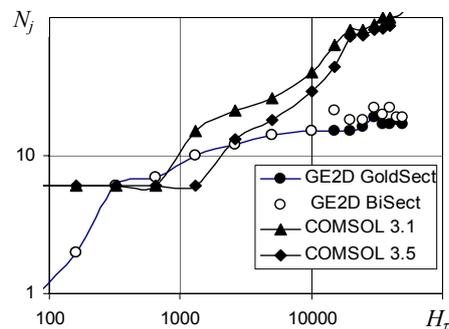


Рис. 2

окончания итерационного процесса было выбрано значение относительной погрешности равное 0,01. Поскольку в используемых программных средствах относительная ошибка определяется по различным алгоритмам, дополнительно оценивалась степень приближения магнитной индукции на поверхности ферромагнетика. Так при требуемом значении относительной погрешности индукция на поверхности уже не изменялась в третьем знаке при дальнейшем уменьшении относительной погрешности вдвое. Более высокую точность потребовать было затруднительно из-за различного порядка конечных элементов в испытываемых программах.

На рис. 2 показаны графики числа итераций  $N_j$  при изменении тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности в диапазоне от 160 до 50000 А/м. Характеристика намагничивания принималась близкой к таковой для стали 3. Попутно в программе GE2D применен

Применение метода Галеркина к краевой задаче для уравнения (1) рассмотренной области позволяет получить систему нелинейных уравнений, решение которой в виде (2) дает возможность определить искомую несинусоидальную зависимость магнитного поля. Принципиальным моментом при решении системы нелинейных уравнений итерационными методами является явное определение матрицы Якоби с использованием дифференциальных параметров ферромагнитной среды [4].

По общепризнанному мнению метод Ньютона обладает самой быстрой сходимостью среди итерационных методов. Однако эта скорость и собственно сходимость наблюдается при «достаточно» близком расположении очередного приближения  $X^j$  к вектору решения. Для улучшения сходимости существуют различные методы, в частности, модифицированный метод Ньютона [3], в котором найденное приращение умножается на коэффициент демпфирования  $\beta$ , и новое приближении вычисляется в соответствии с формулой

$$X^{j+1} = X^j - \beta [J]^{-1} R^j, \quad (3)$$

где  $[J]$  – матрица Якоби,  $R^j$  – вектор невязки на очередной итерации. Ключевым фактором в данном алгоритме является тактика выбора коэффициента демпфирования. В [2] предложено на каждой итерации делать 4 шага поиска минимума нормы невязки методом золотого сечения и выбирать значение  $\beta$

Для аппроксимации характеристики намагничивания использовалась нижеприведенная зависимость магнитной проницаемости от модуля магнитной индукции  $\|B\|$ , обеспечивающая монотонность и гладкость и, тем самым, не являющаяся дополнительным фактором, ухудшающим сходимость

$$\mu = 1 + \mu_{\max} / (1 + \|B\|/B_s)^m, \quad (4)$$

где  $\mu_{\max}$  – ненасыщенное значение магнитной проницаемости,  $B_s$  – индукция, соответствующая «точке перегиба» кривой намагничивания,  $m$  – показатель кривизны кривой намагничивания.

**Результаты моделирования.** Сходимость результатов сравнивалась со сходимостью решения вышеприведенной задачи при помощи программы GE2D, разработанной в Институте электродинамики НАН Украины и пакета COMSOL версий 3.1 и 3.5. Критерием

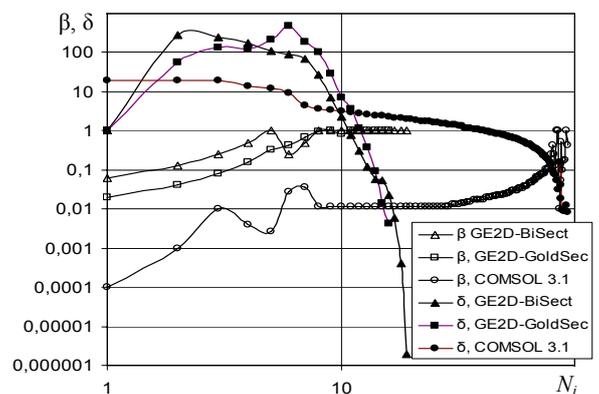


Рис. 3

для оптимизации как метод золотого сечения [3] (GoldSect, см. рис. 2), так и метод деления интервала пополам (BiSect, там же), который показал несколько меньшую эффективность. Результаты свидетельствуют о высокой эффективности предложенного алгоритма, достигающего решения за меньшее в несколько раз число итераций. На рис. 3 показаны зависимости коэффициента демпфирования  $\beta$  и относительной ошибки  $\delta$  от номера итерации  $N_j$  для величины поля на поверхности  $H_z = 25000$  А/м. Характер изменения  $\beta$  и  $\delta$  различен для различных программных средств. Однако достижение коэффициентом демпфирования единичного значения (максимальный разгон) осуществляется гораздо раньше в предложенном алгоритме.

