



ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ • ВІДДІЛЕННЯ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ПРОБЛЕМ ЕНЕРГЕТИКИ

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА
ТА ЕЛЕКТРОФІЗИКА

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПАРАМЕТРІВ
ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНЕ
ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ

ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНІ СИСТЕМИ
ТА УСТАНОВКИ

ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ СИСТЕМИ
В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

№2

2010

Національна академія наук України
Відділення фізико-технічних проблем енергетики
Інститут електродинаміки
Науково-прикладний журнал
ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

ГОЛОВНИЙ РЕДАКТОР

Шидловський А.К. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

ЗАСТУПНИКИ ГОЛОВНОГО РЕДАКТОРА

Кириленко О.В. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Липківський К.О. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ

Антонов О.Є. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Буткевич О.Ф. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Волков І.В. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Гриневич Ф.Б. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Денисов О.І. Державний технологічний університет, Чернігів

Жаркін А.Ф. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Жуйков В.Я. Національний технічний університет України "КПІ", Київ

Загірняк М.В. Державний університет ім.М.Остроградського, Кременчук

Кулик М.М. Інститут загальної енергетики, Національна академія наук, України, Київ

Кузнецов В.Г. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Мазуренко Л.І. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Монастирський З.Я. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Мислович М.В. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Павлік М. Технічний університет, Лодзь, Польща

Півняк Г.Г. Національний гірничий університет, Дніпропетровськ

Постолатий В.М. Інститут енергетики, Академія наук Республіки Молдова, Кишинів

Резцов В.Ф. Інститут відновлюваної енергетики, Національна академія наук України, Київ

Розов В.Ю. Науково-технічний центр магнетизму технічних об'єктів,
Національна академія наук України, Харків

Сокол Є.І. Національний технічний університет "ХПІ", Харків

Стахів П.Г. Національний університет "Львівська політехніка", Львів

Стогній Б.С. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Счастливий Г.Г. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Таранов С.Г. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Тітко О.І. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Харитонов С.О. Державний технічний університет, Новосибірськ, Росія

Шидловська Н.А. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Щерба А.А. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Юрченко О.М. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ СЕКРЕТАР

Городжа Л.В. Інститут електродинаміки, Національна академія наук України, Київ

Адреса редакції:

03680, м. Київ-57, проспект Перемоги, 56, Інститут електродинаміки НАН України

Телефон (044) 456 88 69, 454 26 57,

takied@meta.ua

ЗМІСТ

Теоретична електротехніка та електрофізика

ЗОЛОТАРЕВ В.М., ЩЕРБА А.А., ПОДОЛЬЦЕВ А.Д., КУЧЕРЯВАЯ И.Н.

Анализ высокочастотных процессов в кабеле на напряжение 330 кВ с сегментированной жилой при возникновении частичных разрядов в его изоляции3

ЗИРКА С.Е., МОРОЗ Ю.И., ТАРЧУТКИН А.Л. Моделирование переходных процессов в трансформаторе с учетом гистерезисных свойств магнитопровода11

KACZOREK T. Some recent developments in theory of fractional positive and cone linear systems20

Перетворення параметрів електричної енергії

ПЕРЕСАДА С.М., КОВБАСА С.Н., БОВКУНОВИЧ В.С. Сравнительное

экспериментальное тестирование алгоритмов косвенного векторного управления моментом асинхронного двигателя33

МИХАЛЬСЬКИЙ В.М., СОБОЛСВ В.М., ЧОПИК В.В., ШАПОВАЛ І.А. Визначення гармонічного складу та показників якості вихідної напруги АПН при застосуванні для ШІМ перервних модуляційних функцій41

ПРИЙМАК Б.І., ТОКАРЧУК В.В. Визначення умов монотонного характеру перехідної функції системи з модифікованим регулятором положення52

Електромеханічне перетворення енергії

ВАСЬКОВСКИЙ Ю.В., ГЕРАСКИН А.А. Математическое моделирование электромагнитных полей в короткозамкнутом асинхронном двигателе с поврежденной обмоткой ротора56

ОРЛОВСКИЙ И.А. Математические модели дизеля и синхронного генератора тягового электропривода дизель-поезда на нейронной сети62

Електроенергетичні системи та устаткування

ЖУРАХІВСЬКИЙ А.В., КЕНС Ю.А., ЯЦЕЙКО А.Я., МАСЛЯК Р.Я. Ферорезонансні процеси в електромережах 10 кВ з різнотипними трансформаторами напруги73

Інформаційно-вимірвальні системи в електроенергетиці

САВОЛЮК А.М. Особенности разработки алгоритмов графического интерфейса для универсального модуля нижнего уровня многопараметровых измерительных систем78

К 60-летию доктора технических наук, профессора ХАРИТОНОВА С.А.81

ВИМОГИ до оформлення статей у журналі "Технічна електродинаміка"82

Abstracts84

CONTENTS

Theoretical electrical engineering and electrophysics

- ZOLOTARIOV V.M., SHCHERBA A.A., PODOLTSEV A.D., KUCHERIAVAJA I.N. Analysis of high-frequency processes in the cable on the voltage of 330 kV with segmented cable conductor by partial discharges inception in its insulation.....3
- ZYRKA S.E., MOROZ Y.I., MOROZ E.Y., TARCHUTKIN A.L. Modelling of transient processes in the transformer with consideration of the magnetic core hysteresis properties 11
- KACZOREK T. Recent developments in the theory of fractional positive and cone linear systems20

