

УДК 621.3: 004.94

**МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ**

**Подольцев А.Д.**, докт. техн. наук, **Кучерявая И.Н.**, канд. техн. наук  
Институт электродинамики НАН Украины,  
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина. E-mail: [podol@ied.org.ua](mailto:podol@ied.org.ua)

*В работе дана общая характеристика моделирования электротехнических устройств с одновременно протекающими процессами различной физической природы – мультифизического моделирования. Проведена классификация мультифизических задач в электротехнике как по характеру связи между такими физическими процессами, так и по подходам к их моделированию. В соответствии с такой классификацией выполнен обзор литературных источников и приведены примеры решения трех типов мультифизических задач. Библ. 42, рис. 7, табл. 2. **Ключевые слова:** мультифизическое моделирование, мультиполевые задачи, мультифизические цепи, цепно-полевые задачи, сильно- и слабосвязанные процессы.*

**Общая характеристика мультифизического моделирования.** Разработка современных электротехнических устройств, создание нового электротехнологического оборудования и совершенствование существующих технологий, в основе которых лежит электромагнитное воздействие на материалы, обуславливает необходимость использования и совершенствования современных методов расчета электромагнитного поля и связанных с его действием явлений и процессов различной физической природы. Это позволяет определять оптимальные параметры поля, достигать высокой надежности и рациональных режимов работы электротехнических устройств.

Развитие современных компьютерных технологий и программных средств, увеличение мощности компьютерной техники в сочетании с новыми методами и подходами к численному моделированию обуславливают новый уровень проведения научных исследований электротехнических устройств и технологических систем с учетом не только их структуры, свойств и режимов работы, но и протекающих в них комплексных физических процессов, а также условий функционирования в составе внешней электрической системы.

Детальное исследование широкого класса электрических устройств предусматривает решение связанных полевых задач различной физической природы, в основе которых лежат электромагнитные процессы. Процессы различной физической природы, одновременно протекающие в одном устройстве и определяющие эффективность его функционирования, в последнее время принято называть *мультифизическими*. Например, при индукционном нагреве токопроводящих элементов характерными взаимосвязанными являются электромагнитный и тепловой процессы, а также термомеханические напряжения в объеме обрабатываемого материала. Кроме того, в ряде случаев необходимо учитывать установившиеся или переходные процессы во внешней электрической цепи системы питания индукционной установки.

Связанность физических процессов различной природы – это фундаментальное положение современной электротехники, важное для углубленного исследования физических объектов. Без комплексного учета таких физических процессов невозможно достичь целостного и системного представления об объекте или явлении, детально и всесторонне исследовать сложные электротехнические и технологические устройства, получить их достоверные качественные и количественные характеристики.

Связанность процессов и сложность определения характеристик электротехнических устройств обуславливается наличием различных взаимосвязанных явлений – электромагнитных, термодинамических, механических, гидродинамических, акустических и др., которые, в свою очередь, зависят от процессов во внешних электрических цепях. Например, в работе [26] приведена схема взаимодействия различных физических процессов в трансформаторах с учетом внешних связей, показанная на рис. 1. Схема отображает *цепно-полевые связи* и выявляет необходимость учета характеристик ряда физических полей, основным из которых является электромагнитное поле, и составляющих элементов, параметры которых могут зависеть от процессов во внешней цепи, например, содержащей полупроводниковые преобразователи энергии со своей системой управления. Такое представление



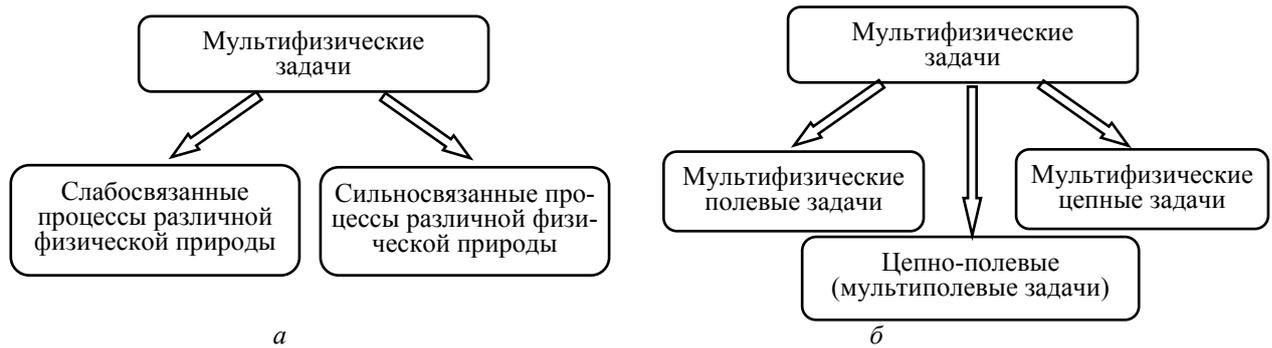


Рис. 3

процессами могут решаться последовательно – для рассматриваемого примера сначала электромагнитная, а затем тепловая задача. В случае сильносвязанных процессов необходимо одновременно решать задачи для всех физических процессов. В ряде случаев для уменьшения вычислительных затрат целесообразно использовать многократный итерационный процесс, выполняя последовательное решение этих задач.

Таким образом, в зависимости от класса мультифизических задач существует два основных метода их решения:

- последовательный метод, используемый при слабой связи задач (weak coupling); задачи решаются отдельно, но с передачей данных (результатов) из одной в другую;
- прямой метод при сильной связи задач (strong coupling); метод предусматривает одновременное решение задач и реализацию перекрестных связей между ними.

Следует отметить, что выбор метода решения связанных задач во многом зависит от особенностей протекания моделируемых процессов.

Известно, что моделирование процессов в электротехнике может выполняться с использованием основ теории электрических цепей или теории электромагнитного поля, либо с применением комбинированного цепно-полевого подхода. С точки зрения подходов к моделированию различных физических процессов в рамках одной мультифизической задачи, такие задачи могут быть классифицированы согласно рис. 3, б.

Реализация методов решения мультифизических задач как сложных систем, включающих в виде подсистем процессы и явления различной физической природы, предполагает в общем случае выполнение следующих этапов.

1. Разработка математической модели для каждой из подсистем (физических процессов) на основе теории электромагнитного поля или теории электрических цепей.
2. Выделение входных и выходных переменных для каждой из подсистем и установление способа передачи переменных между ними.
3. Установление (в ряде случаев путем проведения дополнительных исследований) характера связи между подсистемами – сильная или слабая связь.
4. Разработка алгоритмов решения мультифизической задачи: в случае слабосвязанных процессов – последовательное решение задач для каждой подсистемы; для сильносвязанных процессов – одновременное решение задач подсистем.
5. Визуализация и анализ результатов моделирования, включая поиск оптимальных значений параметров электротехнического устройства и рациональных режимов его функционирования.

Далее приведены детальное описание и примеры решения авторами трех типов мультифизических задач согласно классификации рис. 3, б.

Отметим, что целью данной статьи явилось выполнение обзора литературных источников относительно применения мультифизического моделирования для решения электротехнических задач, проведение на этой основе классификации мультифизических задач в электротехнике и описание подходов к их решению.

