

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ С МНОГОКОНТУРНЫМ РОТОРОМ В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ

В.Ф.Сивокобыленко, докт.техн.наук
Донецкий национальный технический университет,
ул. Артема, 58, Донецк, 83001, Украина. e-mail: svf@elf.dgtu.donetsk.ua

Усовершенствована математическая модель синхронной машины в фазных координатах за счет учета вытеснения тока в демпферных контурах ротора путем их представления многоконтурной схемой замещения в каждой оси, а для сокращения расчетных затрат получены аналитические выражения для обратной матрицы индуктивностей. Преимущества предложенной модели показаны на примере моделирования асинхронного пуска синхронного двигателя. Библ. 8, рис. 5.

Ключевые слова: математическая модель, синхронная машина, фазные координаты, матрица индуктивностей, дифференциальные уравнения Парка-Горева.

Актуальность проблемы и её связь с прикладными задачами. Для исследования переходных процессов в синхронных машинах (СМ) используют, в основном, дифференциальные уравнения Парка-Горева, записанные во вращающейся системе координат d, q , жестко связанной с ротором [4, 8]. При этом реальные обмотки трехфазного статора представляют в виде двух фиктивных обмоток, расположенных соответственно по осям симметрии ротора d и q . В результате линейного преобразования переменных в этих уравнениях исчезают периодические коэффициенты, так как взаимные индуктивности между обмотками, расположенными по осям декартовой системы координат, равны нулю.

При исследовании переходных процессов в одиночных СМ применение уравнений Парка-Горева существенно сокращает объем вычислений, что и определило их преимущественное применение на протяжении последних десятилетий. Однако при расчетах переходных процессов в электрических системах, содержащих синхронные и асинхронные машины, трансформаторы, линии электропередачи, нагрузки, применение уравнений Парка-Горева не всегда целесообразно. В таких системах для СМ требуются как прямое (от a, b, c к d, q), так и обратное (от d, q к a, b, c) преобразования переменных и вычисления на каждом шаге расчета входных проводимостей СМ и задающих токов (в осях a, b, c) для их использования в уравнениях методов узловых напряжений или контурных токов для всей схемы [3]. В этих случаях для унификации алгоритмо-программных комплексов более предпочтительным является использование уравнений в естественных координатах для всех элементов сети так же, как и при исследовании несимметричных режимов при разных сопротивлениях фаз статора, ротора или напряжений источника питания. Определение мгновенных значений фазных токов и напряжений необходимо также при разработке и внедрении новых микропроцессорных устройств релейной защиты и противоаварийной автоматики.

Известные исследования и публикации. Известны математические модели СМ в фазных координатах [5,6], в которых авторы учитывают только по одному демпферному контуру в каждой оси ротора, пренебрегая влиянием эффекта вытеснения токов. Это не позволяет применить эти модели для исследования процессов в СМ с массивным ротором. В [1,7] были предложены аналитические выражения для вычисления элементов обратной матрицы индуктивностей математической модели применительно к явнополюсной синхронной машине без демпферных контуров на роторе. Однако получение указанных аналитических выражений достаточно сложно, так как требует учета конструктивных особенностей СМ, а для случая многоконтурного несимметричного ротора СМ вообще проблематично. Таким образом, математические модели СМ в фазных координатах требуют дальнейшего совершенствования в направлении представления ротора многоконтурными схемами замещения, синтезированными по частотным характеристикам проводимостей [7], а также путем использования новых подходов к сокращению расчетных затрат на обращение матрицы индуктивностей.

Цель работы. Совершенствование математической модели СМ в фазных координатах за счет представления ротора многоконтурной схемой замещения и получение аналитических выражений для обратной матрицы индуктивностей.

Основной материал и результаты исследований. Примем за основу общепринятые допущения для СМ [4,8]: обмотки статора симметричны и сдвинуты на 120 электрических градусов отно-

сительно друг друга; насыщение и потери в магнитопроводе отсутствуют; индукция распределена в пространстве синусоидально; зависимости собственных и взаимных индуктивностей обмоток от угла положения ротора содержат только основную гармонику. Все величины будем представлять в относительных единицах с общей для всех контуров по каждой оси взаимной индуктивностью.

Рассмотрим СМ, которая имеет на статоре три фазные обмотки a, b, c . По продольной оси d ротора учтем обмотку возбуждения f и две демпферные обмотки $d1$ и $d2$, по поперечной оси ротора q – две демпферные обмотки $q1$ и $q2$. Такое представление демпферных контуров ротора позволяет учесть зависимость параметров схем замещения от эффекта вытеснения токов в СМ (турбодвигателях, СМ с массивными полюсными башмаками и др.) [7].