Conversion of electric energy parameters

- PERESADA S.M., KOVBASA S.N., BOVKUNOVYCH V.S. Comparative indirect torque-flux vector control algorithms testings of asynchronous generator33
- MIKHALSKY V.M., SOBOLEV V.M., CHOPYK V.V., SHAPOVAL I.A. Definition of harmonic content and quality factors of voltage-source inverter output voltage with application of discontinuous modulation functions for the PWM41
- PRYIMAK B.I., TOKARCHUK V.V. Determination of conditions of transient function steady character of the system with modified position regulator52

Electromechanical energy conversion

- VASKOVSKY Y.N., HERASKIN A.A. Mathematical modelling of electromagnetic fields in short-circuit asynchronous generators with defected rotor winding.....56
- ORLOVSKY I.A. Mathematical models of diesel and synchronous generator of diesel train traction electric drive on neural net62

Electric power systems and installations

- ZHURAKHIVSKY A.V., KENS Y.A., YATSEIKOA.Y., MASLIAK R.Y. Ferroresonant processes in 10 kV electrical networks with different-type voltage transformers 73

Information-measuring systems in power engineering

- SAVOLIUK A.M. Design peculiarities of graphic interface algorithms for low-level universal element of multiparameter measuring systems78

To the 60th anniversary of doctor of science KHARITONOV S.A.....81

RULES of presentation of the papers.....82

Abstracts84

Науковий редактор К.О.ЛИПКІВСЬКИЙ

Редактор Т.І.МАЙБОРОДА

Художній редактор П.В.БЕККЕР

Друкується згідно з рекомендацією Вченої ради Інституту електродинаміки НАН України, протокол № 2 від 28.01.2010р. Підписано до друку 16.02.2010. Формат 60x84/8. Пап. друк. офс. Офсет. Ум.-друк. арк. 10,0. Тираж 300 прим. Зам. 32. Зареєстровано 20.01.94. Свідоцтво: серія КВ, № 388. Ціна договірна.

Поліграфічна дільниця Інституту електродинаміки НАН України 03680, м.Київ-57, пр.Перемоги, 56.

УДК 621.315.2.027.8

В.М.Золотарев, канд.техн.наук (ЗАО "Завод "Южкабель", Харьков), **А.А.Щерба**, член-корр. НАН України, **А.Д.Подольцев**, докт.техн.наук, **И.Н.Кучерявая**, канд.техн.наук (Институт электродинамики НАН України, Киев)

АНАЛИЗ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПРОЦЕССОВ В КАБЕЛЕ НА НАПРЯЖЕНИЕ 330 кВ С СЕГМЕНТИРОВАННОЙ ЖИЛОЙ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ЧАСТИЧНЫХ РАЗРЯДОВ В ЕГО ИЗОЛЯЦИИ

Исследованы высокочастотные процессы в силовом кабеле с полиэтиленовой изоляцией на напряжение 330 кВ с сегментированной токопроводящей жилой при его испытании в резонансной установке измерения уровня частичных разрядов. Разработана математическая модель и методика численного расчета электромагнитного поля и на его основе эквивалентных параметров кабеля в диапазоне частот $50 \div 10^6$ Гц, а также электротехническая модель системы "испытательная установка – силовой кабель – эталонная емкость". Изучены резонансные свойства кабеля и характер распространения высокочастотного сигнала от зоны частичного разряда вдоль кабеля.

Досліджено високочастотні процеси у силовому кабелі із поліетиленовою ізоляцією на напругу 330 кВ з сегментованою струмопровідною жилою. Розроблено математичну модель та методику чисельного розрахунку електромагнітного поля та еквівалентних параметрів кабеля в діапазоні частот $50 \div 10^6$ Гц, а також электротехнічну модель системи "випробувальна установка – силовий кабель – еталонна ємність". Вивчено резонансні властивості та характер розповсюдження високочастотного сигналу від зони часткового розряду вздовж кабеля.

Введение. Силовые кабели являются важной составной частью передающих и распределительных электрических сетей, поскольку они позволяют доставлять энергию в те районы, которые недоступны для воздушных линий электропередачи. Наиболее привлекательной и ценной особенностью подземных кабельных линий электропередачи является присущая им высокая надежность эксплуатации из-за отсутствия внешних атмосферных воздействий (ветер, гололед, грозовые перенапряжения), отсутствие опор и хорошая электромагнитная совместимость с окружающей средой по сравнению с воздушными линиями.