**Мультифизические полевые задачи** возникают при анализе электротехнических устройств, в которых протекают одновременно несколько взаимосвязанных физических процессов, причем рассмотрение этих процессов выполняется на основе теории поля. К основным группам связанных физических полей и процессов в электротехнике можно отнести [23, 27, 34, 40]:

- связь электромагнитного и теплового полей (например, в устройствах индукционного нагрева; в задачах из области сверхпроводимости и диэлектрического нагрева);
- связь электромагнитного и силовых полей, характерная для электротехнических устройств механического, гидравлического, пневматического действия (например, для высоковольтных выключателей, управляемых электромагнитными, пружинными, пневматическими или гидравлическими приводами; для электромагнитов с ферромагнитным сердечником, создающих механическое усилие; для электромагнитных ускорителей);
- связь электромагнитного, теплового полей и поля течения жидкостей (характерна для широкого класса задач магнитогидродинамики, включая индукционный нагрев и электромагнитное перемешивание жидких сред; извлечение электропроводящих или магнитных частиц из жидкостей – электро- и феррогидродинамика);
- связь электромагнитного, теплового полей и структурных механических деформаций (при индукционном нагреве металлических материалов с учетом электротермомеханических напряжений; при исследовании износа деталей нагреваемых электромагнитных устройств и процессов деструкции неоднородных материалов под действием электромагнитного поля);
- связь электромагнитного, теплового полей и химических процессов (например, в дугогасительных камерах выключателей, где электрическая дуга сопровождается высокими температурами и окислительными реакциями материалов).

Мультифизическое моделирование физических полей успешно проводится с помощью современных программных пакетов, представленных в табл. 1, среди них – COMSOL Multiphysics, ANSYS Multiphysics, Flux, LSDyna, в которых реализуется численный метод конечных элементов [11].

Характерные особенности связанных полевых задач, а также подходы к их решению представлены в табл. 2 [24].

**Таблица 1**

Название программного продукта	Интернет ссылка
COMSOL Multiphysics	<a href="http://www.comsol.com/">http://www.comsol.com/</a>
ANSYS Multiphysics	<a href="http://www.ansys.com">http://www.ansys.com</a>
Adina	<a href="http://www.adina.com">http://www.adina.com</a>
CFD & Multiphysics	<a href="https://www.esi-group.com/software-services/virtual-environment/cfd-multiphysics">https://www.esi-group.com/software-services/virtual-environment/cfd-multiphysics</a>
CST Mphysics Studio	<a href="https://www.cst.com/Products/CSTMPS">https://www.cst.com/Products/CSTMPS</a>
Elcut	<a href="http://elcut.ru/">http://elcut.ru/</a>
Flux	<a href="http://magsoft-flux.com/products/flux">http://magsoft-flux.com/products/flux</a>
LSDyna	<a href="http://www.ls-dyna.com/">http://www.ls-dyna.com/</a>
Physica	<a href="http://www2.gre.ac.uk/about/schools/cms/research/groups/cmrg/services/software/physica">http://www2.gre.ac.uk/about/schools/cms/research/groups/cmrg/services/software/physica</a>

**Таблица 2**

	геометрические	физические	методы решения	временные
Особенности и методы решения полевых задач	области с различными свойствами	– электротепловые; – электрические и механические; – электротепловые и гидродинамические; ...	МКЭ, МГЭ, аналитические методы ...	различные постоянные времени процессов $\tau_1, \tau_2$
Описание моделей	Дифференциальные уравнения в частных производных, система интегро-дифференциальных уравнений, обыкновенные дифференциальные уравнения, алгебраические уравнения			
Реализация связей (обмена данными) между задачами	– граничные условия; – уравнения на границах раздела	– функциональные зависимости; – источники составляющие; – уравнения цепи	– граничные условия; – уравнения на границах раздела	$\tau_1 \cong \tau_2 /$ $\tau_1 \gg \tau_2$
Итерационные схемы	единая (при одновременном решении сильносвязанных задач), каскадная (при последовательном решении слабосвязанных задач)			единая / каскадная
Методы решения связанных полевых задач	Метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ), метод декомпозиции			переходные процессы МКЭ, МГЭ

В [27] дан детальный обзор научных публикаций, методов и подходов к решению связанных электромагнитных и тепловых, электромагнитных и механических задач, электромагнитных задач и задач структурной механики, в том числе для исследования электрических машин и трансформаторов. Согласно [24, 27] решение связанных полевых задач численными методами предполагает выполнение ряда этапов, перечисленных в предыдущем разделе.

В соответствии с классификацией на рис. 3, *a* мультифизические полевые задачи подразделяются на слабосвязанные и сильносвязанные задачи [20, 27, 37, 38]. Характер связи между физическими задачами различной природы, или представление их сильно- или слабосвязанными процессами во многом определяет вычислительные аспекты. Сильносвязанные процессы предполагают совместное одновременное решение различных физических задач, а слабосвязанные процессы – последовательное решение задач.

В качестве примера рассмотрим трехполевую задачу индукционного нагрева движущегося медного слитка цилиндрической формы в переменном магнитном поле однофазного цилиндрического индуктора (рис. 4, *a*), включающую расчет связанных электротепловых процессов и расчет термомеханических напряжений в объеме слитка [13]. Математическая модель задачи состоит из следующего описания физических процессов.

1. *Электромагнитная задача.* Электромагнитные процессы рассчитываются согласно уравнениям для векторного магнитного потенциала  $\dot{A}$ :

в области слитка: 
$$j\omega\sigma(T)\dot{A} + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{A}) - \sigma(T)\mathbf{v} \times (\nabla \times \dot{A}) = 0;$$

в области магнитопровода: 
$$\nabla \times ((\mu_0\mu_r)^{-1} \nabla \times \dot{A}) = 0;$$

в области индуктора: 
$$\nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{A}) = J_0;$$

в окружающей среде: 
$$\nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{A}) = 0.$$

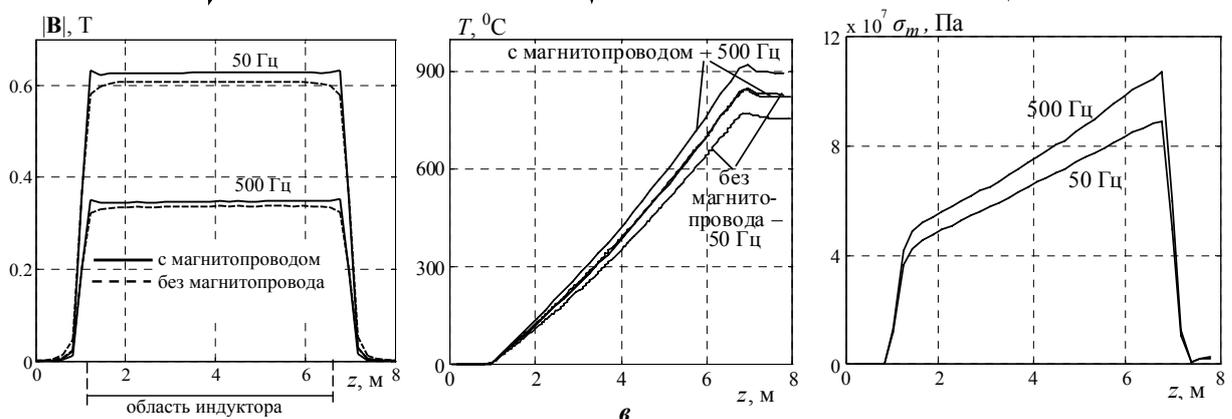
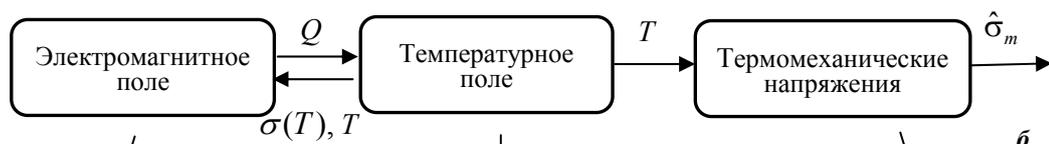
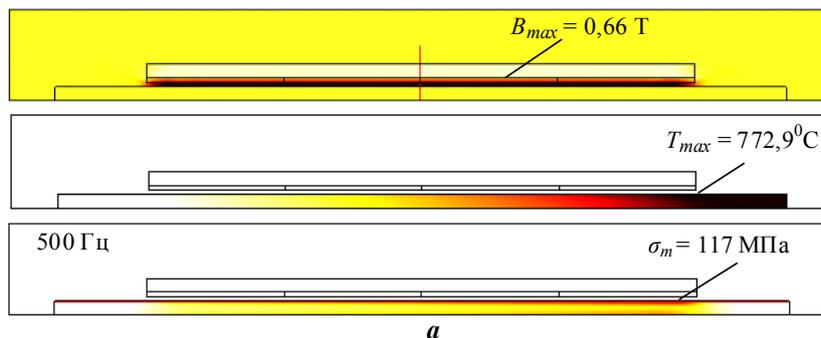