Результаты показывают, что предложенный алгоритм обеспечивает более быструю (в 4...5 раз при данной степени нелинейности) сходимость итерационного алгоритма моделирования поверхностного эффекта в ферромагнитной среде.

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир. – 1975. – 543 с.
2. *Петухов И.С.* Численное моделирование поверхностного эффекта в ферромагнетике при синусоидальном магнитном потоке // Техн. электродинамика. – 2013. – № 6. – С. 24–29.
3. *Реклейтис Г., Рейвиндран К., Рэгсдел А.* Оптимизация в технике: Кн. 1. – М.: Мир. – 1986. – 349 с.
4. *Фильц Р.В.* Общий алгоритм определения магнитных параметров нелинейных сред // Математические методы и физико-механические поля. – 1975. – Вып. 16. – С. 101–106.

УДК 621.3.014.4

### ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ЗБІЖНОСТІ ПЕРІОДИЧНОГО РІШЕННЯ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ НЕЛІНІЙНОГО ПОВЕРХНЕВОГО ЕФЕКТУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**І.С.Петухов**, докт.техн.наук

**Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна.**

**e-mail: [igor\\_petu@mail.ru](mailto:igor_petu@mail.ru)**

*Розглянуто проблему підвищення точності моделювання змінного магнітного поля у ферромагнітному середовищі методом скінченних елементів шляхом врахування вищих часових гармонік поля та пов'язана з нею проблема забезпечення збіжності ітераційного процесу. Описано чисельно-гармонічну модель, а також запропоновано алгоритм рішення, заснований на модифікованому методі Ньютона. Для прискорення збіжності алгоритм містить процедуру оптимізації коефіцієнта демпфування за методом золотого перетину, а також набір правил, які забезпечують надійність та швидкість збіжності. За умов розв'язання задачі при збудженні магнітного поля в прямокутній області синусоїдальним струмом запропонований алгоритм показав у кілька разів кращу збіжність, ніж пакет COMSOL версій 3.1 та 3.5. Бібл. 4, рис. 3.*

**Ключові слова:** ферромагнітне середовище, періодичний процес, часові гармоніки, поверхневий ефект, метод скінченних елементів, метод Ньютона, оптимізація збіжності.

### OPTIMIZATION OF CONVERGENCE OF PERIODIC SOLUTION WHEN MODELING OF NONLINEAR SKIN-EFFECT BY FINITE ELEMENT METHOD

**I.S.Petukhov**

**Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,  
pr. Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine.**

**e-mail: [igor\\_petu@mail.ru](mailto:igor_petu@mail.ru)**

*The problem of accuracy modeling of the alternating magnetic field in the ferromagnetic medium by the finite element method by considering higher time harmonics of the field and the associated problem of ensuring the convergence of iterative process were considered. The numerically-harmonic model and the proposed solution algorithm based on the modified Newton's method were described. To accelerate the convergence the proposed algorithm includes the optimization procedure of damping coefficient by using Golden section method, as well as a set of heuristic rules that ensure reliability and speed of convergence. When solving the problem on excitation of magnetic field in rectangular domain with sinusoidal current waveform excitation the proposed algorithm showed convergence in several times better than the package COMSOL versions 3.1 and 3.5. References 4, figures 3.*

**Key words:** ferromagnetic medium, periodic process, time harmonics, skin-effect, finite element method, Newton's method, optimization of convergence.

1. *Zenkevich O.* The finite element method in engineering science. – Moskva: Mir, 1975. – 543 p. (Rus)
2. *Petukhov I.S.* Numerical simulation of skin effect in ferromagnetic for sinusoidal magnetic flux // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2013. – No 6. – Pp. 24–29. (Rus)
3. *Rekleytis G., Reyvindran K., Regsdel A.* Engineering optimization. – Moskva: Mir, 1986. – 349 p. (Rus)
4. *Filtz R.V.* General algorithm of determination of magnetic parameters of nonlinear media // Mathematical methods and physicomachanical fields. – 1975. – Vypusk 16. – Pp. 101–106. (Rus)

Надійшла 19.02.2016  
Остаточний варіант 07.04.2016