С начала 90-х гг. в электрических сетях Украины кабели с пластмассовой изоляцией активно замещают кабели с бумажной пропитанной и маслонаполненной изоляцией в классах среднего и высокого напряжения. Среди пластмассовых изолирующих материалов в силовых кабелях наиболее предпочтительным является сшитый полиэтилен (СПЭ) ввиду его хороших диэлектрических свойств – низкой величиной диэлектрической проницаемости и фактора потерь, а также большого запаса термической стойкости. В настоящее время энергосистемы Украины ориентированы на применение в распределительных сетях именно таких кабелей с СПЭ на напряжение до 330 кВ. Предпосылками для этого являются, наряду с их высокими эксплуатационными показателями, наличие отечественного производства, в частности, на ЗАО "Завод "Южкабель" (г. Харьков), где освоен выпуск таких кабелей на напряжение до 330 кВ с большим поперечным сечением жилы – 1000–3000 мм². Для уменьшения электрических потерь в жилах такого сечения выполняется их сегментирование согласно патенту Milliken [5]. Такие жилы типа "Milliken" состоят из нескольких (обычно 3–5) многопроволочных сегментов, изолированных друг от друга и скрученных в процессе изготовления с целью транспозиции протекающих в них токов.

Для испытания полимерной изоляции силового кабеля сверхвысокого напряжения (в данной работе рассматривается кабель на напряжение 330 кВ) разрабатываются специальные испытательные установки, как правило, резонансного типа, позволяющие получать в кабеле напряжение 500 кВ и обеспечивающие измерение уровня возникающих при этом частичных разрядов в изоляции кабеля. В ходе проведения испытаний в системе «испытательная установка – силовой кабель – эталонная ем-

кость» возникают сложные высокочастотные и волновые процессы на частотах около 1 МГц. Для правильной интерпретации полученных результатов измерений высокочастотного сигнала, а также для изучения влияния на этот сигнал характеристик кабеля, например, его длины, необходимо предварительно выполнить анализ высокочастотных процессов в кабеле каждого из выпускаемых типов-размеров. Для этого должна быть разработана общая методика расчета эквивалентных электрических параметров кабеля на высокой частоте с учетом сегментированной структуры его жилы и методика анализа высокочастотных процессов в кабеле. Учитывая уникальность выпускаемого на ЗАО "Южкabelь" силового кабеля на 330 кВ с полиэтиленовой изоляцией, а также отсутствие в литературе описания аналогичных методик, работа направлена на решение вышеуказанной проблемы.

Целью работы является, во-первых, разработка математической модели и методики численного расчета электромагнитного поля и на его основе эквивалентных параметров силового кабеля с сегментированной токопроводящей жилой большого сечения (1000–3000 мм²) в зависимости от частоты, изменяющейся в широких пределах (50÷10⁶ Гц). Во-вторых, разработка электротехнической модели системы «испытательная установка – силовой кабель – эталонная емкость» с использованием значения найденных параметров и анализ высокочастотных процессов в кабеле при возникновении частичных разрядов в его основной изоляции.

Далее описаны постановка и решение соответствующих задач.

Математическое описание электромагнитных процессов в кабеле с сегментированной жилой и расчет его эквивалентных параметров. Учет влияния скин-эффекта в сегментированной жиле одного кабеля в упрощенной постановке с помощью приближенных аналитических выражений выполнен в работах [2, 7]. В работах [3, 4] для анализа электромагнитных процессов в жиле одного кабеля рассмотрен цепной подход, суть которого состоит в замене жилы совокупностью длинных проводников, характеризующихся собственной и взаимной индуктивностями. Анализ электромагнитных процессов в кабеле с сегментированной жилой, а также кабельной линии, состоящей из трех таких кабелей, на основе теории электромагнитного поля в литературе не рассматривался.

Применительно к задаче для испытательной установки рассматривается одиночный силовой кабель на напряжение 330 кВ, расположенный в воздухе. Изоляция кабеля выполнена из сшитого полиэтилена, а токопроводящая алюминиевая жила имеет площадь сечения 1600 мм² и выполнена из пяти сегментов. Поперечное сечение такого кабеля показано на рис. 1 и имеет следующие размеры: наружный диаметр жилы – 52 мм, толщина полиэтиленовой изоляции – 25 мм, диаметр по изоляции – 106 мм, наружный диаметр кабеля – 122 мм. На рис. 1 показана также конечно-элементная сетка.

Рассматривается случай, когда каждый сегмент выполнен из большого числа алюминиевых проводников, не изолированных друг от друга, так что он может рассматриваться как массивный проводник. В тоже время все пять сегментов жилы изолированы друг от друга с помощью диэлектрического картона. Предполагается, что в жиле кабеля (суммарный ток в пяти сегментах) протекает заданный переменный ток $I_{жс}e^{j\omega}$, а в экране – равный по величине и обратный по направлению ток –

$-I_{жс}e^{j\omega}$. Задача состоит в том, чтобы найти распределение плотности тока по сечению каждого сегмента и в экране в широком диапазоне изменения угловой частоты тока $\omega = 2\pi f$ и определить на основании этого распределения значений удельного эквивалентного активного и индуктивного сопротивлений кабеля в функции от частоты.

При анализе электромагнитного поля в кабеле принимаются следующие упрощающие допущения.