Рис. 4

Здесь  $\sigma(T)$ ,  $\mu_r$  – электропроводность и относительная магнитная проницаемость материала;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\omega$  – угловая частота;  $J_0$  – известная плотность тока в индукторе;  $j$  – мнимая единица;  $T$  – температура, определяемая в области слитка из решения следующей тепловой задачи.

2. *Тепловая задача.* Температурное поле описывается стационарным уравнением теплопроводности

$$\rho C_p \mathbf{v} \nabla T - \nabla \cdot \lambda \nabla T = Q,$$

где  $\rho(T)$ ,  $C_p(T)$ ,  $\lambda(T)$  – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность нагреваемого материала соответственно;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости движения слитка;  $Q$  – удельная мощность источника тепла, обуславливающая индукционный нагрев слитка наведенными токами и определяемая формулой

$$Q = \frac{\dot{J} \cdot \dot{J}^*}{\sigma} = \omega^2 \sigma (A_\varphi \cdot A_\varphi^*),$$

где  $\dot{J} = -j\omega\sigma A_\varphi$  – действующее значение плотности наведенного тока;  $A_\varphi^*$  – комплексно-сопряженное значение магнитного потенциала.

3. *Задача определения термомеханических напряжений.* По результатам электротепловой задачи последовательно решается задача определения внутренних механических напряжений в области термообрабатываемого слитка. Такие напряжения  $\hat{\sigma}_m$  находятся из уравнения механического равновесия

$$\nabla \hat{\sigma}_m = 0, \quad \hat{\sigma}_m = D(\hat{\epsilon}_m - \hat{\epsilon}_T - \hat{\epsilon}_{m0}) + \hat{\sigma}_{m0}.$$

В последнем выражении термическая деформация  $\hat{\epsilon}_T$  связана с температурой линейной зависимостью

$$\hat{\epsilon}_T = [\hat{\epsilon}_{mr}, \hat{\epsilon}_{m\varphi}, \hat{\epsilon}_{mz}, \hat{\epsilon}_{mrz}]^T - [\alpha, \alpha, \alpha, 0]^T \cdot (T - T_0),$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения материала;  $T_0$  – начальная температура,  $\hat{\epsilon}_{mr}, \hat{\epsilon}_{m\varphi}, \hat{\epsilon}_{mz}, \hat{\epsilon}_{mrz}$  – компоненты тензора деформации.

Взаимосвязи между полевыми задачами показаны на рис. 4, б. Как видно, электромагнитная и тепловая задачи являются сильносвязанными, т.к. электропроводность слитка существенно изменяется при изменении температуры в пределах 20–1000<sup>0</sup>С. Вместе с тем, связь между тепловой задачей и задачей определения напряженно-деформируемого состояния нагреваемого слитка слабая, односторонняя (механические напряжения не влияют на электромагнитные и тепловые процессы).

Решение термомеханической задачи выполнено численным методом конечных элементов в пакете программ Comsol [17]. Изменения рассчитанных величин вдоль поверхности слитка приведены на рис. 4, в для различной частоты источника питания индуктора и случая применения внешнего магнитопровода (более детальная информация представлена в работе [13]).

**Мультифизические цепи** могут рассматриваться как определенный класс мультифизических задач в электротехнике согласно классификации на рис. 3, б. Известно, что процессы различной физической природы могут исследоваться методами теории эквивалентных электрических цепей с сосредоточенными параметрами. При этом традиционно в зависимости от изучаемого в данном устройстве процесса формируется эквивалентная цепь – электрическая, магнитная, тепловая или гидравлическая, а ее решение выполняется с применением методов теории электрических цепей – линейных, параметрических или нелинейных.

Если в рамках мультифизической задачи взаимосвязанные физические процессы моделируются методом эквивалентных цепей, связанных между собой входными и выходными переменными, то такую интегрированную цепь будем называть *мультифизической цепью*. Связь между эквивалентными цепями для различных физических процессов осуществляется с помощью управляемых источников тока и напряжения с использованием соответствующих математических блоков, реализующих в общем случае функциональные зависимости между входными и выходными величинами для каждой цепи. Для компьютерной реализации таких мультицепных моделей наиболее подходящим и мощным пакетом программ является программа Matlab/Simulink с приложениями SimPowerSystems и SimScape.

Согласно общей классификации мультифизических задач (рис. 3, а) мультицепные задачи также подразделяются на слабосвязанные и сильносвязанные, в случае слабой связи решаются последовательно, а сильной связи – одновременно.

