

УДК 621.314: 621.391

### ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ТА ПИТАННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ ВІБРОДІАГНОСТУВАННЯ РУХОМИХ ВУЗЛІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН

**Ю.І. Гижко**, канд.техн.наук, **М.В. Мислович**, докт.техн.наук  
Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна.  
e-mail:yuriy.gyzhko@gmail.com

*Досліджено особливості фізичних процесів, які відбуваються під час роботи електричних машин змінного струму, зокрема електричних машин, що містять рухомі вузли. Розроблено математичну модель рухомих вузлів роторних електричних машин з використанням лінійних випадкових і лінійних періодичних випадкових процесів, яка враховує періодичність вібраційного процесу і вплив на нього окремих джерел вібрації, що мають різну фізичну природу і просторову локалізацію. Для створеної моделі обґрунтовано діагностичні ознаки, використання яких дозволяє визначити технічний стан вузла, що діагностується. Розроблено та експериментально випробувано лабораторний зразок системи технічного діагностування, перевірено його відповідність діючим стандартам України. Проведено експериментальне дослідження з вимірювання та аналізу вібраційних сигналів, отриманих з лопаті працюючої вітроенергетичної установки. Проведено експерименти на стенді Інституту електродинаміки; з використанням запропонованих моделей та методів діагностування проведено навчання системи та перевірено її функціональність при визначенні технічного стану вузлів, що діагностувалися. Бібл. 15, рис. 6.*

**Ключові слова:** вібраційна діагностика, статистичні методи, електричні машини, системи діагностування.

**Вступ.** У зв'язку з тим, що в даний час понад 90 % енергетичного обладнання електричних станцій та підстанцій виробило свій ресурс, виникає проблема створення систем контролю та діагностування цього обладнання. Використання створених систем, крім їхнього прямого призначення, яке зводиться до отримання інформації про технічний стан об'єкта, що діагностується в заданий момент часу, дозволяє за цією інформацією прогнозувати виникнення можливих дефектів у майбутньому, тобто фактично здійснювати прогнозування залишкового ресурсу.

На сьогодні в значній мірі вирішені питання побудови систем технічного діагностування (СТД) нерухомих вузлів електричних машин (елементи статора, шихтований магнітопровід, станина з місцями кріплення до фундаменту і т.п.) [6]. Однак, наявність обертових вузлів (підшипники кочення, ротор, щітково-колекторний вузол та ін.) створює певні вимоги до систем технічного діагностування електричних машин (ЕМ), які використовуються для визначення їхнього технічного стану [1, 3, 6, 7, 13, 14].

При побудові СТД одним з основних моментів є обґрунтування можливих діагностичних ознак. Аргументовано вибрати і обґрунтувати їх дозволяє побудова і подальший аналіз математичних моделей об'єктів діагностування або фізичних процесів, що супроводжують роботу цих об'єктів. У цьому випадку модель об'єкта, що діагностується, є визначальною для побудови СТД. Залежно від того, яка модель обрана – детермінована або статистична, – відповідно проводиться побудова детермінованої або статистичної СТД. При цьому суттєвим моментом є саме об'єкт (рухомий вузол або нерухомий), для якого створюється математична модель, а також вид фізичного процесу, що використовується у вигляді діагностичного сигналу.

**Метою** цієї роботи є розгляд основних теоретичних і практичних питань, пов'язаних із створенням та застосуванням вібродіагностичної системи для визначення технічного стану рухомих вузлів ЕМ. Необхідно запропонувати математичні моделі, які враховують динаміку цих вузлів, а також циклічність вібраційних процесів, що супроводжують їхню роботу. На базі створених моделей побудувати та експериментально перевірити зразок СТД рухомих вузлів ЕМ.

**Математична модель вібрацій рухомих вузлів ЕМ.** Для побудови стохастичних математичних моделей вібрацій, що супроводжують роботу вузлів ЕМ, була застосована теорія лінійних випадкових процесів (ЛВП) та лінійних періодичних випадкових процесів (ЛПВП) [5–8, 15].

Характерною особливістю фізичних процесів, які відбуваються під час роботи ЕМ змінного струму, зокрема ЕМ, що містять рухомі (обертові) вузли, є, з одного боку, їхня циклічність (регуляр-

ність), а з іншого – вплив додаткових чинників випадкової природи, що виникають безпосередньо у вузлах працюючого обладнання. Так, шихтовані магнітопроводи піддаються дії змінного магнітного поля, викликаного періодичними струмами, що протікають в обмотках; підшипники електричних машин знаходяться під впливом циклічно змінних механічних сил, викликаних обертанням валів тощо. При цьому значення таких процесів не повторюються точно (в математичному розумінні) в кожному циклі (періоді), а мають стохастичний характер. Отже, математична модель діагностичних процесів повинна враховувати одночасно як циклічність, так і стохастичність досліджуваних фізичних процесів.

Основна проблема, яка постала при розробці математичної моделі вібрацій рухомих вузлів, представляла собою розробку на базі класів ЛВП та ЛПВП узагальненої математичної моделі вібраційних процесів, що супроводжують роботу рухомих вузлів ЕМ, для подальшого використання цієї моделі при створенні нових методів та технічних засобів діагностування такого обладнання. Створення моделі надасть можливість отримувати повні ймовірнісні характеристики досліджуваних процесів (наприклад, моменти  $\mu^n$  будь-якого порядку) у загальному випадку [5]. У свою чергу, це дозволить встановити найбільш інформативні діагностичні ознаки і таким чином підвищити точність, надійність та достовірність діагностування технічного стану рухомих вузлів ЕМ. Крім того, одночасне використання класів ЛВП та ЛПВП при дослідженні вібраційних діагностичних сигналів, що вимірюються на обертових вузлах ЕМ, дозволить побудувати ефективні алгоритми їхнього аналізу та класифікації дефектів ЕМ.

На сьогодні є ряд робіт [5–8, 12, 15], в основному прикладного плану, в яких йдеться про такі процеси і їхню суттєву роль в обґрунтуванні тих чи інших циклічних фізичних моделей. Перш за все, з'ясуємо поняття періодичної функції.

В “Математичній енциклопедії” [2], том 4, на сторінці 267 представлено визначення: “Периодическая функция – функция, имеющая период”. Мова йде про детерміновану функцію.

Якщо деяка функція  $f(x)$  має період  $T$ , то її похідна теж періодична і має період  $T$  (коротко, є  $T$ -періодичною). Її первісна  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  має період  $T$  за умови, що  $\int_0^T f(t)dt = 0$ , а в іншому випадку первісна не є періодичною.

При діагностуванні різних електричних пристроїв машин сигнали, що надходять з давачів з різних механічних вузлів, змінюються, але носять циклічний характер. Коротко зупинимося на термінології, а саме, розглянемо поняття циклічності, ритмічності та стохастичної періодичності. Скористаємося викладками, обґрунтованими в [9].

*Циклічний процес* – це фізичне поняття, яке визначено до фізичного явища і стосується того випадку, коли з точки зору фізики (а не строго математично) можна виділити повторюваність характеристик або фізичних властивостей сигналів.