1. Выбранный отрезок кабеля предполагается достаточно протяженным, так что концевыми эффектами на его входе и выходе можно пренебречь. С учетом этого электромагнитная задача может рассматриваться в двумерной

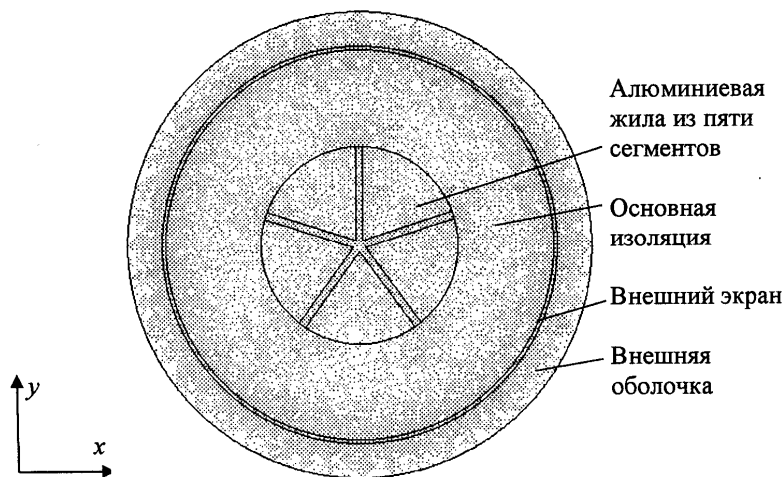


Рис. 1

постановке, в декартовой системе координат в плоскости xOy относительно неизвестной величины $\dot{\mathbf{A}} = (0, 0, \dot{A}_z)$ – векторного магнитного потенциала, имеющего единственную z -составляющую.

2. Рассматривается случай, когда каждый из пяти сегментов жилы выполнен из изолированных алюминиевых проводников и имеет внешнюю изоляцию, изолирующую сегменты друг от друга. Сегменты жилы перевиты по длине кабеля, формируя таким образом транспозицию. Это позволяет предположить, что во всех сегментах кабеля протекают одинаковые электрические токи, равные $0,2I_{жс}e^{j\omega}$ (при условии, что площади поперечных сечений всех сегментов равны). Отметим, что анализ процессов в высокочастотном кабеле, когда каждый из сегментов выполнен из изолированных проводников, может быть проведен на основе подхода, развитого в работе [6].

3. В работе не учитывается влияние земли на электромагнитные процессы в кабеле. Поэтому ток в экране равен с обратным знаком току в жиле кабеля, который, в свою очередь, равен суммарному току в пяти сегментах жилы.

Распределение векторного магнитного потенциала в сечении кабеля с сегментированной жилой удовлетворяет следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\text{– в изоляции:} \quad \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = 0, \quad (1)$$

– в проводящих средах – в сегментах жилы

$$j\omega\sigma \dot{\mathbf{A}} + \nabla \times ((\mu_0\mu_r)^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \sigma \Delta \dot{U}_k / L_l, \quad k = 1, \dots, 5; \quad (2)$$

а также интегральным выражениям для токов в каждом сегменте жилы

$$\int_{S_k} (-j\omega\sigma \dot{A}_z + \sigma \Delta \dot{U}_k / L_l) dS = 0, 2I_{жс}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (3)$$

– в проводящем внешнем экране кабеля

$$j\omega\sigma \dot{\mathbf{A}} + \nabla \times ((\mu_0\mu_r)^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \sigma \Delta \dot{U}_э / L_l, \quad (4)$$

а также интегральному выражению для тока во внешнем экране кабеля

$$\int_{S_э} (-j\omega\sigma \dot{A}_z + \sigma \Delta \dot{U}_э / L_l) dS = -I_{жс}. \quad (5)$$

В системе уравнений (1–5) обозначено: σ , μ_r – электропроводность и относительная магнитная проницаемость среды, соответственно; $\Delta \dot{U}_k$ – падение напряжения вдоль оси z для k -го сегмента на участке протяженностью L_l ; S_k – площадь поперечного сечения k -го сегмента; $S_э$ – сечение внешнего экрана кабеля; $\Delta \dot{U}_э$ – падение напряжения вдоль оси z на экране кабеля.

Величины падений напряжения на сегментах $\Delta \dot{U}_k$, $k = 1, \dots, 5$, а также на экране $\Delta \dot{U}_э$ являются неизвестными и определяются с помощью выражений (3), (5). В качестве граничного условия на внешней границе расчетной области задавалось условие магнитной изоляции $\dot{A}_z = 0$.

После нахождения распределения магнитного потенциала $\dot{A}_z(x, y)$ и значений падений напряжений на каждом сегменте кабеля и экране определялись эквивалентные параметры кабеля на единицу его длины, являющиеся функциями частоты, на основании следующего равенства $\Delta \dot{U}_1 - \Delta \dot{U}_э = L_l (R'_{AC}(\omega) + j\omega L'(\omega)) I_{жс}$, из которого получаем

$$R'(\omega) = \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta \dot{U}_1 - \Delta \dot{U}_э}{I_{жс} L_l}\right), \quad L'(\omega) = \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta \dot{U}_1 - \Delta \dot{U}_э}{\omega I_{жс} L_l}\right). \quad (6)$$

Решение системы (1–5) относительно неизвестных \dot{A}_z , $\Delta \dot{U}_k$, $k = 1, \dots, 5$ и $\Delta \dot{U}_э$ выполнялось методом конечных элементов с помощью пакета COMSOL [8].