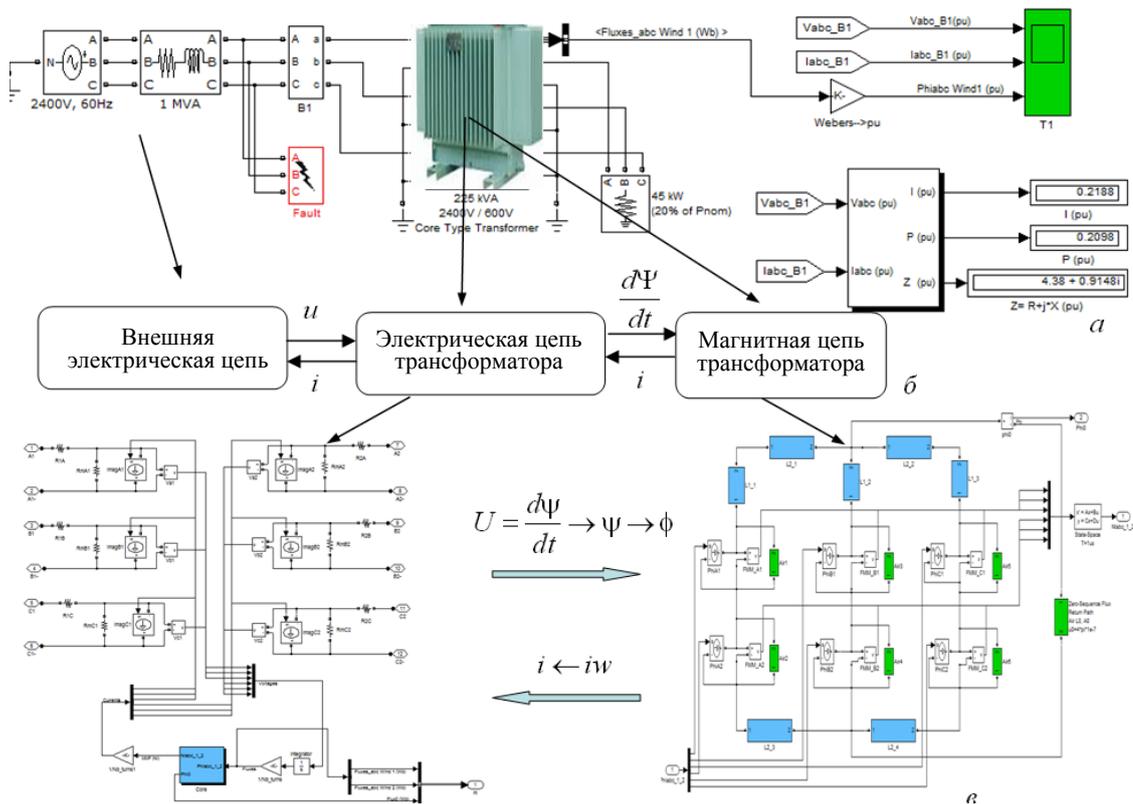


Рис. 5

В качестве примера рассмотрим модель силового трехфазного трансформатора, состоящую из внешней электрической цепи, непосредственно электрической цепи трансформатора и эквивалентной нелинейной магнитной цепи его магнитопровода и активной нагрузки, мощность которой составляет 20% мощности трансформатора (рис. 5). Модель реализована средствами программы Matlab/Simulink. Данные, которые передаются между электрической и магнитной цепями трансформатора, определяются следующим образом. По фазным напряжениям на первичных и вторичных обмотках после интегрирования определяются потокоцепления или магнитные потоки (после деления на число витков) в стержнях в местах расположения этих обмоток. Значения магнитных потоков передаются в магнитную цепь. После расчета магнитной цепи находятся ампер-витки каждой обмотки, а отсюда и токи во всех обмотках. Значения токов используются при расчете электрической цепи. Такая передача данных между электрической и магнитной цепью трансформатора показана на рис. 5, в стрелками.

Расчет электромагнитного переходного процесса в цепи на рис. 5, а выполнялся средствами пакета Matlab/Simulink. В качестве примера рассчитывался режим однофазного короткого замыкания в первичной цепи трансформатора (фаза А в момент времени 0,05 с замыкается на землю и в момент 0,15 с размыкается), который реализуется с помощью блока "Fault" на рис. 5, а. Полученные изменения во времени первичных фазных напряжений, первичных линейных токов и магнитных потоков в стержнях трансформатора в относительных единицах (в качестве базовых используются номинальные значения) приведены на рис. 6.

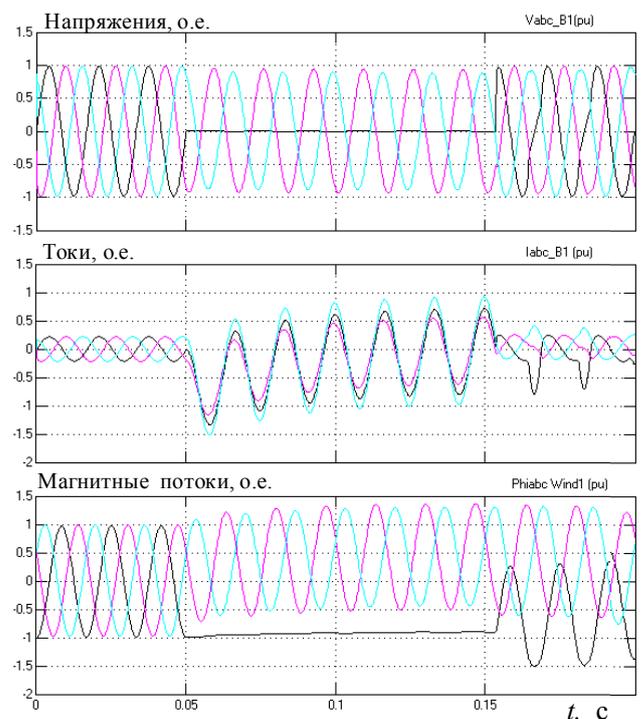


Рис. 6

**Мультифизические цепно-полевые задачи.** Моделирование и исследование ряда электротехнических устройств может выполняться при совместном рассмотрении как цепных схем замещения, так и полевых методов расчета в рамках одной связанной математической модели. При этом моделирование на основе теории электромагнитного поля дает наиболее полное представление о поведении исследуемого устройства в различных режимах. Вместе с тем для изучения динамических режимов работы важно учитывать взаимодействие устройств с внешними цепями и схемами, а в отдельных случаях и электрические связи между элементами устройств (например, для трансформаторов с несколькими обмотками). Необходимость создания комбинированных моделей устройств и внешних цепей обуславливается также наличием нелинейных элементов в структуре устройств и возможностью возникновения переходных режимов их работы.

Формулировки и основные подходы к решению связанных цепно-полевых задач приведены, например, в [21, 36]. Основы совместного расчета электромагнитных полей с магнитными и электрическими цепями изложены и в [19, 22], где показаны также преимущества связанного решения задач электромагнитного поля устройств с учетом переходных процессов во внешних цепях.

При реализации цепно-полевых моделей, например, в [5, 7, 10, 41], результатом численного расчета цепной модели являются интегральные параметры (напряжения, токи элементов), а результатом полевой модели – дифференциальные параметры (напряженность электромагнитного поля).

Численное решение цепно-полевых задач проводится, как правило, в вычислительных комплексах MatLab – Comsol Multiphysics или MatLab – Ansys Multiphysics [14, 17, 30] с использованием программных средств сопряжения таких программ. Например, программное обеспечение Comsol LiveLink for MatLab позволяет сохранять модели Comsol как m-файлы MatLab и выполнять их в среде MatLab. В частности, возможен экспорт модели Comsol в программу Simulink/MatLab [33]. Результатом этого экспорта является представление модели Comsol в виде блока структурной схемы динамической системы (например, системы управления), моделируемой в Simulink. Взаимный обмен данными между программами Comsol и Simulink/MatLab предусмотрен через Comsolserver.

Область применения связанных цепно-полевых задач широка и включает все виды электрических машин [10, 16, 25, 36, 42], трансформаторы [7, 15, 28, 41], электромагнитные системы [35], кабельные линии [6, 9] и др. К примеру, в [1] обоснованы перспективы использования цепно-полевого моделирования динамических режимов электромеханических преобразователей. В [3] решена цепно-полевая задача для исследования электромагнитных процессов при перемешивании жидкого металла под действием магнитных полей.

Связанные цепно-полевые задачи предусматривают не только связь электромагнитных устройств с внешними электрическими или магнитными цепями, но и цепями с элементами силовой электроники (диодами, тиристорами, транзисторами, др.), а также с системами их управления. Детальное описание подходов к моделированию электронных элементов цепей, подключенных к устройствам, приведено в [39, 42]. Решение задач со связью электрических устройств, внешних цепей и систем управления показано в [25, 29, 32].