Заводы-изготовители СМ обычно приводят в паспортах значения параметров СМ в осях d, q . При этом, согласно [6,8] векторы напряжений, токов, потокосцеплений, а также матрица активных сопротивлений в этих осях будут представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{dq} &= [u_{sd}, u_{sq}, u_f, 0, 0, 0, 0]^T, & \bar{\Psi}_{dq} &= [\psi_{sd}, \psi_{sq}, \psi_f, \psi_{d1}, \psi_{d2}, \psi_{q1}, \psi_{q2}]^T, \\ \bar{I}_{dq} &= [i_{sd}, i_{sq}, i_f, i_{d1}, i_{d2}, i_{q1}, i_{q2}]^T, & R_{dq} &= \text{diag}[R_{sd}, R_{sq}, R_f, R_{d1}, R_{d2}, R_{q1}, R_{q2}]. \end{aligned}$$

Уравнения связи между потокосцеплениями и токами, в которых используются матрицы собственных и взаимных индуктивностей СМ (прямая L_{dq} и обратная L_{dq}^{-1}), имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{dq} &= L_{dq} \cdot \bar{I}_{dq}, & \bar{I}_{dq} &= L_{dq}^{-1} \cdot \bar{\Psi}_{dq}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$L_{dq} = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 & L_{sd,f} & L_{sd,d1} & L_{sd,d2} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sq} & 0 & 0 & 0 & L_{sq,q1} & L_{sq,q2} \\ L_{f,sd} & 0 & L_f & L_{f,d1} & L_{f,d2} & 0 & 0 \\ L_{d1,sd} & 0 & L_{d1,f} & L_{d1} & L_{d1,d2} & 0 & 0 \\ L_{d2,sd} & 0 & L_{d2,f} & L_{d2,d1} & L_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & L_{q1,sq} & 0 & 0 & 0 & L_{q1} & L_{q1,q2} \\ 0 & L_{q2,sq} & 0 & 0 & 0 & L_{q2,q1} & L_{q2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Элементы матрицы L_{dq} зависят от индуктивностей рассеяния обмоток статора и ротора $L_{\sigma s}, L_{\sigma f}, L_{\sigma d1}, L_{\sigma d2}, L_{\sigma q1}, L_{\sigma q2}$ и от взаимных индуктивностей L_{md} по оси d и L_{mq} – по оси q

$$\begin{aligned} L_{sd} &= L_{\sigma s} + L_{md}, & L_{d1} &= L_{\sigma d1} + L_{md}, & L_{d2} &= L_{\sigma d2} + L_{md}, & L_f &= L_{\sigma f} + L_{md}, & L_{sq} &= L_{\sigma s} + L_{mq}, \\ L_{q1} &= L_{\sigma q1} + L_{mq}, & L_{q2} &= L_{\sigma q2} + L_{mq}, & L_{sq,q1} &= L_{q1,sq} = L_{sq,q2} = L_{q2,sq} = L_{mq}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$L_{sd,f} = L_{f,sd} = L_{sd,d1} = L_{d1,sd} = L_{sd,d2} = L_{d2,sd} = L_{md}.$$

Отметим, что, как следует из (2), элементы матрицы индуктивностей являются постоянными величинами и не зависят от угла положения ротора γ .

Дифференциальные уравнения для модели СМ в осях d, q , записанные относительно переменных состояния потокосцеплений, скорости вращения и угла поворота ротора, будут иметь вид

$$\begin{aligned} p\psi_{sd} &= u_{sd} - R_{sd}i_{sd} + \omega\psi_{sq}, & p\psi_{1d} &= -R_{d1}i_{d1}, \\ p\psi_{sq} &= u_{sq} - R_{sq}i_{sq} - \omega\psi_{sd}, & p\psi_{2d} &= -R_{d2}i_{d2}, \\ p\psi_{1q} &= -R_{q1}i_{q1}, & p\psi_f &= u_f - R_f i_f, \\ p\psi_{2q} &= -R_{q2}i_{q2}, & p\gamma &= \omega, \\ p\omega &= \tau_j^{-1} [m_e(\bar{\Psi}_{dq}, \bar{I}_{dq}) - m_c(\omega)], & p &= d/dt, \\ u_{sd} &= U_{\max} \cos(\omega_c t - \omega t), & u_{sq} &= U_{\max} \sin(\omega_c t - \omega t), \\ m_e(\bar{\Psi}_{dq}, \bar{I}_{dq}) &= \psi_{sd}i_{sq} - \psi_{sq}i_{sd}, & m_c(\omega) &= m_{нач} + (m_{кон} - m_{нач})\omega^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ω – угловая частота вращения ротора, ω_c – синхронная частота, τ_j – механическая постоянная времени привода, $u_{sd}, u_{sq}, m_e, m_c, p$ – соответственно напряжения статора, электромагнитный вращающий момент, момент сопротивления механизма (например, вентилятора с начальным $m_{нач}$ и конечным $m_{кон}$ моментами сопротивлений), оператор дифференцирования по времени. При численном решении дифференциальных уравнений (4) токи определяют по (1), используя обратную матрицу индуктивностей L_{dq}^{-1} с постоянными коэффициентами, которую достаточно обратить только один раз.