Результаты расчета поля и параметров кабеля. Результаты расчета плотности тока J_z / J_{dc} (где J_{dc} – плотность постоянного тока) в сегментах жилы силового кабеля для двух значений частоты показаны на рис. 2. Здесь видно, что при рабочей частоте кабеля 50 Гц из-за большого сечения алюминиевой жилы уже проявляется поверхностный эффект – плотность тока на поверхности жилы составляет 1,47 от значения плотности постоянного тока. При частоте 1 кГц проявление скин-эффекта усиливается – плотность тока на поверхности в 6,9 раза превышает плотность на постоянном

токе. Хотя в случае одного кабеля эффект близости не проявляется при распределении плотности тока, однако данная методика является общей и может использоваться для анализа электромагнитных процессов в кабельной линии, состоящей, как правило, из трех однофазных кабелей.

Зависимости от частоты эквивалентных параметров кабеля – активного сопротивления и индуктивности единицы его длины, рассчитанные согласно (6) и (7), показаны на рис. 3. Значения этих параметров при частоте 1 МГц будут использоваться далее в высокочастотной модели кабеля, позволяющей исследовать высокочастотные процессы в системе «испытательная установка – силовой кабель – эталонная емкость».

Таким образом, на основе разработанной математической модели анализа электромагнитного поля и ее численной реализации методом конечных элементов была создана методика расчета активного сопротивления и индуктивности силового кабеля с сегментированными жилами большого поперечного сечения, позволяющая рассчитывать значения параметров кабеля при различном количестве сегментов. Методика может быть обобщена на случай расчета параметров кабельной линии. При этом она позволяет учитывать способ прокладки линии, а также наличие поблизости металлических предметов или другой кабельной линии, влияющих, в силу наличия индуктивной связи, на эквивалентные параметры исследуемой кабельной линии. Учет вышеуказанных факторов позволяет выполнять на практике оптимизационные расчеты.

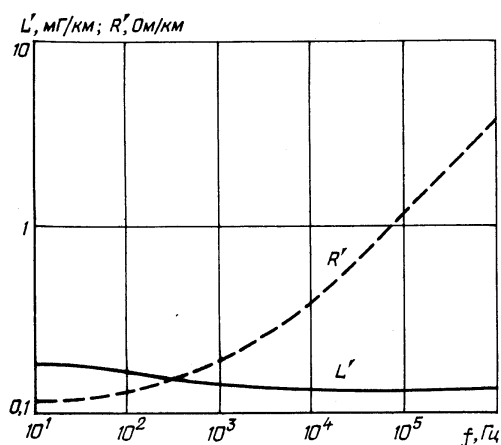


Рис. 3

Анализ высокочастотных процессов в кабеле при его испытании на уровень частичных разрядов. Эквивалентная электрическая схема высоковольтной резонансной испытательной установки с силовым кабелем и эталонной емкостью на его выходном конце показана на рис. 4. Схема составлена средствами пакета MatlabSimulink/SimPowerSystems [9], позволяющего моделировать и исследовать высокочастотные процессы в сложных электротехнических устройствах, и содержит однофазный источник питания 3300 В, 50 Гц, подключенный к первичной обмотке однофазного возбуждающего трансформатора. Во вторичной цепи трансформатора включен реактор, фильтр низких частот и силовой кабель с параллельно подключенной на выходе эталонной емкостью. Также в схеме имеются средства для измерения напряжений, токов и величины импеданса цепи.

В разработанной модели использовался исследуемый силовой кабель общей протяженностью 100 м, представленный в виде пяти отрезков по 20 м, каждый из которых моделировался длинной линией с распределенными параметрами. Введение пяти отрезков кабеля позволяет моделиро-