Поняття *ритмічності* вживається тоді, коли спостерігається принаймні два фізичних процеси, один з яких має характер циклічності, близький до другого. Тоді ці два процеси називають ритмічними (один розглядається в ритмі з іншим). Наприклад, різні коливання, викликані одне одним або такі, що відбуваються одне в залежності від іншого, пов'язані з ним. Про ритміку говорять, коли спостерігається одночасно два або кілька процесів, або кілька процесів одночасно.

Ідея *стохастичної періодичності* належить Є.Є.Слуцькому і викладена в його роботі “Сложение случайных причин как источник циклических процессов” [10], що вийшла друком у 1929 році. При цьому виконання умови гільбертовості спочатку не вимагалось. Слід відзначити, що теорія періодичних випадкових процесів – це теорія вимірних функцій двох змінних, одна з яких розглядається як параметр, – по ній процес є періодичним, а по другій змінній процес завжди розглядається як функція множини, що задана на деякому ймовірнісному просторі. Саме завдяки цій другій змінній і з'являються у випадкового процесу властивості, не притаманні детермінованим функціям двох змінних. По другій змінній випадковий процес не може мати періодичних властивостей, бо вона не упорядкована подібно числам на числовій осі.

Використовуючи ідеї Є.Є.Слуцького, проаналізуємо деякі означення стосовно періодичних випадкових процесів. Зупинимося безпосередньо на побудові математичної моделі рухомих частин ЕМ.

Під стохастичною періодичністю розуміють властивість характеристик випадкового процесу повторюватися у часі через відомий період  $T$ , причому реалізації процесу можуть бути і неперіодичними. Наведені вище висловлювання не є означенням, оскільки вони не дають можливості відпо-

вісти на запитання, що таке період випадкового процесу, тому далі ми їх уточнимо і конкретизуємо. Якщо, як це часто прийнято в енергетичній теорії, цікавитися лише характеристиками процесу в рамках перших двох функцій розподілу, то приходимо до так званих періодичних у широкому розумінні випадкових процесів.

Як відомо [5, 6], ЛВП визначається стохастичним інтегралом виду

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), \quad t \in T, \quad (1)$$

де  $\varphi(\tau, t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  – дійсна невід'язкова числова функція (ядро (1)), що задовольняє рівномірно за  $t$  умові  $\varphi(\tau, t) \in L_p(-\infty, \infty)$  при  $p=1, 2$ ;  $\{\eta(\tau), P\{\eta(0)=0\}=1, \tau \in (-\infty, \infty)\}$  – (породжуючий) процес з незалежними приростами і безмежно подільною характеристичною функцією приростів. Саме цей клас процесів дозволяє конструювати різні класи лінійних процесів, у тому числі і клас ЛВП.

Підґрунтя теорії ЛВП наведено у роботі [8], де сформульовано умови, за якими моделі ЛВП можуть виступати як моделі циклічних процесів. У відповідності до цих робіт, *періодичним у широкому розумінні* є сепарабельний випадковий процес  $\xi(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , якщо існує таке  $T > 0$ , що його одновимірна і двовимірна функції розподілу задовольняють умовам

$$F(x; t) \equiv F(x; t+T), \quad F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F(x_1, x_2; t_1+T, t_2+T), \quad t_1, t_2 \in (-\infty, \infty).$$

Але в більшості практичних задач розгляду лише перших двох моментів випадкового процесу недостатньо. Зокрема, для визначення якості статистичної оцінки кореляційної функції необхідно знати третій та четвертий моменти. При більш повному дослідженні властивостей процесів у ЕМ з урахуванням їхніх періодичних ймовірнісних характеристик вище другого порядку можуть бути використані періодичні в розумінні Є.Є.Слуцького процеси. Хоча в згаданій роботі автор не дає строгого означення, з неї можна зробити висновок, що розглядається періодичність випадкових процесів у розумінні еквівалентності за розподілом [10]. У відповідності до підходу Є.Є.Слуцького, *означення* періодичних випадкових процесів може бути наведено у наступному вигляді.

Сепарабельний випадковий процес  $\xi(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  називається *періодичним*, якщо існує таке число  $T > 0$ , що скінченновимірні вектори  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$  і  $(\xi(t_1+T), \xi(t_2+T), \dots, \xi(t_n+T))$ , де  $\{t_k\}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , – множина сепарабельності процесу  $\xi(t)$ , при всіх цілих  $n > 1$  є стохастично еквівалентними в широкому розумінні. Найменше число  $T > 0$ , для якого виконується ця умова, називається *періодом процесу*  $\xi(t)$ .

У відповідності до [5, 8], стохастична еквівалентність у широкому розумінні – це еквівалентність у термінах функцій розподілу. Таким чином, з цього означення випливає, що всі скінченновимірні функції розподілу процесу  $\xi(t)$  є косо-періодичними, тобто

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1+T, \dots, t_n+T). \quad (2)$$

Таким чином, періодичний у розумінні Слуцького випадковий процес є періодичним і в широкому розумінні, але зворотне в загальному випадку невірно. Якщо для періодичного процесу існують моменти  $\mu^n$  до порядку  $n \geq 1$ , то всі вони  $T$ -періодичні по  $t$ , а змішані моменти є періодичними по сукупності аргументів. Стационарний випадковий процес є періодичним по Слуцькому, а його періодом може бути довільне число  $T > 0$ .

Як показано в роботах [6, 7], у багатьох випадках при вирішенні задач діагностування різноманітних технічних об'єктів саме моменти  $\mu^n$  можуть бути використані як діагностичні ознаки. Таким чином, для визначення кількісних оцінок вказаних діагностичних ознак, що характеризують технічний стан певних рухомих частин ЕМ, необхідно враховувати значення  $T > 0$ . Крім того, знання цього періоду надає можливість аргументовано вирішувати низку практичних задач, пов'язаних із статистичною обробкою діагностичних сигналів (вибір довжини вибірки, стаціонаризація та ін.).

Для побудови узагальненої математичної моделі вібрацій необхідно виділити вузол або елемент, який діагностується. Основний інтерес представляють вібрації саме цього вузла, які мають

розглядатися як діагностичний сигнал. Вібрації, що породжуються іншими збуджуючими силами, повинні розглядатися як завади.

Припустимо, що необхідно провести визначення стану певного рухомого вузла ЕМ. У відповідності до поставленої у даній роботі задачі вимірювання вібрацій здійснюється під час роботи ЕМ за допомогою акселерометра, що розташований на вузлі, який діагностується [13]. У точці вимірювання з певною інтенсивністю спостерігаються вібрації, які зумовлені різними збуджуючими джерелами, що супроводжують роботу ЕМ [11]. Серед них можна виділити такі основні фактори [6]:  $\xi_{EM}(t)$  – електромагнітні сили,  $\xi_{\Pi}(t)$  – робота підшипників кочення,  $\xi_{\text{Щ}}(t)$  – робота щітково-колекторного вузла,  $\xi_{AD}(t)$  – аеродинамічні сили,  $\xi_{BB}(t)$  – робота шихтованого магнітопровода. Вібраційні процеси, зумовлені цими збуджуючими джерелами, зароджуються у різних місцях досліджуваної ЕМ і поширюються в точку вимірювання різними шляхами, зазнаючи при цьому певних перетворень (внаслідок поглинання їхньої енергії в тілі досліджуваної ЕМ, часової затримки тощо). Акселерометр, що встановлений в точці вимірювання, фіксує сумарний вплив вібрацій від усіх факторів.