Рассмотрим теперь математическую модель этой СМ в естественных (фазных) координатах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} для статора и \mathbf{d} , \mathbf{q} – для ротора. Переменные состояния и параметры СМ представим как

$$\begin{aligned} \bar{U}_{abc} &= [u_a, u_b, u_c, u_f, 0, 0, 0, 0]^T; & \bar{\Psi}_{abc} &= [\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_f, \psi_{d1}, \psi_{d2}, \psi_{q1}, \psi_{q2}]^T; \\ \bar{I}_{abc} &= [i_a, i_b, i_c, i_f, i_{d1}, i_{d2}, i_{q1}, i_{q2}]^T; & R_{abc} &= \text{diag}[R_a, R_b, R_c, R_f, R_{d1}, R_{d2}, R_{q1}, R_{q2}]. \end{aligned} \quad (4,а)$$

Значения активных сопротивлений фаз статора найдем по известным параметрам в осях \mathbf{d} , \mathbf{q} из соотношения $R_a = R_b = R_c = R_{sd} = R_{sq}$.

В уравнениях связи между потокосцеплениями и токами в этой модели используется матрица собственных и взаимных индуктивностей СМ в фазных координатах $L_{abc}(\gamma)$, элементы которой зависят от угла положения ротора

$$\bar{\Psi}_{abc} = L_{abc}(\gamma) \cdot \bar{I}_{abc}; \quad \bar{I}_{abc} = L_{abc}(\gamma)^{-1} \cdot \bar{\Psi}_{abc}. \quad (5)$$

Представим матрицу $L_{abc}(\gamma)$ как состоящую из четырех подматриц, включающих собственные и взаимные индуктивности обмоток: статор-статор $L_{SS}(\gamma)$, статор- ротор $L_{SR}(\gamma)$, ротор – статор $L_{RS}(\gamma)$ и ротор-ротор L_{RR}

$$\begin{aligned} L_{abc}(\gamma) &= \begin{bmatrix} L_{SS}(\gamma) & L_{SR}(\gamma) \\ L_{RS}(\gamma) & L_{RR} \end{bmatrix}, & L_{SS}(\gamma) &= \begin{bmatrix} L_a(\gamma) & L_{ab}(\gamma) & L_{ac}(\gamma) \\ L_{ba}(\gamma) & L_b(\gamma) & L_{bc}(\gamma) \\ L_{ca}(\gamma) & L_{cb}(\gamma) & L_c(\gamma) \end{bmatrix}, & (5,а) \\ L_{SR}(\gamma) &= \begin{bmatrix} L_{af}(\gamma) & L_{ad1}(\gamma) & L_{ad2}(\gamma) & L_{aq1}(\gamma) & L_{aq2}(\gamma) \\ L_{bf}(\gamma) & L_{bd1}(\gamma) & L_{bd2}(\gamma) & L_{bq1}(\gamma) & L_{bq2}(\gamma) \\ L_{cf}(\gamma) & L_{cd1}(\gamma) & L_{cd2}(\gamma) & L_{cq1} & L_{cq2}(\gamma) \end{bmatrix}, & L_{RR} &= \begin{bmatrix} L_f & L_{fd1} & L_{fd2} & L_{fq1} & L_{fq2} \\ L_{d1f} & L_{d1} & L_{d1d2} & L_{d1q1} & L_{d1q2} \\ L_{d2f} & L_{d2d1} & L_{d2} & L_{d2q1} & L_{d2q1} \\ L_{q1f} & L_{q1d1} & L_{q1d2} & L_{q1} & L_{q1q2} \\ L_{q2f} & L_{q2d1} & L_{q2d2} & L_{q2q1} & L_{q2} \end{bmatrix}. & (5,б) \end{aligned}$$

Как следует из [4,6,8], в матрице $L_{SS}(\gamma)$ собственные и взаимные индуктивности фаз статора содержат постоянные составляющие l_0 и m_0 и переменные, пропорциональные произведению разностей полных индуктивностей ΔL по осям \mathbf{d} , \mathbf{q} на косинус двойного угла положения ротора. Значения указанных составляющих определяют через известные параметры в осях \mathbf{d} , \mathbf{q} : полные индуктивности обмоток статора L_{sd}, L_{sq} и индуктивность нулевой последовательности обмоток статора L_0 , которая обычно в 4-7 раз меньше фазной индуктивности рассеяния

$$l_0 = L_0 + L_{sd} + L_{sq}/3, \quad m_0 = (L_0 - (L_{sd} + L_{sq})/2)/3, \quad \Delta L = L_{sd} - L_{sq}/3. \quad (6)$$