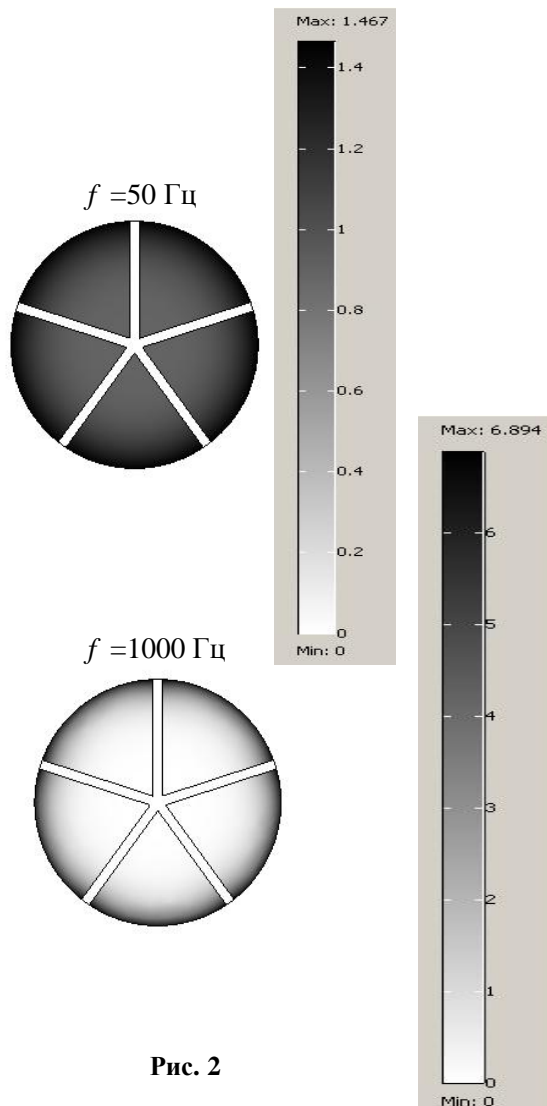


Рис. 2

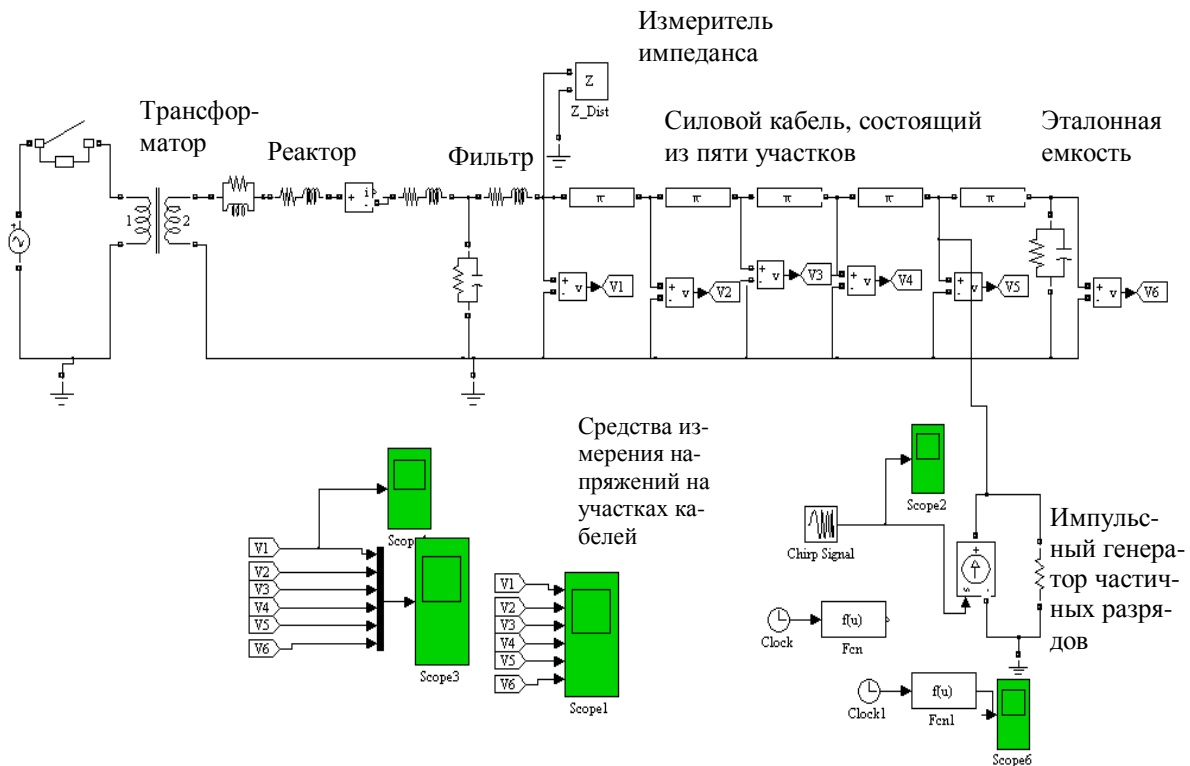


Рис. 4

вать высокочастотные процессы (до 10 МГц) и расположение предполагаемого источника частичных разрядов в различных точках кабеля, отстоящих на разном расстоянии от его входа. Для моделирования импульсного процесса возникновения частичного разряда в схеме рис. 5 использовался импульсный управляемый источник тока, показанный на схеме внизу справа. Источник генерировал двупольный импульс, задаваемый выражением

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max} \sin(2\pi f_{\text{имп}} t), & 0 < t < f_{\text{имп}}^{-1} \\ 0, & t \geq f_{\text{имп}}^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

Здесь I_{\max} – амплитудное значение импульса тока (далее полагается $I_{\max}=1$ А), $f_{\text{имп}}$ – частота импульсного тока, моделирующего частичный разряд (далее изменяется в пределах $10^5 \div 10^7$ Гц).

Были выбраны следующие значения параметров основных элементов на схеме рис. 5.

– Источник питания: 3300 В, 50 Гц, однофазный.

– Трансформатор: первичные параметры $U_1=3135$ В, $I_1=160$ А, вторичные параметры $U_2=25$ кВ, $I_2=20$ А.

– Реактор: напряжение 500 кВ, реактивная мощность 20000 кВА, ток 40 А, максимальное значение индуктивности 40 Гн.