Розглянутий процес можна умовно зобразити схемою, що показана на рис. 1, де прямокутниками зображені багатовходові лінійні системи, які моделюють процеси проходження вібрацій від точок, у яких вони породжуються, до точки вимірювання, яка на рисунку позначена «В».

На якісному рівні [2] сигнал, що вимірюється акселерометром, можна представити співвідношенням

$$\xi(t) = \sum_{j_{EM}=1}^{n_{EM}} a_{j_{EM}} \xi_{EMj_{EM}}(t) + \sum_{j_{\Pi}=1}^{n_{\Pi}} a_{j_{\Pi}} \xi_{\Pi j_{\Pi}}(t) + \sum_{j_{\text{Щ}}=1}^{n_{\text{Щ}}} a_{j_{\text{Щ}}} \xi_{\text{Щ}j_{\text{Щ}}}(t) + \sum_{j_{AD}=1}^{n_{AD}} a_{j_{AD}} \xi_{ADj_{AD}}(t) + \sum_{j_{BB}=1}^{n_{BB}} a_{j_{BB}} \xi_{BBj_{BB}}(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

де для відповідного збуджуючого фактора  $n$  – деяке додатне число, яке визначається конструктивними, технологічними та експлуатаційними характеристиками вузла і задає число входів системи;  $a_j$  – вагові коефіцієнти, які враховують згасання у відповідному каналі,  $a_j > 0$ ;

$$\xi_{EMj_{EM}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j_{EM}}(\tau, t) d\eta_{EM}(\tau), \quad \xi_{\Pi j_{\Pi}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j_{\Pi}}(\tau, t) d\eta_{\Pi}(\tau), \quad \xi_{\text{Щ}j_{\text{Щ}}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j_{\text{Щ}}}(\tau, t) d\eta_{\text{Щ}}(\tau),$$

$$\xi_{ADj_{AD}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j_{AD}}(\tau, t) d\eta_{AD}(\tau), \quad \xi_{BBj_{BB}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j_{BB}}(\tau, t) d\eta_{BB}(\tau), \quad j = \overline{1, n},$$

де  $\varphi_j(\tau, t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  – вектор імпульсних перехідних функцій системи, що розглядається, причому  $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau, t + T)$ ,  $T$  – деяке фіксоване число, період процесу  $\xi(t)$ ;

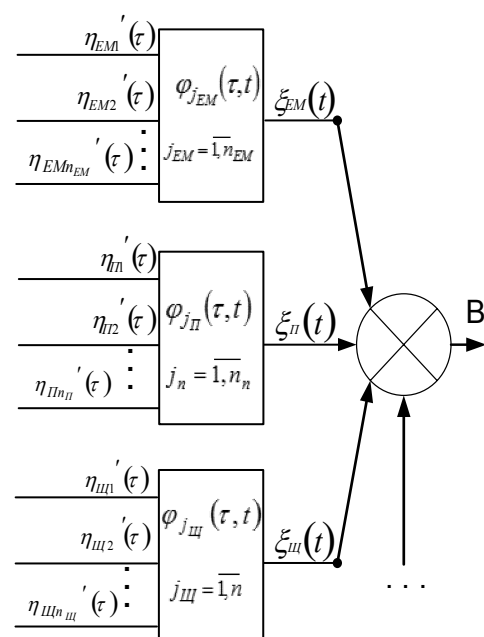


Рис. 1

$\{\eta(\tau), P\{\eta(0)=0\}=1, \tau \in (-\infty, \infty)\}$  – процес з незалежними приростами і безмежно подільною характеристичною функцією (ХФ) приростів.

Запропонована модель враховує як періодичність вібраційного процесу, так і наявність окремих складових вібрацій у цьому процесі, що утворюються внаслідок роботи інших вузлів ЕМ і які мають різну фізичну природу (функціонування електромагнітної системи  $\xi_{EM}(t)$ , щітково-колекторний вузол  $\xi_{\text{Щ}}(t)$ , підшипниковий вузол  $\xi_{\Pi}(t)$  та ін.).

Згідно з [13], вібрації рухомого вузла ЕМ можна представити у вигляді відгуку механічної системи цього вузла на вплив породжуючого імпульсного потоку, що утворюється у вузлі при його роботі. За модель породжуючого імпульсного потоку зазвичай використовується білий шум [3], а модель механічної системи вузла ЕМ може бути представлена у вигляді лінійної системи певного порядку.

За фізичною природою процес, що викликає вібрації вузлів, представляє собою потік випадкових у часі і за

інтенсивністю імпульсів [9]. Припустимо, що вони статистично незалежні і задовольняють умові рівномірної нескінченної малості [6]. Таким чином, цей процес можна описати математичною моделлю випадкових процесів з незалежними значеннями, які підпорядковуються безмежно подільному закону розподілу.

Рухому частину ЕМ можна розглядати як механічну коливальну систему, на яку діє породжуючий процес, що викликає, в свою чергу, її резонування на певних частотах. Резонансні частоти обумовлені не тільки конструктивними особливостями вузла, що досліджується, але і особливостями всієї електричної машини в цілому.

Використання класів ЛВП та ЛПВП при побудові імовірнісних моделей, що носять багато-резонансний коливальний характер, дозволяє проводити повний імовірнісний аналіз запропонованої моделі, яка описує роботу вузла, що діагностується. Це дозволяє обґрунтовано вибрати діагностичні ознаки та програмно-технічне забезпечення для СТД та підвищує вірогідність проведеного діагностування, що збільшує надійність ЕМ, які експлуатуються.

Згідно з [6], у лінійному наближенні механічну коливальну систему можна представити однією або сукупністю лінійних ланок першого і другого порядку, тобто сукупністю коливальних і апериодичних ланок. Виходячи з цього, для аналізу механічної коливальної системи маємо можливість використовувати добре розроблений апарат теорії лінійних систем.

У цьому випадку вібрації, які реєструються в точці розміщення акселерометра на вузлі ЕМ, що діагностується, представляють собою її відгук на вплив векторного породжуючого процесу.

Процес  $\eta(\tau)$ , ймовірнісні характеристики якого в значній мірі обумовлені технічним станом вузла, що досліджується, може бути заданий за допомогою характеристичної функції (ХФ). При цьому відомі з [6] співвідношення дозволяють отримати вираз для  $n$ -вимірної ХФ значень процесу  $\xi(t)$ , а також його моментів  $\mu^n$ . Таким чином, можна отримати аналітичні вирази для всіх ймовірнісних характеристик вібраційного процесу, що дозволяє створювати ефективні методи вібродіагностування досліджуваної ЕМ.

Як приклад розглянемо задачу визначення основних статистичних характеристик вібраційних діагностичних сигналів рухомих вузлів ЕМ.