Тогда с учетом (6) подматрица статор-статор $L_{SS}(\gamma)$ примет вид

$$L_{SS}(\gamma) = \begin{bmatrix} l_0 + \Delta L \cos(2\gamma) & m_0 + \Delta L \cos(2\gamma - 2\pi/3) & m_0 + \Delta L \cos(2\gamma + 2\pi/3) \\ m_0 + \Delta L \cos(2\gamma - 2\pi/3) & l_0 + \Delta L \cos(2\gamma + 2\pi/3) & m_0 + \Delta L \cos(2\gamma) \\ m_0 + \Delta L \cos(2\gamma + 2\pi/3) & m_0 + \Delta L \cos(2\gamma) & l_0 + \Delta L \cos(2\gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Подматрица статор-ротор $L_{SR}(\gamma)$ содержит элементы, пропорциональные произведению взаимных индуктивностей между соответствующими обмотками на косинус или синус угла поворота ротора

$$L_{SR}(\gamma) = \begin{bmatrix} L_{sf} \cos(\gamma) & L_{sd1} \cos(\gamma) & L_{sd2} \cos(\gamma) & -L_{sq1} \sin(\gamma) & -L_{sq2} \sin(\gamma) \\ L_{sf} \cos(\gamma - 2\pi/3) & L_{sd1} \cos(\gamma - 2\pi/3) & L_{sd2} \cos(\gamma - 2\pi/3) & -L_{sq1} \sin(\gamma - 2\pi/3) & -L_{sq2} \sin(\gamma - 2\pi/3) \\ L_{sf} \cos(\gamma + 2\pi/3) & L_{sd1} \cos(\gamma + 2\pi/3) & L_{sd2} \cos(\gamma + 2\pi/3) & -L_{sq1} \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & -L_{sq2} \sin(\gamma + 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $L_{sf} = L_{sd1} = L_{sd2} = L_{md}$; $L_{sq1} = L_{sq2} = L_{mq}$.

В принятой за основу взаимной системе относительных единиц базисная мощность статорных и роторных контуров равна номинальной мощности СМ, а базисный ток обмотки статора – амплитуде номинального фазного тока статора. Базисный ток обмотки возбуждения создает в воздушном зазоре такое же поле, как и продольная реакция статора при базисном токе. При этих условиях, согласно [8], подматрицу индуктивностей ротор-статор можно найти с помощью транспонированной матрицы статор-ротор $L_{SR}(\gamma)^{tr}$ из соотношения

$$L_{RS}(\gamma) = 2L_{SR}(\gamma)^{tr} / 3. \quad (9)$$

Элементы подматрицы L_{RR} постоянны, не зависят от угла положения ротора и для них справедливы соотношения

$$L_{fd1} = L_{fd2} = L_{d1f} = L_{d2f} = L_{d1d2} = L_{d2d1} = L_{md}; \quad L_{q1q2} = L_{q2q1} = L_{mq}; \\ L_{fq1} = L_{fq2} = L_{d1q1} = L_{d1q2} = L_{q1d1} = L_{q1d2} = 0,$$

с учетом которых подматрица L_{RR} принимает вид

$$L_{RR} = \begin{bmatrix} L_f & L_{fd1} & L_{fd2} & 0 & 0 \\ L_{d1f} & L_{d1} & L_{d1d2} & 0 & 0 \\ L_{d2f} & L_{d2d1} & L_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{q1} & L_{q1q2} \\ 0 & 0 & 0 & L_{q2q1} & L_{q2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения математической модели СМ в естественных координатах. Если в качестве переменных состояния так же, как и в осях d, q , принять потокоцепления, скорость вращения и угол поворота ротора, то тогда, используя уравнения равновесия ЭДС контуров и движения ротора, получим

$$d\bar{\Psi}_{abc} / dt = \bar{U}_{abc}(t) - R_{abc} L_{abc}(\gamma)^{-1} \bar{\Psi}_{abc}, \quad d\omega / dt = \tau_j^{-1} [m_e(\bar{I}_{abc}, \bar{\Psi}_{abc}) - m_c(\omega)], \\ d\gamma / dt = \omega, \quad \bar{I}_{abc} = L_{abc}(\gamma)^{-1} \bar{\Psi}_{abc}, \quad (11)$$

$$m_e(\bar{I}_{abc}, \bar{\Psi}_{abc}) = 3^{-1/2} [(i_b - i_c)\psi_a - (\psi_b - \psi_c)i_a], \quad m_c(\omega) = m_{нач} + (m_{кон} - m_{нач})\omega^2.$$

В этих уравнениях векторы и матрицы соответствуют (4,а; 5,а; 5,б; 7-10). Как видно из уравнений (11) на каждом шаге расчета переходного процесса требуется обращение матрицы индуктивностей $L_{abc}(\gamma)$. Применение численного обращения этой матрицы увеличивает расчетные затраты и является одним из основных недостатков этой модели. Получение аналитических выражений для вычисления обратной матрицы позволило бы сократить расчётные затраты и снизить накопление ошибок при многократных численных обращениях матрицы.

Ранее были предложены аналитические выражения для вычисления элементов обратной матрицы $L_{abc}(\gamma)^{-1}$, но только применительно к явнополюсной синхронной машине без демпферных контуров на роторе [1]. Однако для СМ с представлением ротора многоконтурной схемой замещения эти вопросы не рассматривались и требуют дальнейших дополнительных исследований.