– Фильтр: $L_f=0,1$ Гн; $R_f=0,1$ Ом; $C_f=0,1$ мкФ; $\text{tg } \delta_f=0,1$ %.

– Силовой кабель с эталонной емкостью: напряжение 500 кВ, емкость $C=0,25$ мкФ, добротность цепи $Q=40$.

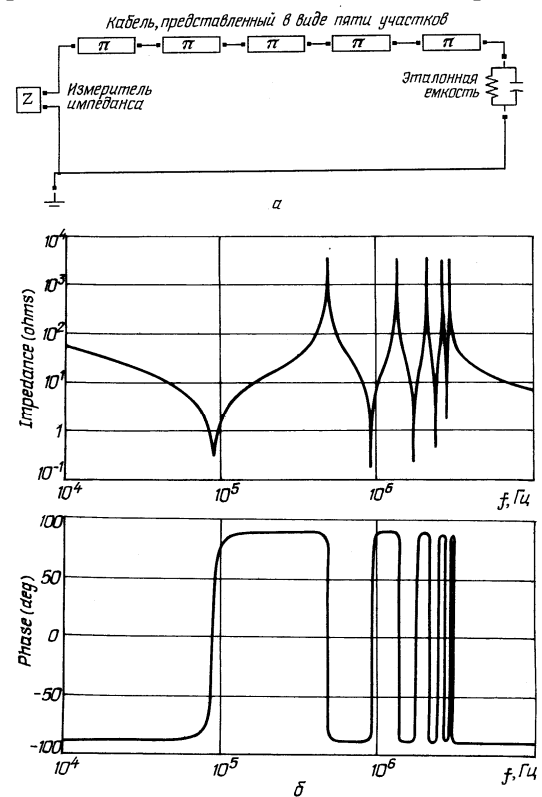


Рис. 5

В работе рассматривались два варианта: длина исследуемого кабеля равна 100 м или 10 м. Далее описаны результаты моделирования этих вариантов.

Длина кабеля равна 100 м. Для исследования резонансных свойств силового кабеля + эталонная емкость выполнялось вычисление импеданса эквивалентной электрической цепи, показанной на рис. 5,а, при различных значениях частоты. На рис. 5,б показана полученная частотная зависимость этого импеданса. Видно, что в системе существует пять резонансов тока (соответствуют случаю, когда модуль импеданса цепи достигает максимальных значений) и пять резонансов напряжения (когда модуль импеданса цепи достигает минимальных значений).

Для исследования характера распространения сигнала от зоны возникновения частичного разряда на вход кабеля, где осуществляется его измерение, выполнялся вычислительный эксперимент по схеме, показанной на рис. 6, вставка сверху. Здесь на выбранном участке возникновения

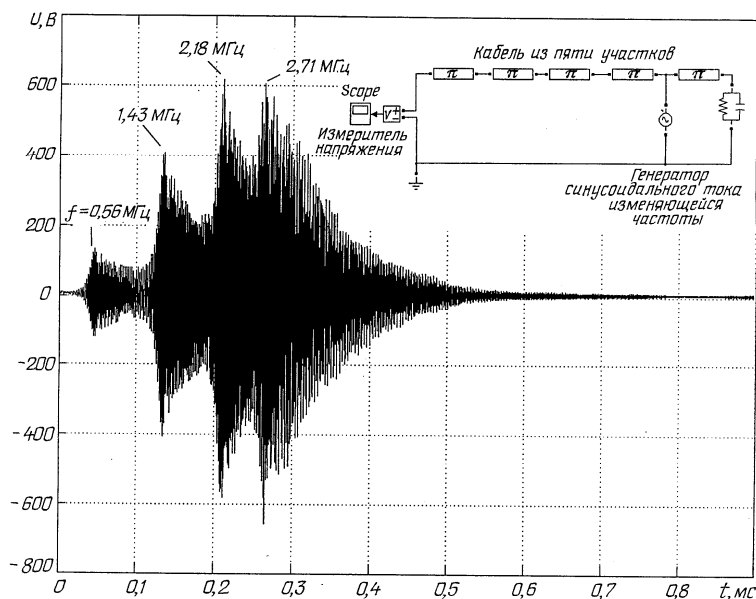


Рис. 6

частичного разряда подключался генератор синусоидального тока медленно изменяющейся частоты от 10^5 Гц до 10^7 Гц за время 1 мс. При этом измерялось напряжение на входе кабеля. Изменение этого напряжения от времени (а отсюда и от частоты) показано на рис. 6, откуда видно, что из-за проявления резонансных свойств кабеля амплитудное значение напряжения имеет точки экстремума, возникающие при совпадении частоты внешнего генератора с одной из резонансных частот кабеля, соответствующих резонансам тока. Видно также, что их значения совпадают со значениями резонансных частот на рис. 5,б для случаев резонанса тока (пятая резонансная частота, равная 3 МГц, на рис. 6 выражена не явно). Таким образом, можно заключить, что исследуемый силовой кабель длиной 100 м характеризуется резонансными частотами, лежащими в области 1 МГц.