Динаміка обертової складової рухомого вузла ЕМ, для опису якої використовуємо модель ЛПВП, може бути представлена рівнянням [7]

$$\varphi_t = \varphi_0 + \omega_0 t + \varphi_\sigma(t), \quad (4)$$

де  $\varphi_0$  – початкова фаза, яка фіксується спеціальним датчиком (наприклад, для вітроагрегатів – нульової відмітки (НВ), а для дизель-генераторів – мітки верхньої мертвої точки (ВМТ)), і тому в подальшому може бути прийнята рівною нулю,  $\omega_0$  – середня кутова швидкість, яка визначається співвідношенням  $\omega_0 = \pi n/30$ ,  $n$  – кількість обертів валу на хвилину.

Функція  $\varphi_\sigma(t)$  представляє собою флуктуацію кута повороту вала відносно його кута повороту, що рівномірно змінюється. Отже, саме ця величина  $\varphi_\sigma(t)$  несе в собі інформацію про нерівномірність обертання вала ЕМ при кожному обороті. Останнє може бути пов'язано з появою дефектів у різних вузлах досліджуваної ЕМ. Відразу відзначимо, що  $\varphi_\sigma(t)$  носить випадковий характер і для її вивчення необхідно застосовувати математичний апарат теорії ЛПВП, а використовуючи (4), до складу якого входить  $\omega_0$ , можна визначити період  $T > 0$  досліджуваного процесу. Так, з виразу (4) видно, що для процесу нерівномірності обертання вала властива стохастична періодичність, тобто, коли деякі імовірнісні характеристики сигналів поводяться періодично, хоча самі їхні реалізації не обов'язково є періодичними. Використання класу ЛПВП при описі таких процесів надає можливість отримати їхні повні імовірнісні характеристики у термінах функцій розподілу (наприклад, (2)) або характеристичних функцій.

Як відомо [5, 6], логарифм одномірної характеристичної функції вібраційного процесу (1) може бути представлений наступним чином:

$$\ln f_\xi(u) = ium \sum_{j=1}^n a_{jn} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp \left( iux \sum_{j=1}^n a_{jn} \varphi_j(\tau) \right) - 1 - iux \sum_{j=1}^n a_{jn} \varphi_j(\tau) \right] \frac{dK(x)}{x^2} d\tau, \quad (5)$$

де  $m$  і  $K(x)$  – параметри безмежно подільної характеристичної функції приростів процесу  $\eta(t)$  у формі Колмогорова за припущення, що  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\tau < \infty$ . Породжуючий процес  $\eta'(\tau)$ , характер якого в значній мірі обумовлений технічним станом вузла, що досліджується, може бути заданий за допомогою характеристичних функцій виду (5). По складових, що входять у характеристичні функції (5), ми маємо можливість досліджувати породжуючий процес  $\eta'(\tau)$ .

За результатами можна перейти до обґрунтування можливих діагностичних ознак, що характеризують технічний стан досліджуваних вузлів ЕМ.

**Теоретичне обґрунтування діагностичних ознак.** Для вирішення задачі обґрунтування діагностичних ознак необхідно задати вид ядра  $\varphi_j(t)$ , яке входить до складу (1), (3) та (5). Згідно з [6], рухомий вузол ЕМ може розглядатися як багатовходова коливальна система другого порядку, яку можна охарактеризувати деяким вектором імпульсних перехідних функцій з компонентами

$$\varphi_j(t) = \frac{\omega_j^2}{\psi_j} e^{-\beta_j t} \sin(\psi_j t) U(t), \quad (6)$$

де  $\psi_j = \sqrt{\omega_j^2 - \beta_j^2}$ ;  $\omega_j$  – власні частоти,  $\beta_j > 0$  – коефіцієнти згасання;  $\omega_j > \beta_j$ .

З урахуванням (6) функція спектральної щільності потужності матиме вигляд

$$S(\omega) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{A_{jn} \beta_j (\omega_j^2 + \omega^2) + B_{jn} \psi_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2 \psi_j^2} \quad (7)$$

де  $A_{jn} = \kappa_2 \frac{a_j \omega_j^2}{2\psi_j} \sum_{k=1}^n \frac{a_k \omega_k^2}{\psi_k} a_{kj}$ ;  $B_{jn} = \kappa_2 \frac{a_j \omega_j^2}{2\psi_j} \sum_{k=1}^n \frac{a_k \omega_k^2}{\psi_k} b_{kj}$ ;

$$a_{kj} = \frac{\beta_k + \beta_j}{(\beta_k + \beta_j)^2 + (\psi_k - \psi_j)^2} - \frac{\beta_k + \beta_j}{(\beta_k + \beta_j)^2 + (\psi_k + \psi_j)^2};$$

$$b_{kj} = \frac{\psi_k - \psi_j}{(\beta_k + \beta_j)^2 + (\psi_k - \psi_j)^2} - \frac{\psi_k + \psi_j}{(\beta_k + \beta_j)^2 + (\psi_k + \psi_j)^2}; \quad \kappa_2 - \text{другий семіінваріант, який характеризує по-}$$

роджуючі процеси  $\eta_i(\tau)$  у співвідношеннях (1), (3) та (5);  $\beta_k, \beta_j, j, k = \overline{1, n}$  – коефіцієнти, що характеризують згасання вібрацій у певних досліджуваних вузлах ЕМ;  $\psi_j, j = \overline{1, n}$  – частотні параметри, що характеризують досліджуваний вузол ЕМ.

Як показали результати імітаційного моделювання вібраційних діагностичних сигналів та чисельні експерименти, поява певних дефектів у вузлах ВЕУ, що діагностуються, призводить до зміни параметрів  $m, K(x)$  та  $\beta_j, \psi_j, j = \overline{1, n}$ , які входять у співвідношення (5) та (7). Крім того, поява таких дефектів призводить до зміни кривої функції розподілу ймовірностей досліджуваних вібрацій, яка визначається шляхом застосування перетворення Фур'є-Стільтьєса до виразу (5). З появою певних дефектів відповідні зміни відбуваються і у вигляді спектральної щільності потужності розподілу досліджуваних вібрацій, яка обчислюється за допомогою співвідношення (7).

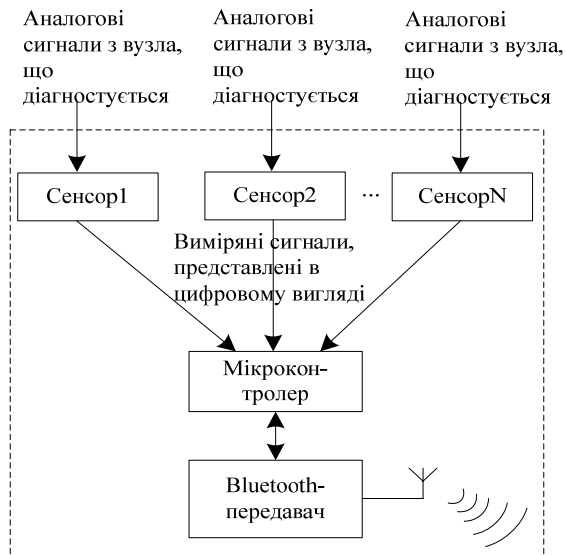
На основі результатів дослідження запропонованої моделі вібрацій вузлів ЕМ для діагностування рухомих вузлів можна використовувати як діагностичні ознаки наступні параметри вібраційних сигналів: коефіцієнти згасання  $\beta_j, j = \overline{1, n}$ ; параметри  $\psi_j, j = \overline{1, n}$ ; характер кривої функції розподілу ймовірностей; величини початкових і центральних моментів.