Примем за основу приведенное в [2] доказательство того, что матрицы с гармонически изменяющимися коэффициентами имеют структурно подобные себе обратные, т.е. в них синусные и косинусные составляющие остаются такими же, как в исходной матрице и изменяются только значения

постоянных коэффициентов и амплитуд гармонических составляющих. Тогда искомую обратную матрицу и её подматрицы представим в таком же виде, как исходные, но с неизвестными значениями параметров $\tilde{l}_0, \tilde{m}_0, \Delta \tilde{L}$ в подматрице $\tilde{L}_{SS}(\gamma)$; неизвестными $\tilde{L}_{sf}, \tilde{L}_{sd1}, \tilde{L}_{sd2}, \tilde{L}_{sq1}, \tilde{L}_{sq2}$ – в подматрицах $\tilde{L}_{SR}(\gamma)$ и $\tilde{L}_{RS}(\gamma)$, а также аналогично обозначенным параметрам в подматрице ротор-ротор \tilde{L}_{RR} . Тогда обратная матрица индуктивностей и её подматрицы будут представлены как

$$\tilde{L}_{abc}(\gamma) = L_{abc}(\gamma)^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{SS}(\gamma) & \tilde{L}_{SR}(\gamma) \\ \tilde{L}_{RS}(\gamma) & \tilde{L}_{RR}(\gamma) \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}_{RR} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_f & \tilde{L}_{fd1} & \tilde{L}_{fd2} & 0 & 0 \\ \tilde{L}_{d1f} & \tilde{L}_{d1} & \tilde{L}_{d1d2} & 0 & 0 \\ \tilde{L}_{d2f} & \tilde{L}_{d2d1} & \tilde{L}_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{q1} & \tilde{L}_{q1q2} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{q2q1} & \tilde{L}_{q2} \end{bmatrix}, \quad (12, 13)$$

$$\tilde{L}_{SS}(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{l}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma) & \tilde{m}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma - 2\pi/3) & \tilde{m}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma + 2\pi/3) \\ \tilde{m}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma - 2\pi/3) & \tilde{l}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma + 2\pi/3) & \tilde{m}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma) \\ \tilde{m}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma + 2\pi/3) & \tilde{m}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma) & \tilde{l}_0 + \Delta \tilde{L} \cos(2\gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\tilde{L}_{SR}(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{sf} \cos(\gamma) & \tilde{L}_{sd1} \cos(\gamma) & \tilde{L}_{sd2} \cos(\gamma) & -\tilde{L}_{sq1} \sin(\gamma) & -\tilde{L}_{sq2} \sin(\gamma) \\ \tilde{L}_{sf} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & \tilde{L}_{sd1} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & \tilde{L}_{sd2} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -\tilde{L}_{sq1} \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -\tilde{L}_{sq2} \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \tilde{L}_{sf} \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & \tilde{L}_{sd1} \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & \tilde{L}_{sd2} \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & -\tilde{L}_{sq1} \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & -\tilde{L}_{sq2} \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\tilde{L}_{RS}(\gamma) = \frac{2}{3} \cdot \tilde{L}_{SR}(\gamma)^{tr}. \quad (16)$$

Предлагается сравнительно простой способ определения указанных выше постоянных коэффициентов и амплитуд гармонических составляющих в элементах обратной матрицы индуктивностей, основанный на использовании результатов однократного численного обращения исходной матрицы $L_{abc}(\gamma)$ для одного из произвольных значений угла поворота ротора γ . Полученную матрицу, размерностью для нашего случая 8×8 , обозначим через M и используем в дальнейшем численные значения её элементов совместно с известным соотношением

$$\cos(\gamma) + \cos(\gamma - 2\pi/3) + \cos(\gamma + 2\pi/3) = 0.$$

Приравняв сумму элементов $M_{1,1}, M_{2,2}, M_{3,3}$ матрицы M сумме соответствующих элементов в матрице (14), получим

$$\tilde{l}_0 = (M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3})/3. \quad (17)$$

Аналогично, приравняв сумму элементов любой строки или столбца матрицы (14) сумме соответствующих элементов в матрице M , получим

$$\tilde{m}_0 = \frac{1}{2}(M_{1,1} + M_{1,2} + M_{1,3}) - \frac{1}{2}\tilde{l}_0; \quad \Delta \tilde{L} = (M_{1,1} - M_{2,2}) \cdot [\cos(2\gamma) - \cos(2\gamma - 2\pi/3)]^{-1}. \quad (18)$$

Приравнивание соответствующих элементов в матрицах (15) и M позволяет найти все элементы матрицы $\tilde{L}_{SR}(\gamma)$

$$\tilde{L}_{sf} = M_{1,4} \cos^{-1} \gamma; \quad \tilde{L}_{sd1} = M_{1,5} \cos^{-1} \gamma; \quad \tilde{L}_{sd2} = M_{1,6} \cos^{-1} \gamma; \quad \tilde{L}_{sq1} = -M_{1,7} \sin^{-1} \gamma; \quad \tilde{L}_{sq2} = -M_{1,8} \sin^{-1} \gamma. \quad (19)$$