Согласно общей классификации (рис. 3, а) цепно-полевые модели подразделяются на слабо-связанные и сильносвязанные в зависимости от характера связи между полевой и цепной частями общей модели. Сильносвязанная цепно-полевая задача решена, к примеру, в работе [5]. Полевая модель в [5] позволяет рассчитать электромагнитные параметры элементов заземляющего устройства, которые далее используются в цепной модели для расчета токов элементов. При найденных токах вновь используется полевая модель для расчета характеристик электромагнитного поля. Кроме того, сильносвязанные цепно-полевые задачи совместно и одновременно решены в [18, 42], последовательное решение цепной и полевой задач описано в работах [25, 39].

При разработке цепно-полевых моделей в качестве переменных, передаваемых между цепной и полевой задачами, используются величины соответствующих токов и напряжений, т.к. в теории цепей именно эти величины являются базовыми. При этом важно, чтобы понятия "электрического напряжения" и в теории цепей, и в теории электромагнитного поля были согласованы друг с другом.

Известно, что в теории цепей величина напряжения между узлами 1 и 2 представляет собой разность потенциалов  $u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ . В теории электромагнитного поля основной величиной является вектор напряженности электрического поля  $E = -\nabla\varphi - \partial A / \partial t$ , а величина напряжения, как правило, определяется в виде линейного интеграла от этой напряженности (см., например, [4], стр. 63):

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \left( -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l}.$$

Видно, что такое определение напряжения не соответствует напряжению в теории цепей. Для достижения соответствия следует определить понятие напряжения в теории поля как интеграл лишь от потенциальной части вектора напряженности  $\mathbf{E}$ , т.е.

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{nom} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (-\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Только таким образом рассчитанные напряжения можно передавать между цепной и полевой моделями рассматриваемой задачи. Справедливость именно такого определения напряжения в теории электромагнитного поля подтверждается, например, в работе [2].

В качестве примера цепно-полевой модели рассмотрим представленную в [9] цепно-полевую модель расчета электромагнитного и теплового поля в трехфазной кабельной линии подземной прокладки с учетом конкретной схемы заземления экранов кабелей (рис. 7, а).

Основой модели являются:

- интегро-дифференциальные уравнения для определения векторного потенциала  $\dot{\mathbf{A}} = (0, 0, \dot{A}_z)$  в поперечном сечении кабелей и окружающем пространстве

$$j\omega\sigma \dot{\mathbf{A}} + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \sigma \Delta \dot{U}_i, \quad (1)$$

$$\int_{\sum_i S_i} \dot{J}_z dS = \int_{\sum_i S_i} (-j\omega\sigma \dot{A}_z + \sigma \Delta \dot{U}_i) dS = 0, \quad (2)$$

- уравнение цепи  $\Delta \dot{U}_3 = \Delta \dot{U} - 2R_3(\dot{I}_{3A} + \dot{I}_{3B} + \dot{I}_{3C}), \quad (3)$

- и уравнение для определения температурного поля  $T$

$$-\nabla \cdot \lambda \nabla T = Q. \quad (4)$$

Здесь  $\omega$  – круговая частота изменения тока;  $\sigma$  – электропроводность среды;  $\dot{J}$  – плотность тока;  $S_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -ой проводящей среды в рамках расчетной области (среди таких сред рассматриваются жилы, экраны кабелей и земля);  $\Delta \dot{U}_i$  – падение напряжения в проводящей среде на участке единичной длины;  $R_3$  – сопротивление земли;  $\dot{I}_{3A}, \dot{I}_{3B}, \dot{I}_{3C}$  – токи в экранах фаз кабелей  $A, B, C$  соответственно;  $\Delta \dot{U}_i = \Delta \dot{U}_{жс}$  – в области жил;  $\Delta \dot{U}_i = \Delta \dot{U}_3$  – в области экрана;  $\Delta \dot{U}_i = \Delta \dot{U}$  – в области грунта.

Неизвестными величинами в системе (1)–(4) являются  $\dot{A}_z, \Delta \dot{U}_3, \Delta \dot{U}, T$ . Такая модель позво-

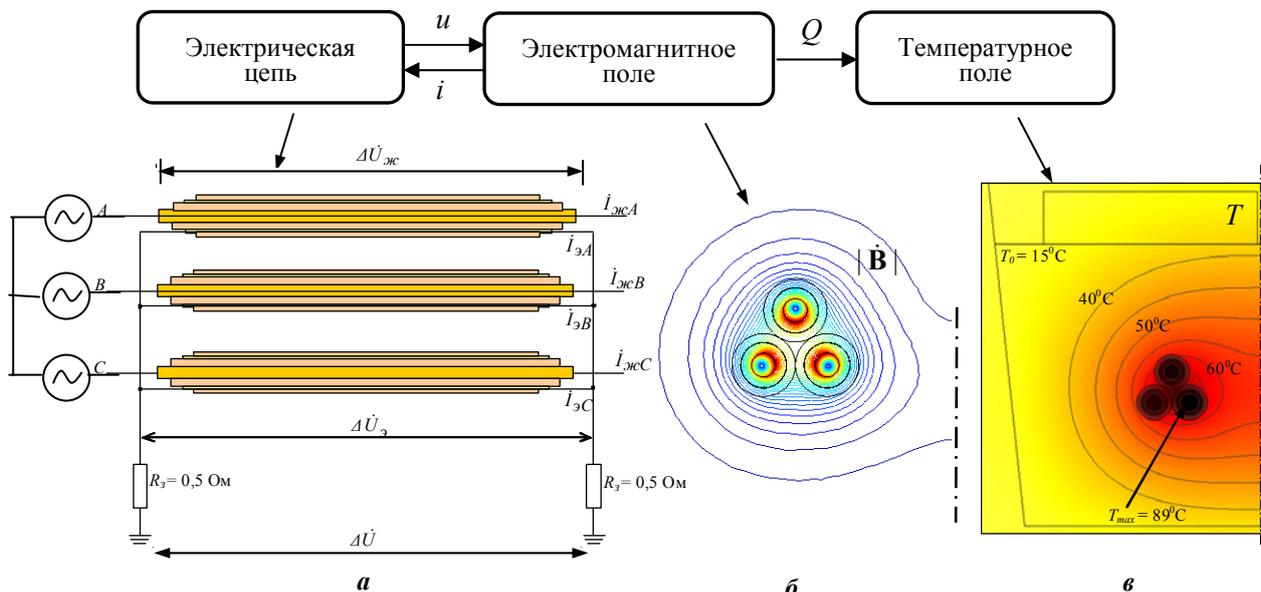


Рис. 7

ляет рассчитывать несимметричные режимы работы кабельных линий, учитывать параметры заземления, находить токи, протекающие в жилах кабелей и наведенные в экранах. Последнее дает возможность во взаимосвязи (путем определения мощности тепловых источников в электромагнитной задаче) решить тепловую задачу распределения температурного поля кабельной линии. В частности, результаты решения связанной электротепловой задачи для одной цепи подземной кабельной линии с кабелями, проложенными треугольником, представлены на рис. 7, б, в.

В описанной модели учет уравнения цепи (3) выполняется непосредственно в программной среде Comsol путем дополнительного использования слабой формы (weak form).

Пример использования слабосвязанной цепно-полевой модели приведен в работе [6], в которой исследуются закономерности распределения электрического поля в силовом кабеле на 330 кВ в аварийном режиме. Предварительно решается цепная задача в программе моделирования динамических систем Simulink/MatLab, определяется напряжение кабеля в аварийном режиме короткого замыкания в нагрузке кабельной линии [12]. После этого в программе Comsol Multiphysics реализуется полевая модель относительно электрического потенциала при заданном напряжении на токопроводящей жиле, найденном из решения цепной задачи и анализа переходных электромагнитных процессов аварийного режима.