**Структура лабораторного зразка СТД рухомих частин ЕМ.** Апаратурна частина розробленої СТД складається з двох основних блоків (рис. 2): блока сенсорів, що розташовується безпосередньо на об'єкті діагностування; блока приймання та обробки інформації (БПОІ), в якості чого використано ПЕОМ, до якої за допомогою шини USB підключений Bluetooth приймач-передавач.

Блок сенсорів виконує функцію вимірювання, обробки та передачі діагностичних даних рухомих вузлів ЕМ. При розробці лабораторного зразка СТД було використано два типи акселерометрів виробництва компанії Analog Devices: ADXL202 та ADXL001.

Крім вказаних акселерометрів у блок сенсорів входять: мікроконтролер PIC16LF873-041 Microchip Technology; модуль Bluetooth EYMF2CMM-XX Taiyo Yuden; супутні елементи, що забезпечують функціонування блока сенсорів.

Частота вимірюваного акселерометром ADXL202 сигнала знаходиться у смузі 0,01 Гц–6 КГц, що достатньо для діагностування технічного стану лобових частин обмоток ротора, можливого теплового небалансу, а також підшипників кочення низькооберткових (до 1000 об/хв) ЕМ середньої потужності. При використанні у блоці сенсорів акселерометра ADXL001 смуга частот вимірюваного діагностичного сигналу розширюється до значень 0,01 Гц–22 КГц. Отриманий сигнал передається з блока сенсорів за допомогою радіоканала до БПОІ (рис. 2).



Основною частиною створеної СТД є програмне забезпечення, завдяки якому здійснюється її функціонування. За допомогою пакета управляючих програм (ПУП) здійснюється управління мікроконтролером PIC16LF873-041; ввід-вивід вимірної інформації та керуючих команд; реалізація модуля інтерфейсу для роботи СТД у середовищі LabView.

ПУП забезпечує функціонування СТД у двох режимах: навчання (блок НС) та діагностування.

Застосування пакета обробляючих програм (ПОП) дозволяє виконувати статистичну обробку вібраційних сигналів, а саме: спектрально-кореляційну обробку (блок ПСКА), гістограмну обробку сигналів (блок ПГА).

За допомогою блока оцінки діагностичних ознак (ОДО) отримується чисельна оцінка вибраних діагностичних ознак.

Для спектрально-кореляційної обробки діагностичних сигналів було використано удосконалену програму, в якій застосовано певний тип спектрального згладжуючого вікна [14]. За результатами попереднього дослідження декількох типів вікон (прямокутне, Бартлетта, Тьюки, Парзена) для подальшого практичного використання вибрано вікно Бартлетта.

Програма гістограмного аналізу (ПГА), окрім побудови гістограм досліджуваних сигналів, забезпечує згладжування побудованих гістограм за системою кривих Пірсона [6]. Це забезпечує додаткову інформацію при побудові розв'язуючих правил з діагностування і класифікації дефектів, що здійснюється за допомогою блоків побудови розв'язуючих правил (ПРП) та прийняття діагностичних рішень (ДРП). В основу блока ПРП покладено алгоритм перевірки статистичних гіпотез за критерієм Неймана-Пірсона.

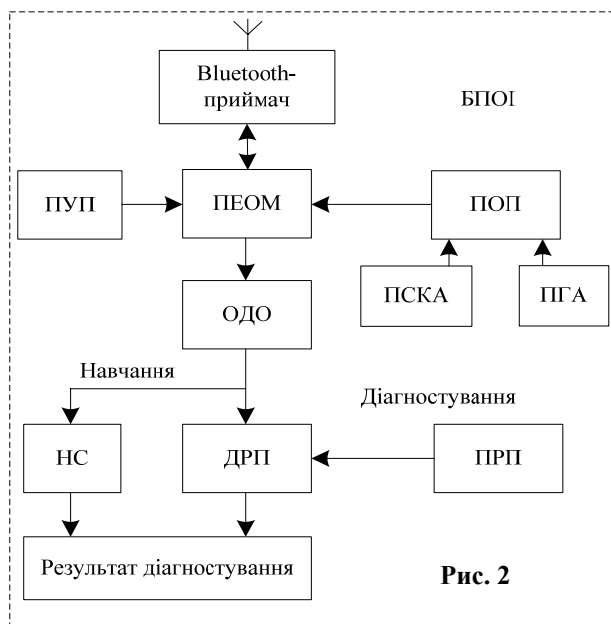


Рис. 2

Для перевірки відповідності розробленого лабораторного зразка СТД діючому в Україні ГОСТ 25275-82 «Система стандартів по вібрації. Прибори для измерения вибрации вращающихся машин. Общие технические требования» проведено серію експериментів по вимірюванню сигналу віброприскорення на електродинамічному вібростолі Robotron 11 032, який генерує гармонійний вібраційний сигнал з частотою 79,6 Гц.

За результатами вимірювання частоти основної гармоніки для кожного експерименту визначено її середнє значення  $f_{осн} = 78,28$  Гц, що надає можливість визначити відносну похибку вимірювання еталонної частоти, згенерованої вібростолом, яка складає

$$\delta = \frac{|79,6 - 78,28|}{78,28} \cdot 100\% = 1,68\%.$$

Дане значення знаходиться в межах, допустимих ГОСТ 25275-82.

Виконані дослідження довели можливість використання розробленого зразка СТД з точки зору її повної відповідності діючим стандартам України, а розроблене програмне забезпечення надає можливість в автоматичному режимі проводити систематичне калібрування блока сенсорів.

**Опис експериментів з отримання даних.** Експериментальні дослідження з вимірювання вібраційного сигналу здійснювалися на декількох рухомих вузлах електроенергетичних об'єктів, а саме: на експериментальному стенді вібродіагностування підшипників кочення в ІЕД НАН України; на лопаті вітроенергетичної установки (ВЕУ-20) виробництва ТОВ «Карбон».

За допомогою створеної СТД було проведено низку експериментів з вібродіагностування підшипників кочення на експериментальному стенді в ІЕД НАН України [6]. Експерименти здійснювалися при обертанні вала ЕМ П-51, що входить до складу стенда, зі швидкостями 300 об/хв та 500 об/хв. За допомогою створеного зразка СТД досліджувалися підшипники типу 309, умовно справні та в які штучно вносився перекіс. Після проведення експериментів з вимірювання вібраційних сигналів на рухомих вузлах ЕМ виконана перевірка діагностичних ознак. Було зроблено висновок [13], що при проведенні спектрального аналізу вібраційних процесів як діагностичні ознаки можуть бути використані амплітуди та частоти основних максимумів спектрограм, число основних максимумів у фіксованій полосі частот. У результаті обробки виміряних сигналів СТД за програмою гістограмного аналізу отримані оцінки початкових і центральних моментів та реалізовано побудову гістограм та їхнє згладжування за допомогою кривих Пірсона.