Матрицу $\tilde{L}_{RS}(\gamma)$ находим по (16), а элементы матрицы \tilde{L}_{RR} постоянны и равны соответствующим элементам матрицы M

$$\begin{aligned} \tilde{L}_f &= M_{4,4}; & \tilde{L}_{d1} &= M_{5,5}; & \tilde{L}_{d2} &= M_{6,6}; & \tilde{L}_{q1} &= M_{7,7}; & \tilde{L}_{q2} &= M_{8,8}; \\ \tilde{L}_{fd1} &= \tilde{L}_{d1f} = M_{4,5}; & \tilde{L}_{d1d2} &= \tilde{L}_{d2d1} = M_{5,6}; & \tilde{L}_{fd2} &= \tilde{L}_{d2f} = M_{4,6}; & \tilde{L}_{q1q2} &= \tilde{L}_{q2q1} = M_{7,8}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, получаем аналитические выражения для определения коэффициентов обратной матрицы индуктивностей. Они вычисляются только один раз по параметрам схемы замещения СМ в осях d, q , используя результаты обращения исходной матрицы индуктивностей для одного значения угла поворота ротора. Адекватность матриц $L_{abc}(\gamma)^{-1}$ и $\tilde{L}_{abc}(\gamma)$ проверена для параметров большого количества СМ в широком диапазоне изменения углов положения ротора, что подтверждает достоверность предложенного метода. Проверка адекватности различных моделей также производилась для нескольких СМ разного типа, в том числе и для СМ с многоконтурным ротором.

Для примера приведем результаты исследования переходных процессов неявнополюсного синхронного двигателя СТДП-2500-2 номинальной мощностью 2500 кВт, напряжением 6 кВ, имеющего согласно каталожным данным кратности пускового тока статора – 6,16 о.е., пускового, максимального и входного (при скольжении равном 0,05) моментов соответственно – 1,75; 2,11 и 1,34 о.е. По экспериментальным частотным характеристикам проводимостей (рис. 1) по методике [7] были найдены параметры схемы замещения СМ с многоконтурным ротором, расчеты по которым статических характеристик показали их близкое совпадение с данными каталога.

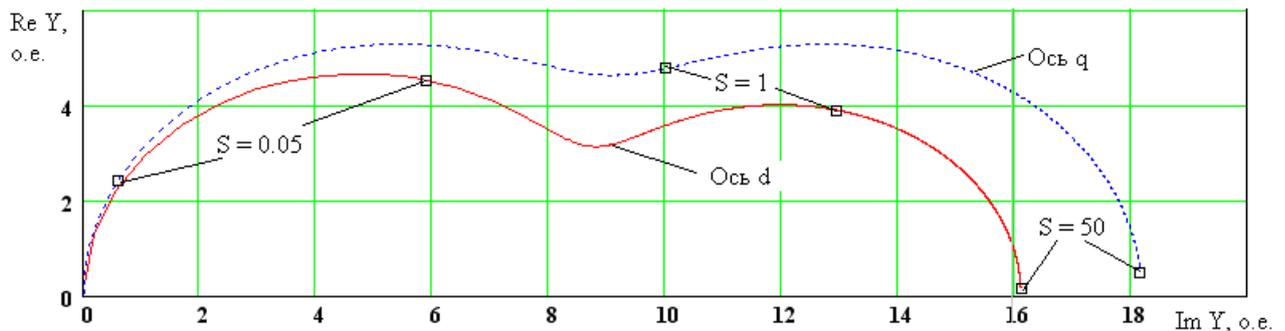


Рис. 1

Значения параметров схемы замещения, в которой ротор представлен обмоткой возбуждения и двумя короткозамкнутыми контурами по каждой оси, в относительных единицах составили

$$L_{\sigma s} = 0,082; \quad L_{\sigma f} = 0,115; \quad L_{\sigma d1} = 0,289; \quad L_{\sigma d2} = 0,253; \quad L_{\sigma q1} = 0,11; \quad L_{\sigma q2} = 0,11;$$

$$R_{sd} = R_{sq} = 0,019; \quad R_f = 0,004; \quad R_{d1} = 0,2; \quad R_{d2} = 0,26; \quad R_{q1} = 0,28; \quad R_{q2} = 0,021.$$

$$L_{md} = 2,382; \quad L_{mq} = 1,682; \quad L_0 = 0,016; \quad \tau_j = 2c.$$

С помощью расчетов по (3), (6) и (17)-(20) получены значения элементов для формирования прямой и обратной матриц индуктивностей СМ в координатах d, q и a, b, c

$$l_0 = 1,415; \quad m_0 = -0,699; \quad \Delta L = 0,233; \quad \tilde{l}_0 = 25,129; \quad \tilde{m}_0 = 17,923; \quad \Delta \tilde{L} = -0,125;$$

$$\tilde{L}_{sf} = -3,692; \quad \tilde{L}_{sd1} = -1,469; \quad \tilde{L}_{sd2} = -1,678; \quad \tilde{L}_{sq1} = -3,58; \quad \tilde{L}_{sq2} = -3,58;$$

$$\tilde{L}_f = 6,063; \quad \tilde{L}_{d1} = 3,043; \quad \tilde{L}_{d2} = 3,409; \quad \tilde{L}_{q1} = 6,422; \quad \tilde{L}_{q2} = 6,422;$$

$$\tilde{L}_{fd1} = \tilde{L}_{d1f} = -1,048; \quad \tilde{L}_{fd2} = \tilde{L}_{d2f} = -1,197; \quad \tilde{L}_{d1d2} = \tilde{L}_{d2d1} = -0,476; \quad \tilde{L}_{q1q2} = \tilde{L}_{q2q1} = -2,668.$$