**Заключение.** Мультифизическое моделирование является одним из современных направлений в моделировании и исследовании электротехнических устройств, эффективность работы которых определяется совокупностью одновременно протекающих и взаимозависимых процессов и явлений различной физической природы. В работе проведен анализ литературных источников и показаны основные подходы к решению такого класса задач.

Приведена классификация мультифизических задач в электротехнике по двум признакам – с точки зрения характера связи между различными физическими процессами исследуемого устройства (сильносвязанные и слабосвязанные процессы) и с точки зрения подходов к моделированию физических процессов (мультиполевые, мультицепные и цепно-полевые задачи), рассмотрены особенности их решения. Отмечено, что для компьютерной реализации мультифизического моделирования целесообразно использовать такие современные пакеты программ, как COMSOL Multiphysics, ANSYS Multiphysics, MATLAB/Simulink.

Приведены примеры трех различных типов мультифизических задач согласно данной классификации и показаны особенности их решения.

Следует отметить, что, несмотря на достаточную сложность решения взаимосвязанных задач, мультифизическое моделирование является перспективным методом численного моделирования и исследования электротехнических устройств различного типа, и на современном этапе развития компьютерной техники и создания программных комплексов его роль при проектировании новых устройств и в повышении эффективности действующих устройств будет возрастать.

1. Васильковский Ю.Н. Перспективы моделирования динамических режимов электромеханических преобразователей на основе цепно-полевых методов // *Электротехника і електромеханіка*. – 2003. – № 1. – С. 23–25.
2. Глухенький А.И., Гориславец Ю.М. Скалярный электрический и векторный магнитный потенциалы в теории электромагнитного поля // *Техн. електродинаміка*. – 2012. – № 2. – С. 7–8.
3. Глухенький А.И., Гориславец Ю.М., Максименко В.Ю. Электромагнитный перемешиватель жидкого металла с поочередным действием бегущего и пульсирующего магнитных полей // *Техн. електродинаміка*. – 2014. – № 4. – С. 123–125.
4. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т.1. – Санкт-петербург: Питер, 2004. – 462 с.
5. Коровкин Н.В., Шишигин С.Л. Расчетные методы в теории заземления // *Научн.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун-та*. – 2013. – № 1. – С. 74–79. – [http://ntv.spbstu.ru/fulltext/N1.166.2013\\_11.PDF](http://ntv.spbstu.ru/fulltext/N1.166.2013_11.PDF) (05.08.2014).
6. Кучерявая И.Н. Применение метода многомасштабного моделирования для исследования электрического поля в изоляции силового кабеля на 330 кВ в аварийном режиме // *Техн. електродинаміка*. – 2012. – № 4. – С. 13–18.
7. Лебедев В.Д., Яблоков А.А. Исследование динамических процессов в измерительных трансформаторах тока и напряжения // *Вестник ИГЭУ*. – 2013. – Вып. 6. – С. 1–7. – <http://vestnik.ispu.ru/sites/vestnik.ispu.ru/files/publications/str.98-104.pdf>
8. Математическое моделирование и проведение натурального эксперимента / Под ред. В.Н. Тимофеева, Е.А. Головенко, Е.В. Кузнецова – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2007. – 210 с.
9. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Численный расчет электромагнитных и тепловых процессов в подземной кабельной линии. Стационарный режим // *Техн. електродинаміка*. Темат. выпуск "Силовая електроніка та енергоефективність". – 2006. – Ч. 1. – С. 91–95.
10. Рымша В.В., Радимов И.Н., Гулый М.В., Кравченко П.А. Усовершенствованная цепно-полевая модель вентильно-реактивного двигателя // *Электротехника і електромеханіка*. – 2010. – № 5. – С. 22–26.
11. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

12. Щерба А.А., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Электромагнитные процессы в кабельной линии с полиэтиленовой изоляцией на напряжение 330 кВ // Техн. электродинамика. – 2013. – № 1. – С. 9–15.
13. Щерба А.А., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н., Ушаков В.И. Компьютерное моделирование электротепловых процессов и термомеханических напряжений при индукционном нагреве движущихся медных слитков // Техн. электродинамика. – 2013. – № 2. – С. 10–18.
14. Ansys Multiphysics – available at : <http://www.ansys.com> (accessed 5 August 2014).
15. Bhide R.S., Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Korla J.P. Coupled circuit-field formulation for analysis of parallel operation of converters with interphase transformer // Electric Power Systems Research. – 2008. – Vol. 78. – Is. 1. – Pp. 158–164.
16. Chan T.F., Lai L.L., Yan L.T. A coupled circuit and field analysis of a three-phase induction motor with the Smith connection // IEEE Trans. on Magnetics. – 2006. – Vol. 42. – No. 4. – Pp. 1315–1318.
17. Comsol Multiphysics – available at : <http://www.comsol.com> (accessed 5 August 2014).
18. Costa M.C., Nabeta S.L., Cardoso J.R. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor // IEEE Trans. on Magnetics. – 2000. – Vol. 36. – No. 4. – Pp. 1431–1434.
19. Dular P. Dual magnetodynamic finite element formulations with natural definitions of global quantities for electric circuit coupling // Scientific Computing in Electrical Engineering. – 2001. – Vol. 18. – Pp. 367–377.
20. Eustache P., Meunier G., Coulomb J.L. Finite element toolbox for generic coupling (magnetic, thermal, etc.) // IEEE Trans. on Magnetics. – 1996. – Vol. 32. – Is. 3. – Pp. 1461–1464.
21. Gersem H., Hameyer K., Weiland T. Field-circuit coupled models in electromagnetic simulation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 168. – Is. 1–2. – Pp. 125–133.
22. Gersem H., Mertens R., Lahaye D., Vandewalle S., Hameyer K. Solution strategies for transient, field-circuit coupled systems // IEEE Trans. on Magnetics. – 2000. – Vol. 36. – No. 4. – Pp. 1531–1534.
23. Golosnoy I.O., Sykulski J.K. Numerical modeling of non-linear coupled thermo-electric problems. A comparative study // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). – 2009. – Vol. 28. – No. 3. – Pp. 639–655.
24. Hameyer K., Driesen J., De Gersem H., Belmans R. The classification of coupled field problems // IEEE Trans. on Magnetics. – 1999. – Vol. 35. – No. 3. – Pp. 1618–1621.
25. Kanerva S. Simulation of electrical machines circuits and control systems using finite element method and system simulator // Doctoral Dissertation. – Helsinki University of Technology. Department of Electrical and Communications Engineering. – Helsinki, 2005. – 92 p. – available at : <http://lib.tkk.fi/Diss/2005/isbn9512276100/isbn9512276100.pdf> (accessed 5 August 2014).
26. Kulkarni S.V., Khaparde S.A. Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics. – CRC Press, Taylor & Francis group, 2012. – 750 p.
27. Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Escarela-Perez R., Campero-Littlewood E. Applications of coupled field formulations to electrical machinery // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). – 2007. – Vol. 26. – Is. 2. – Pp. 489–523.
28. Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Jochi V.S. Analysis of short circuit performance of split-winding transformer using coupled field-circuit approach // IEEE Trans. on Power Delivery. – 2007. – Vol. 22. – No. 2. – Pp. 936–943.
29. Manot G., Lefevre Y., Piquet H., Richardeau F. Integration of control loops in coupled field circuit model to study magnetic devices supplied by power electronic converter and their control // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL) – 2002. – Vol. 21. – No. 4. – Pp. 563–572.
30. Matlab. The Language of Technical Computing – available at : <http://www.mathworks.com/products/matlab/> (accessed 5 August 2014).
31. Michopoulos J.G., Farhat C., Fish J. Survey on modeling and simulation of multiphysics systems. – 2005. – Available at : [http://www.columbia.edu/cu/civileng/fish/Publications\\_files/MultiphysicsSurvey.pdf](http://www.columbia.edu/cu/civileng/fish/Publications_files/MultiphysicsSurvey.pdf) (accessed 5 August 2014).
32. Ortiz J.L.R., Sadowski N., Kuo-Peng P., Batistela N.J., Bastos J.P.A. Coupling static converter with control loop and nonlinear electromagnetic devices // IEEE Trans. on Magnetics. – 2001. – Vol. 37. – No. 5. – Pp. 3514–3517.
33. Simulink. Simulation and Model-Based Design – available at : <http://www.mathworks.com/products/simulink/> (accessed 5 August 2014).
34. Sykulski J.K. Computational magnetics. – Chapman & Hall Publisher, 1995. – 373 p.
35. Tanaka T., Takahashi N. Direct finite element analysis of flux and current distributions under specified conditions // IEEE Trans. on Magnetics. – 1990. – Vol. 26. – No. 2. – Pp. 968–970.
36. Tsukerman I.A., Konrad A., Meunier G., Sabonnadiere J.C. Coupled field-circuit problems: trends and accomplishments // IEEE Trans. on Magnetics. – 1993. – Vol. 29. – No. 2. – Pp. 1701–1704.
37. Turowski J. Coupled fields. – Springer, 1995. – Pp. 234–284.
38. Turowski J. Fast computation of coupled fields in complex, 3-D, industrial electromagnetic structures // The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). – 1997. – Vol. 17. – No.4. – Pp. 489–505.
39. Vaananen J. Circuit theoretical approach to couple two-dimensional finite element model with external circuit equations // IEEE Trans. on Magnetics. – 1996. – Vol. 32. – No. 2. – Pp. 400–410.
40. Yatchev I. Coupled filed problems in electrical apparatus // Facta Universitatis. – 2003. – Vol. 3. – No. 15. – Pp. 1089–1101. – available at : <http://facta.junis.ni.ac.rs/macar/macar200303/macar200303-15.pdf> (accessed 5 August 2014).
41. Zhang Y., Zhang N., Kang Y., Yan X., Xie D. Magnetic field of a complex construction transformer using direct field-circuit coupling method // Advanced Materials Research. – 2013. – Vols. 614–615. – Pp. 1230–1233.
42. Zhou P., Fu W.N., Lin D., Stanton S., Cendes Z.J. Numerical modeling of magnetic devices // IEEE Trans. on Magnetics. – 2004. – Vol. 40. – No. 4. – Pp. 1803–1809.

**МУЛЬТИФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ****Подольцев О.Д.,** докт.техн.наук, **Кучерява І.М.,** канд.техн.наук**Інститут електродинаміки НАН України,****пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна. E-mail: [podol@ied.org.ua](mailto:podol@ied.org.ua)**

*У роботі дано загальну характеристику моделювання електротехнічних пристроїв з процесами, що одночасно протікають і мають різну фізичну природу, – мультифізичного моделювання. Проведено класифікацію мультифізичних задач в електротехніці як за характером зв'язку між такими фізичними процесами, так і за підходами до їхнього моделювання. Відповідно до такої класифікації виконано огляд літературних джерел та наведено приклади розв'язання трьох типів мультифізичних задач. Бібл. 42, рис. 7, табл. 2.*

**Ключові слова:** мультифізичне моделювання, мультипольові задачі, мультифізичні кола, коло-польові задачі, сильно- і слабкозв'язані процеси.

**MULTIPHYSICS MODELING OF ELECTROTECHNICAL DEVICES****Podoltsev O.D., Kucheriava I.M.****Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,****pr. Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine. E-mail: [podol@ied.org.ua](mailto:podol@ied.org.ua)**

*In the article the general characterization of electrical devices with simultaneously running processes of different physical nature, that is multiphysics modeling, is presented. The classification of multiphysics (coupled) problems in electrical engineering both according to character of coupling between these physical processes (weakly coupled and strongly coupled processes) and by approaches to their modeling (multi-field problems, multi-circuit problems and field-circuit problems) is carried out. In compliance with such classification the review of scientific publications is implemented and the examples of three types of solved multiphysics problems are given. The distinctions of the coupled problems and approaches to their solving are given. As examples, the interconnections between electromagnetic, thermal processes and thermomechanical stress at induction heating of moving ingots, the coupling of external circuit with electric and magnetic circuits of three-phase power transformer and the scheme of solving the electromagnetic and thermal field problems for underground power cable line simultaneously with electric circuit equation taking into account the type of screen grounding are presented. References 42, figures 7, tables 2.*

**Key words:** multiphysics modeling, multi-field problems, multiphysics circuits, field-circuit problems, strong and weak coupled processes.

1. Vaskovskii Yu.N. Perspectives for modeling of electromechanical converts under dynamic conditions on the basis of field-circuit methods // *Elektrotehnika i Elektromekhanika*. – 2003. – № 1. – Pp. 23–25. (Rus)

2. Glukhenkyi A.I., Gorislavets Yu.M. Scalar electric and vector magnetic potentials in the theory of electromagnetic field // *Tekhnichna Elektrodynamika*. – 2012. – № 2. – Pp. 7–8. (Rus)

3. Glukhenkyi A.I., Gorislavets Yu.M., Maksimenko V.Yu. Electromagnetic stirrer of liquid metal with alternated action of traveling and pulsating magnetic fields // *Tekhnichna Elektrodynamika*. – 2014. – № 4. – Pp. 123–125. (Rus)

4. Demirchian K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V., Chechurin B.L. Theoretical foundations of electrical engineering. Vol. 1. – Sankt-Peterburg: Piter, 2004. – 462 p. (Rus)

5. Korovkin N.V., Shishigin S.L. Computational methods in the theory of grounding // *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*. – 2013. – № 1. – С. 74–79. – available at: [http://ntv.spbstu.ru/fulltext/N1.166.2013\\_11.PDF](http://ntv.spbstu.ru/fulltext/N1.166.2013_11.PDF). (accessed 5 August 2014). (Rus)

6. Kucheriavaia I.N. Application of multiscale modeling for study of electric field in insulation of 330 kV power cable at emergency operation // *Tekhnichna Elektrodynamika*. – 2012. – № 4. – Pp. 13–18. (Rus)

7. Lebedev V.D., Yablokov A.A. Study of dynamic processes in instrument current and voltage transformers // *Vestnik IGEU*. – 2013. – Is. 6. – Pp. 1–7. – <http://vestnik.ispu.ru/sites/vestnik.ispu.ru/files/publications/str.98-104.pdf>. (Rus)

8. *Mathematical modeling and realization of full-scale experiment* / Pod red. V.N.Timofeeva, E.A.Golovenko, E.V.Kuznetsova. – Krasnoyarsk: Sibirskii federalnyj universitet, 2007. – 210 p. (Rus)