Експериментальні дослідження показали, що найбільш інформативними діагностичними ознаками є коефіцієнти асиметрії  $k$  та ексцесу  $\gamma$  досліджуваних вібраційних сигналів.

За результатами проведених експериментів сформовано навчальні сукупності [4]. Формування цих сукупностей здійснювалося при використанні як діагностичних ознак кількості максимумів спектрограми вібраційного сигналу, що перевищує умовно вибраний рівень у спектрограмі.

На основі досліджень спектрограм було задано рівень, вище якого обчислюється кількість максимумів,  $A = 0,00025$  у.о.

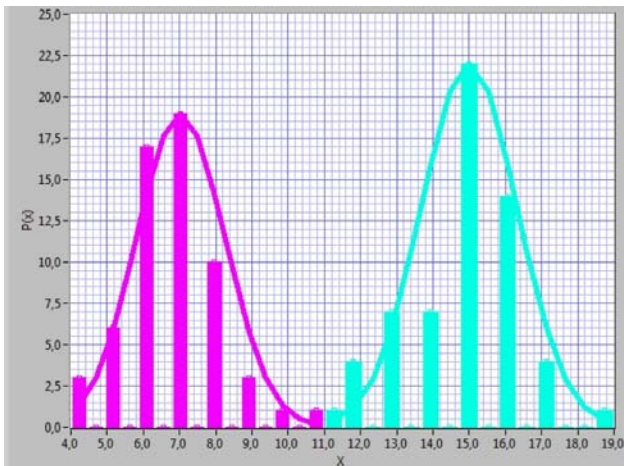


Рис. 3

За допомогою БПОІ побудовано гістограми та згладжуючі їх криві Пірсона [3], що відображають кількість максимумів спектрограми вище рівня  $A$  для всіх проведених 60 експериментів при роботі ЕМ з різною частотою. На рис. 3 показано гістограми та згладжуючі криві числа максимумів спектрограм при частоті обертання вала стенда 300 об/хв, а також при роботі умовно справного (ліворуч) підшипника та підшипника, що працює з перекосом (праворуч).

Сформовано навчальні сукупності [4], що базуються на третьому та четвертому моментах виміряного вібраційного сигналу, тобто на коефіцієнтах асиметрії  $k$  та ексцесу  $\gamma$ , які характеризують розподіл цих сигналів. Ці коефіцієнти, а також параметри  $\beta_1, \beta_2$ , що зв'язані з ними співвідношеннями

$\beta_1 = k^2$  та  $\beta_2 = \gamma + 3$ , які є координатами  $(\beta_1, \beta_2)$  діаграми Пірсона, було використано для формування навчальних сукупностей у діагностичному просторі  $(\beta_1, \beta_2)$ . На рис. 4 ці сукупності представлені у вигляді еліпсів розсіювання.

Для побудови розв'язуючих правил з діагностування конкретних дефектів у підшипнику застосовується розроблений програмний модуль (ДРП), що входить до БПОІ.

Для діагностування технічного стану підшипника і класифікації дефекту за описаними вище спектральними характеристиками можуть бути побудовані двоальтернативні розв'язуючі правила, що зводяться до перевірки наступних гіпотез при частоті роботи 300 об/хв по кількості максимумів спектрограми  $(X)$ , отриманих на рис. 4:



$H_0 : X1=7,03$  (підшипник справний),  $H_1 : X2=15$  (підшипник з перекосом).

Побудова розв'язуючого правила для діагностування наявності перекосу в підшипнику полягає у виборі величини порога  $C$ , який у досліджуваному випадку дорівнює

$$C = \frac{(X2 - X1)(u_\alpha - u_\beta)}{2(u_\alpha + u_\beta)} + (X2 + X1)/2 = \frac{5,425}{-7,94} + 11,016 = 10,33,$$

де  $u_\alpha, u_\beta$  – табличні значення квантилей нормального розподілу при заданих похибках першого та другого роду  $\alpha = 0,05$  та  $\beta = 0,01$ ;  $u_\alpha = -1,645$  та  $u_\beta = -2,326$ .

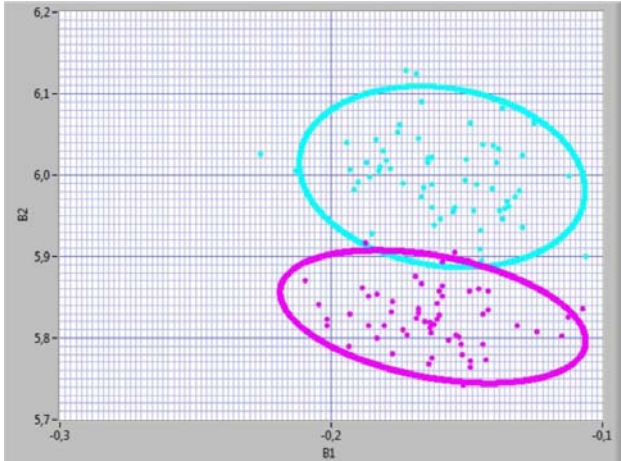


Рис. 4

Проведено один експеримент на стенді вібродіагностування підшипників кочення з вимірювання вібрацій підшипника з перекосом. Після цього системний інтерфейс БПОІ переводиться в режим діагностування і робиться висновок за результатом вимірювання.

Визначена в результаті експерименту з діагностування кількість максимумів спектрограми – 12;  $12 > C = 10,33$ , тобто робиться висновок про те, що підшипник працює з перекосом.

Сформуємо навчальні сукупності в системі  $(\rho, \varphi)$  та побудуємо розв'язуючі правила для режиму роботи підшипника 300 об/хв.

Для спрощення процедури побудови розв'язуючих правил за відомими співвідношеннями здійснюємо перехід від двовимірного простору  $(\beta_1, \beta_2)$

(рис. 5) до одновимірного простору  $\varphi$  за допомогою співвідношень  $\rho = \sqrt{\beta_1^2 + (\beta_2 - 1)^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\beta_2 + 3}{\beta_1 + 4}$ .

Діагностування перекосу у досліджуваному підшипнику зводиться до перевірки наступних гіпотез, сформуованих згідно з рис. 5, в автоматичному режимі:

$H_0 : \Theta_1 = 1,142$  (підшипник справний),  $H_1 : \Theta_2 = 1,153$  (підшипник з перекосом).

У цьому випадку величина порогу  $C$  дорівнює

$$C = \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(u_\alpha - u_\beta)}{2(u_\alpha + u_\beta)} + (\Theta_2 + \Theta_1)/2 = \frac{0,0076}{-7,94} + 1,148 = 1,147.$$

За результатами вимірювання вібрацій на підшипнику, що працює з перекосом, засобами БПОІ було отримано значення параметру  $\varphi = 1,154$ .

Таким чином, перевірка сформульованих вище гіпотез, а саме  $1,154 > C = 1,147$ , показала, що підшипник працює з перекосом.