Полученные параметры использовались для решения дифференциальных уравнений рассмотренных в работе трех моделей: классической (М1) в осях d, q по уравнениям (4) и в фазных координатах по уравнениям (11) при пошаговом численном обращении матрицы индуктивностей (модель М2) и при вычислении матрицы по аналитическим зависимостям (модель М3). Результаты расчетов для асинхронного пуска синхронного двигателя показаны на рисунках: характер изменения мгновенных значений тока статора фазы А (рис. 2), электромагнитного вращающего момента (рис. 3), потребляемой активной мощности (рис. 4) и скорости вращения (рис. 5).

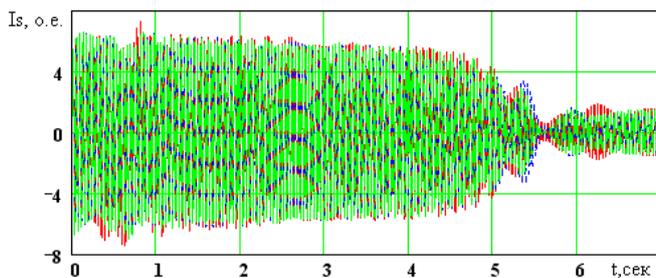


Рис. 2

Как видно из приведенных данных, результаты расчетов для моделей практически совпадают, что подтверждает их адекватность с точки зрения получения идентичности результатов. Расхождение (не более 2–3%) вызвано накопле-

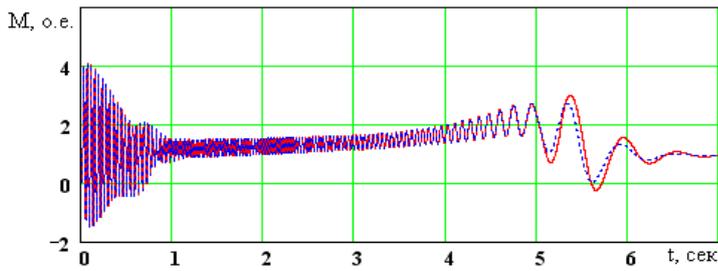


Рис. 3

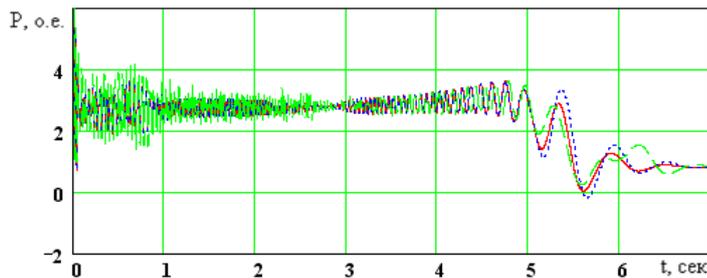


Рис. 4

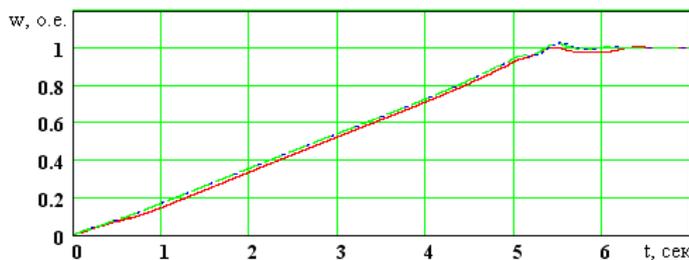


Рис. 5

нием погрешностей из-за многократных численных обращений матрицы индуктивностей в модели М2 и зависит от величины шага и длительности расчета. Расчетные затраты при реализации программ расчета в пакете MathCAD для моделей в осях d, q (М1) и с аналитическим определением обратной матрицы индуктивностей (М3) практически одинаковы, а для модели с обращением матрицы (М2) затраты в 1,4-1,6 раз больше. При моделировании процессов в многомашинных системах электроснабжения целесообразно использовать усовершенствованную модель СМ (М3), предложенную в данной работе.

Выводы и направления дальнейших исследований. При моделировании переходных процессов в электрических системах целесообразно использовать математическую модель СМ в естественных координатах, в которых переменные состояния статорных величин представлены в неподвижных относительно статора фазных координатах, а роторных – в координатах, вращающихся вместе с ротором. Для учета влияния вытеснения тока в таких моделях следует применять многоконтурную схему замещения ротора, синтезированную по частотным характеристикам проводимостей. Использование аналитических выражений для элементов обратной матрицы индуктивностей СМ позволяет сократить расчетные затраты. Результаты моделирования асинхронного пуска синхронного двигателя подтверждают адекватность и преимущества

разработанной модели в естественных координатах.