9. Podoltsev A.D., Kucheriavaia I.N. Numerical calculation of electromagnetic and thermal processes in underground power cable line. Steady-state conditions. // *Tekhnichna Elektrodynamika*. Temat. vypusk "Sylova elektronika ta enerhoefektyvnist". – 2006. – Vol. 1. – Pp. 91–95. (Rus)

10. Rymsha V.V., Radimov I.N., Gulyi M.V., Kravchenko P.A. Improved field-circuit model of rectifier-reluctance motor // *Elektrotehnika i Elektromekhanika*. – 2010. – № 5. – Pp. 22–26. (Rus)

11. Segerlind L. Application of finite-element method. – Moskva: Mir, 1979. – 312 p. (Rus)

12. Shcherba A.A., Podoltsev A.D., Kucheriavaia I.N. Electromagnetic processes in 330 kV cable line with polyethylene insulation // *Tekhnichna elektrodynamika*. – 2013. – № 1. – Pp. 9–15. (Rus)

13. Shcherba A.A., Podoltsev A.D., Kucheriavaia I.N., Ushakov V.I. Computer modeling of electrothermal processes and thermomechanical stress at induction heating of moving copper ingots // *Tekhnichna Elektrodynamika*. – 2013. – № 2. – Pp. 10–18. (Rus)

14. Ansys Multiphysics – available at: <http://www.ansys.com> (accessed 5 August 2014).

15. *Bhide R.S., Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Koria J.P.* Coupled circuit-field formulation for analysis of parallel operation of converters with interphase transformer // *Electric Power Systems Research*. – 2008. – Vol. 78. – Is. 1. – Pp. 158–164.
16. *Chan T.F., Lai L.L., Yan L.T.* A coupled circuit and field analysis of a three-phase induction motor with the Smith connection // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 2006. – Vol. 42. – No. 4. – Pp. 1315–1318.
17. *Comsol Multiphysics* – available at: <http://www.comsol.com> (accessed 5 August 2014).
18. *Costa M.C., Nabeta S.I., Cardoso J.R.* Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 2000. – Vol. 36. – No. 4. – Pp. 1431–1434.
19. *Dular P.* Dual magnetodynamic finite element formulations with natural definitions of global quantities for electric circuit coupling // *Scientific Computing in Electrical Engineering*. – 2001. – Vol. 18. – Pp. 367–377.
20. *Eustache P., Meunier G., Coulomb J.L.* Finite element toolbox for generic coupling (magnetic, thermal, etc.) // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 1996. – Vol. 32. – Is. 3. – Pp. 1461–1464.
21. *Gersem H., Hameyer K., Weiland T.* Field-circuit coupled models in electromagnetic simulation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2004. – Vol. 168. – Is. 1–2. – Pp. 125–133.
22. *Gersem H., Mertens R., Lahaye D., Vandewalle S., Hameyer K.* Solution strategies for transient, field-circuit coupled systems // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 2000. – Vol. 36. – No. 4. – Pp. 1531–1534.
23. *Golosnoy I.O., Sykulski J.K.* Numerical modeling of non-linear coupled thermo-electric problems. A comparative study // *The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)*. – 2009. – Vol. 28. – No. 3. – Pp. 639–655.
24. *Hameyer K., Driesen J., De Gersem H., Belmans R.* The classification of coupled field problems // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 1999. – Vol. 35. – No. 3. – Pp. 1618–1621.
25. *Kanerva S.* Simulation of electrical machines circuits and control systems using finite element method and system simulator // *Doctoral Dissertation*. – Helsinki University of Technology. Department of Electrical and Communications Engineering. – Helsinki, 2005. – 92 p. – available at: <http://lib.tkk.fi/Diss/2005/isbn9512276100/isbn9512276100.pdf> (accessed 5 August 2014).
26. *Kulkarni S.V., Khaparde S.A.* *Transformer Engineering: Design, Technology, and Diagnostics*. – CRC Press, Taylor & Francis group, 2012. – 750 p.
27. *Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Escarela-Perez R., Campero-Littlewood E.* Applications of coupled field formulations to electrical machinery // *The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)*. – 2007. – Vol. 26. – Is. 2. – Pp. 489–523.
28. *Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Jochi V.S.* Analysis of short circuit performance of split-winding transformer using coupled field-circuit approach // *IEEE Trans. on Power Delivery*. – 2007. – Vol. 22. – No. 2. – Pp. 936–943.
29. *Manot G., Lefevre Y., Piquet H., Richardeau F.* Integration of control loops in coupled field circuit model to study magnetic devices supplied by power electronic converter and their control // *The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)* – 2002. – Vol. 21. – No. 4. – Pp. 563–572.
30. *Matlab*. The Language of Technical Computing – available at: <http://www.mathworks.com/products/matlab/> (accessed 5 August 2014).
31. *Michopoulos J.G., Farhat C., Fish J.* Survey on modeling and simulation of multiphysics systems. – 2005. – available at: [http://www.columbia.edu/cu/civileng/fish/Publications\\_files/MultiphysicsSurvey.pdf](http://www.columbia.edu/cu/civileng/fish/Publications_files/MultiphysicsSurvey.pdf) (accessed 5 August 2014).
32. *Ortiz J.L.R., Sadowski N., Kuo-Peng P., Batistela N.J., Bastos J.P.A.* Coupling static converter with control loop and nonlinear electromagnetic devices // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 2001. – Vol. 37. – No. 5. – Pp. 3514–3517.
33. *Simulink*. Simulation and Model-Based Design. – available at: <http://www.mathworks.com/products/simulink/> (accessed 5 August 2014).
34. *Sykulski J.K.* *Computational magnetics*. – Chapman & Hall Publisher, 1995. – 373 p.
35. *Tanaka T., Takahashi N.* Direct finite element analysis of flux and current distributions under specified conditions // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 1990. – Vol. 26. – No. 2. – Pp. 968–970.
36. *Tsukerman I.A., Konrad A., Meunier G., Sabonnadiere J.C.* Coupled field-circuit problems: trends and accomplishments // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 1993. – Vol. 29. – No. 2. – Pp. 1701–1704.
37. *Turowski J.* *Coupled fields*. – Springer, 1995. – Pp. 234–284.
38. *Turowski J.* Fast computation of coupled fields in complex, 3-D, industrial electromagnetic structures // *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)*. – 1997. – Vol. 17. – No.4. – Pp. 489–505.
39. *Vaananen J.* Circuit theoretical approach to couple two-dimensional finite element model with external circuit equations // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 1996. – Vol. 32. – No. 2. – Pp. 400–410.
40. *Yatchev I.* Coupled filed problems in electrical apparatus // *Facta Universitatis*. – 2003. – Vol. 3, No. 15. – Pp. 1089–1101. – available at: <http://facta.junis.ni.ac.rs/macar/macar200303/macar200303-15.pdf> (accessed 5 August 2014).
41. *Zhang Y., Zhang N., Kang Y., Yan X., Xie D.* Magnetic field of a complex construction transformer using direct field-circuit coupling method // *Advanced Materials Research*. – 2013. – Vols. 614–615. – Pp. 1230–1233.
42. *Zhou P., Fu W.N., Lin D., Stanton S., Cendes Z.J.* Numerical modeling of magnetic devices // *IEEE Trans. on Magnetics*. – 2004. – Vol. 40. – No. 4. – Pp. 1803–1809.

Надійшла 05.08.2014