На базі навчаючих сукупностей були побудовані розв'язуючі правила, які за допомогою процедури Неймана-Пірсона дозволяють класифікувати перекіс у підшипнику з наперед заданими точністю і достовірністю, що визначаються похибками першого і другого роду  $\alpha$  та  $\beta$ .

Крім описаних вище досліджень, експерименти проводилися на установці, що знаходиться в м. Вишневому Київської обл. на території заводу «Авангард». Основні технічні характеристики ВБУ-20: номі-

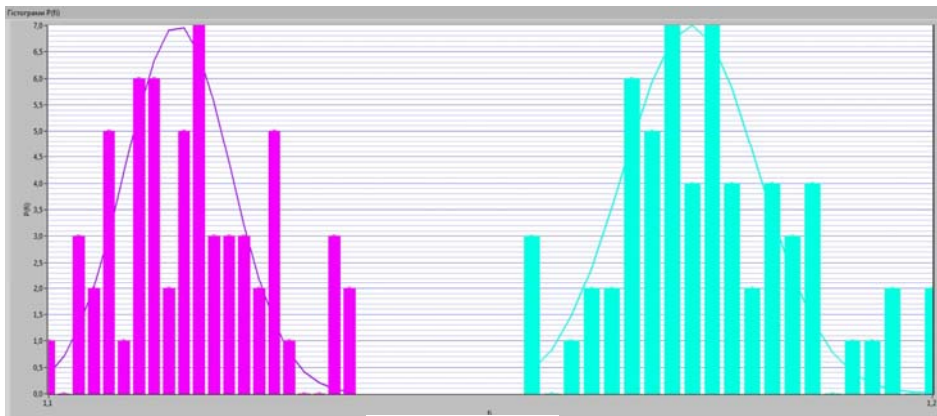


Рис. 5

нальна потужність 20 кВт; номінальна швидкість вітру 9 м/с; номінальна напруга 380/220 В; частота вихідної напруги 30 Гц; частота обертання генератора 100 об/хв; максимальна робоча швидкість вітру 25 м/с; гранично допустима швидкість вітру 50 м/с; швидкість рушення 3 м/с; маса вітрогенератора  $\leq 800$  кг.

Блок сенсорів розташовувався на лопаті ВЕУ в максимально наближеному до ротора місці. Вимірювання проводилися після встановлення усталеного режиму обертання ротора вітроагрегата. БПОІ [3] знаходився на рівні землі на відстані 40 м від початкового положення блока сенсорів. За допомогою програмного модуля БПОІ виконувалося наступне: керування блоком сенсорів; статистична обробка виміряних сигналів; навчання системи для визначення певного типу дефекту; побудова розв'язуючих правил та прийняття рішення з визначення технічного стану вузла, що діагностується.

Крім того, модуль БПОІ надає можливість проводити візуалізацію кожного етапу обробки сигналу за командою оператора.

Зважаючи на те, що експериментальні дослідження проводилися на працюючій ВЕУ, прийнято рішення про недоцільність проведення на даному етапі експериментів з навчання системи та подальшого діагностування. Були проведені експерименти з визначення частоти обертання лопаті ВЕУ. Коротко зупинимось на описі експериментів на цьому об'єкті.

Було проведено 100 експериментів з вимірювання віброприскорення у визначеному місці.

За допомогою програмних засобів БПОІ [3] проаналізовано спектрограми виміряних сигналів для кожного з експериментів [13] та в автоматичному режимі визначено середнє значення частоти максимального за амплітудою значення. Отримане значення становить 1,65 Гц, що відповідає паспортним даним ВЕУ.

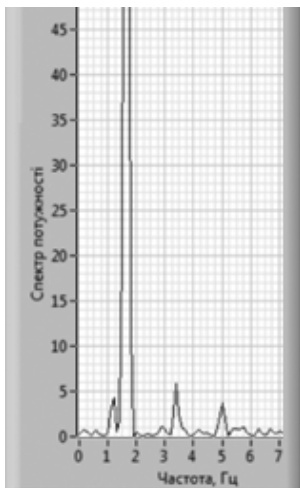


Рис. 6

Враховуючи результати імітаційного моделювання з визначення оптимального типу спектрального згладжуючого вікна [14], було використано обробку вібраційного сигналу за допомогою вікна Бартлетта. На рис. 6 показано графік спектра потужності виміряного сигналу, отриманий за допомогою БПОІ, який ілюструє основну частоту роботи ВЕУ-20.

#### Висновки.

1. Вперше на основі лінійних випадкових і лінійних періодичних випадкових процесів створено математичну модель рухомих вузлів роторних ЕМ, яка враховує періодичність вібраційного процесу і вплив на нього окремих джерел вібрації, що мають різну фізичну природу і просторову локалізацію.

2. Для створеної моделі обґрунтовано використання коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, кількості максимумів спектрограми вібраційного процесу як діагностичних ознак для визначення технічного стану вузла, що діагностується.

3. Побудовано та експериментально випробувано лабораторний зразок СТД для проведення діагностування рухомих вузлів ЕМ із заданими точністю і достовірністю на основі результатів дослідження розробленої

математичної моделі.

4. Система показала свою технічну функціональність при вирішенні класу задач з отримання та дослідження діагностичних сигналів, виміряних на рухомих вузлах. Виконані вимірювання та аналіз підтверджують можливість використання розробленого зразка системи діагностування для проведення діагностування рухомих вузлів вітроенергетичних установок з віддаленим розташуванням блока сенсорів.

1. Барков А.В., Баркова Н.А., Азовцев А.Ю. Мониторинг и диагностика роторных машин по вибрациям. – С.-Петербург, 2000. – 159 с.

2. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия. – М.: Советская Энциклопедия. 1984. – 1216 с.

3. Гижко Ю.І., Мислович М.В. Особливості побудови інформаційно-вимірювальних систем діагностики рухомих частин електротехнічного обладнання // Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України. – 2007. – №2(17). – С. 107–115.

4. Гижко Ю.І., Мыслович М.В. Особенности формирования навчающих совокупностей при проведении вибродиагностики узлов рухомих частин энергетичних машин // Вісник НУ «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2009. – № 654. – С. 35–40.
5. Марченко Б.Г., Щербак Л.Н. Линейные случайные процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1975. – 143 с.
6. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. – К.: Наук. думка, 1992. – 195 с.
7. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Теория диагностики энергоагрегатов по девиации вращающихся узлов и её практическое применение для дизель-электрических генераторов. Часть 1. Модели динамики цилиндрических мощностей на валу дизель-электрического генератора // Технічна електродинаміка. – 1998. – № 5. – С. 36–40.
8. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси // Електроенергетика. – 1999. – Вип. 3. – С. 111–119.
9. Марченко Н.Б., Марченко Б.Г. Теорема Якобі та її застосування в спектральному та кореляційному аналізі // Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2000». – 2000. – Т.1. – С. 11.5–11.7.
10. Слуцкий Е.Е. Избранные труды. – М.: Наука, 1960. – 292 с.
11. Шубов И.Г. Шум и вибрация электрических машин. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
12. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: ФМІ НАН України, 2013. – 804 с.
13. Gyzhko Yu. Usage of vibrations for diagnostics of moving parts of electrical machines // Acta Technica. – 2010. – №4(55). – Pp. 419–430.
14. Gyzhko Yu., Myslovych M., Sysak R. The Use of Spectral Windows in Analysis of Vibration Signals // Przegląd elektrotechniczny (Electrical Review). – 2013. – Vol. 2013. – № 2a. – Pp. 294–296.
15. Zvaritch V., Myslovich M., Marchenko B. The Models of Random Periodic Information Signals on the White Noise Bases // Applied Mathematics Letters, Pergamon Press Ltd. – 1995. – Vol. 8. – № 3. – Pp. 87–89.