При дальнейших исследованиях целесообразно рассмотреть способ моделирования переходных процессов в многомашинных электрических системах при использовании предложенной в работе модели.

1. Бутырин П.А., Борю С.Ю. Аналитические преобразования уравнений состояния электрических машин // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1986. – №2. – С. 24–34.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. Кириленко О.В., Сегеда М.С., Буткевич О.Ф., Мазур Т.А. Математичне моделювання в електроенергетиці. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – 608 с.
4. Ковач К.П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 744 с.
5. Полилов Е.В., Щёлоков А.Г., Руднев Е.С. Разработка математической модели и моделирование явнополусных синхронных машин в фазных координатах // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – 2008. – №30. – С. 207–210.
6. Сивокобыленко В.Ф. Математическая модель синхронной машины в фазных координатах с аналитическим определением обратной матрицы индуктивностей // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Електротехніка і енергетика. – 2012. – №1(12). – №2(13). – С. 207–213.
7. Сивокобыленко В.Ф., Павлюков В.А. Метод аппроксимации переходных функций и расчет многоконтурных схем замещения машин переменного тока // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1979. – №1. – С. 63–70.

8. Ульянов С.А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах. – М.-Л.: Энергия, 1964. – 704 с.

УДК 621.313.323

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИНХРОННОЇ МАШИНИ З БАГАТОКОНТУРНИМ РОТОРОМ У ФАЗНИХ КООРДИНАТАХ

В.Ф.Сивокобиленко

Донецький національний технічний університет,
вул. Артема, 58, Донецьк, 83001, Україна.

e-mail: svf@elf.dgtu.donetsk.ua

Удосконалено математичну модель синхронної машини в фазних координатах за рахунок врахування витіснення струму в демпферних контурах ротора шляхом їхнього представлення багатоконтурною схемою заміщення в кожній осі, а для скорочення розрахункових витрат отримано аналітичні вирази для оберненої матриці індуктивностей. Переваги запропонованої моделі показано на прикладі моделювання асинхронного пуску синхронного двигуна. Бібл. 8, рис. 5.

Ключові слова: математична модель, синхронна машина, фазні координати, матриця індуктивностей, диференціальні рівняння Парка-Горєва.

MATHEMATICAL MODELING OF SYNCHRONOUS MACHIN WITH MULTICONTOUR ROTOR IN PHASE COORDINATES

V.F.Syvokobylenko

Donetsk National Technical University,
Artema str., 58, Donetsk, 83001, Ukraine.

e-mail: svf@elf.dgtu.donetsk.ua

The mathematical model of synchronous machine is improved in phase coordinates due to the account of expulping of current in the damper contours of rotor by their presentation by the multicontour chart of substitution in every axis, and for reduction of calculation expenses analytical expressions are got for the inverse matrix of inductances. Advantages of the offered model are shown on the example of design of the asynchronous starting of synchronous motor.

References 8, figures 5.

Keywords: mathematical model, synchronous machine, phase coordinates, matrix of inductances, differential equalizations of Park-Gorev.

1. Butyrin P.A., Boriu S.Yu. Analytical transformations of equalizations of the state of electric machines // Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Enerhetika i transport. – 1986. – № 2. – Pp. 24–34. (Rus)
2. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matrices and calculations. – Moskva: Nauka, 1984. – 320 p. (Rus)
3. Kyrylenko O.V., Seheda M.S., Butkevych O.F., Mazur T.A. Mathematical modeling in electric power industry. – Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi Politekhniky, 2013. – 608 p. (Ukr)
4. Kovach K.P., Rats I. Transient processes in alternating current machines. – Moskva-Leningrad: Gosenergoizdat, 1963. – 744 p. (Rus)
5. Polilov E.V., Shchelokov A.G., Rudnev E.S. Development of mathematical model and modelling of brushless DC synchronous machines in phase coordinates // Visnyk Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu "Kharkivskiy politekhnichnyi Universytet". – 2008. – № 30. – Pp. 207–10. (Rus)
6. Sivokobylenko V.F. Mathematical model of synchronous machines in phase coordinates with analytic definition of the inverse matrix inductances // Naukovi pratsi Donetskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu. Serii: Elektrotehnika i Enerhetyka. – 2012. – № 1(12)-№ 2(13). – Pp. 207–213. (Rus)
7. Sivokobylenko V.F., Pavliukov V.A. The method of approximation of transition functions and the calculation the equivalent circuit of multicontour rotor of AC machines // Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Enerhetika i transport. – 1979. – № 1. – Pp. 63–70. (Rus)
8. Ulianov S.A. Electromagnetic transients in electric systems. – Moskva-Leningrad: Energiia, 1964. – 704 p. (Rus)

Надійшла 17.12.2013
Остаточний варіант 14.11.2014