УДК 621.314: 621.391

#### ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ И ВОПРОСЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМ ВИБРОДИАГНОСТИКИ ПОДВИЖНЫХ УЗЛОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН.

**Ю.И. Гижко**, канд.техн.наук, **М.В. Мыслович**, докт.техн.наук  
**Институт электродинамики НАН Украины,**  
**пр. Победы, 56, Киев–57, 03680, Украина.**  
**e-mail: [yuriy.gyzhko@gmail.com](mailto:yuriy.gyzhko@gmail.com)**

*Исследованы особенности физических процессов, которые происходят во время работы электрических машин переменного тока, а также электрических машин, содержащих подвижные узлы. Разработана математическая модель подвижных узлов роторных электрических машин с использованием линейных случайных и линейных периодических случайных процессов, которая учитывает периодичность вибрационного процесса и влияние на него отдельных источников вибрации, имеющих различную физическую природу и пространственную локализацию. Для созданной модели обоснованы диагностические признаки, использование которых позволяет определить техническое состояние диагностируемого узла. Разработан и экспериментально испытан лабораторный образец системы технического диагностирования, проверено его соответствие действующим стандартам Украины. Проведено экспериментальное исследование по измерению и анализу вибрационных сигналов, полученных на лопасти работающей ветроэнергетической установки. Проведены эксперименты на стенде Института электродинамики НАН Украины, с использованием предложенных моделей и методов диагностирования проведено обучение системы и проверена ее функциональность при определении технического состояния узлов, которые диагностировались. Библ. 15, рис. 6.*

**Ключевые слова:** вибрационная диагностика, статистические методы, электрические машины, системы диагностирования.

## ELEMENTS OF THE THEORY AND PRACTICAL APPLICATION OF SYSTEMS FOR VIBRODIAGNOSTICS OF ELECTRICAL MACHINES MOVING PARTS

Gyzhko Yu., Myslovych M.

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,

pr. Peremohy, 56, Kyiv–57, 03680, Ukraine.

e-mail: yuriy.gyzhko@gmail.com

*Investigated peculiarities of the physical processes that occur during the operation of electrical AC machines and electrical machines containing moving parts. Developed mathematical model of rotary electric machines moving parts with using random linear and random linear periodic processes that takes into account the periodicity of vibration process and influence on it of individual sources of vibration having different physical nature and spatial localization. For the created model, diagnostic parameters were substantiated, the use of which allows determining of the technical conditions of diagnosed part. Developed and experimentally tested a sample of the system for technical diagnostics, checked its compliance with current standards of Ukraine. Carried out experimental study to measuring and analysis of vibration signals obtained on rotor blade of the working wind power unit. Experiments were carried out at the stand of the Institute of electrodynamics National Academy of Science of Ukraine. Using the proposed models and methods of diagnosing, system have been trained and its functionality have been verified in the determining of the technical condition of parts that were diagnosed. References 15, figures 6.*

**Keywords:** vibration diagnostics, statistical methods, electrical machinery, system of diagnostics.

1. Barkov A.V., Barkova N.A., Azovtsev A.Yu. Monitoring and diagnosis of rotating machines by vibrations // Sankt-Petersburg, 2000. – 159 p. (Rus)
2. Vinogradov I.M. Mathematical encyclopedia. – Moskva: Sovetskaia Entsiklopediia, 1984. – 1216 p. (Rus)
3. Gyzhko Yu., Myslovych M. Peculiarities of creation of information–measuring systems for diagnostic of electrical equipment moving parts // Pratsi Instytutu Elektrodynamiky Natsionalnoi Akademii Nauk Ukrainy. – 2007. – №2(17). – Pp. 107–115. (Ukr)
4. Gyzhko Yu.I., Myslovych M.V. Peculiarities of formation of teaching sets during the vibrodiagnostics of moving parts of electric power machines // Visnyk Natsionalnoho Universytetu «Lvivska politekhnika». Elektroenerhetychni ta elektromekhanichni systemy. – 2009. – № 654. – Pp. 35–40. (Ukr)
5. Marchenko B.G., Shcherbak L.N. Linear random processes and their applications. – Kyiv: Naukova dumka, 1975. – 143 p. (Rus)
6. Marchenko B.G., Myslovich M.V. Vibrodiagnostics of bearing units of electrical machines. – Kyiv: Naukova dumka, 1992. – 195 p. (Rus)
7. Marchenko B.G., Myslovich M.V. Theory of diagnostics of power units on rotating parts deviation and its practical application to diesel – electric generators. Part 1. Models of dynamics cylinder power on shaft of diesel–electric generator // Tekhnichna Elektrodynamika. – 1998. – № 5. – Pp. 36–40. (Rus)
8. Marchenko B.G. Linear periodic processes // Elektroenerhetyka. – 1999. – Vyp. 3. – Pp. 111–119. (Ukr)
9. Marchenko N.B., Marchenko B.G. Jacobi theorem and its use in spectral and correlation analysis // Tezy dopovidei II Mizhnarodnoi naukovo–tekhnichnoi konferentsii “AVIA–2000”. – 2000. – Vol. 1. – Pp. 11.5–11.7. (Ukr)
10. Slutsky E.E. Selected papers. – Moskva: Nauka, 1960. – 292 p. (Rus)
11. Shubov I.G. Noise and vibration of electrical machines. – Leningrad: Energoatomizdat, 1986 – 208 p. (Rus)
12. Yavorskyi I.M. Mathematical models and analysis of stochastic fluctuations. – Lviv: Fizyko–matematychnyi Instytut Natsionalnoi Akademii Nauk Ukrainy, 2013. – 804 p. (Ukr)
13. Gyzhko Yu. Usage of vibrations for diagnostics of moving parts of electrical machines // Acta Technica. – 2010. – №4(55). – Pp. 419–430.
14. Gyzhko Yuri, Myslovych Mykhailo, Sysak Roman. The Use of Spectral Windows in Analysis of Vibration Signals // Przegląd elektrotechniczny (Electrical Review). – 2013. – Vol. 2013. – № 2a. – Pp. 294–296.
15. Zvaritch V., Myslovich M., Marchenko B. The Models of Random Periodic Information Signals on the White Noise Bases // Applied Mathematics Letters, Pergamon Press Ltd. – 1995. – Vol. 8. – №. 3. – Pp.87–89.

Надійшла 24.06.2014  
Остаточний варіант 16.09.2014