Далее рассмотрим реакцию кабеля на импульсный сигнал в форме (8), моделирующий процесс возникновения частичного разряда. Схема для исследования высокочастотных процессов в кабеле в этом случае та же, что на рис. 4, в которой импульсный сигнал подавался между 4-м и 5-м участками кабеля, т.е. предполагалось, что частичный разряд в изоляции возникает в месте, отстоящем на 20 м от его конца. Измерение напряжения как реакции кабеля на это воздействие выполнялось на входе кабеля. Форма импульса тока задавалась согласно (6), а частота $f_{имп}$ изменялась в широких пределах.

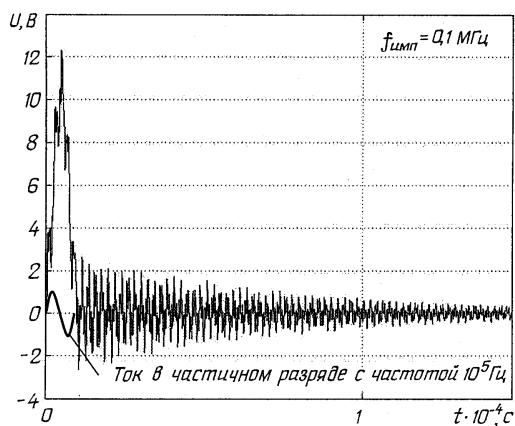


Рис. 7

На рис. 7 показан случай, когда частота импульса тока выбиралась из условия меньше первой резонансной частоты кабеля $f_1 = 0,56$ МГц и принималась равной $f_{имп} = 0,1$ МГц. Видно, что кривая напряжения содержит низкочастотный сигнал (вынужденная составляющая, частота которой соответствует $f_{имп}$) и малые по амплитуде высокочастотные переходные составляющие, частоты которых определяются резонансными свойствами кабеля. Затухание этих составляющих происходит за время около 0,1 мс, что значительно меньше периода основного тока в кабеле, соответствующего 50 Гц. В случае, когда частота импульсного тока совпадает с частотой первого резонанса кабеля (рис. 8), вынужденная составляющая практически не видна на фоне значительных по амплитуде высокочастотных колебаний, обусловленных наличием собственных резонансов в кабеле.

Амплитуда колебаний измеряемого напряжения при этом значительно возрастает (28 В на рис. 8 по сравнению с 12 В на рис. 7 для случая низкой частоты импульса). На вставке рис. 8 показано в увеличенном масштабе изменяющееся по времени напряжение на входе в кабель. Из анализа этой кривой следует, что она образована из комбинации гармонических сигналов, состоящих из собственных колебаний в кабеле на резонансных частотах.

На рис. 9 показана реакция кабеля на воздействие импульса тока частичного разряда, характеризующегося более высокими значениями частоты $f_{имп}$, откуда видно, что именно при частоте импульса тока, совпадающей с частотой третьего резонанса $f_{имп} = f_3 = 2,18$ МГц (рис. 6), амплитуда напряжения достигает максимального значения, равного 45 В. Затухание переходного процесса так же, как и при низких частотах, происходит за время около 0,1 мс.

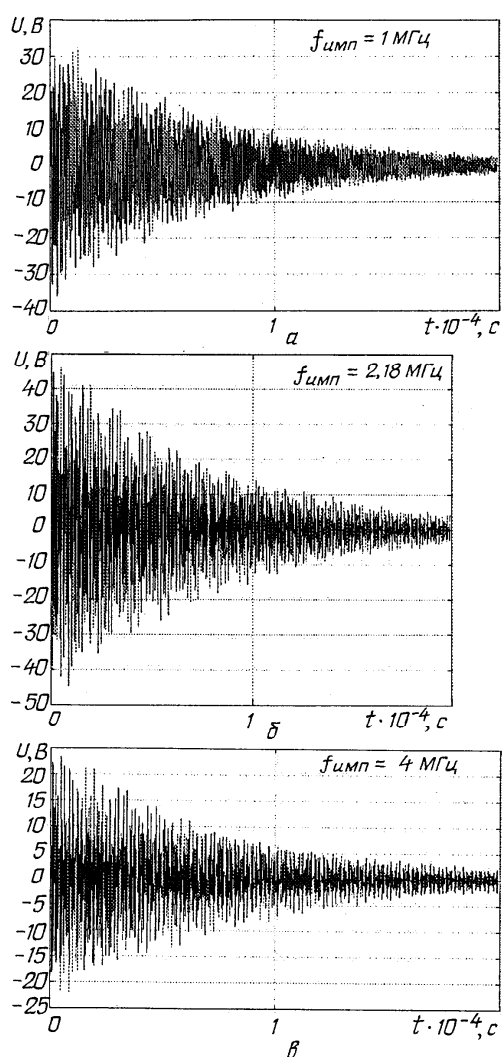


Рис. 9

результаты расчетных исследований для случая короткого кабеля показаны на рис. 10 для двух значений частоты импульсного тока. Известно, что значения резонансных частот короткого кабеля будут приблизительно в 10 раз выше соответствующих значений частот длинного кабеля, равного 100 м. Поэтому собственные колебания короткого кабеля будут возбуждаться на более высоких частотах. Это видно на обоих графиках рис. 10, а также видна вынужденная составляющая в кривой напряже-

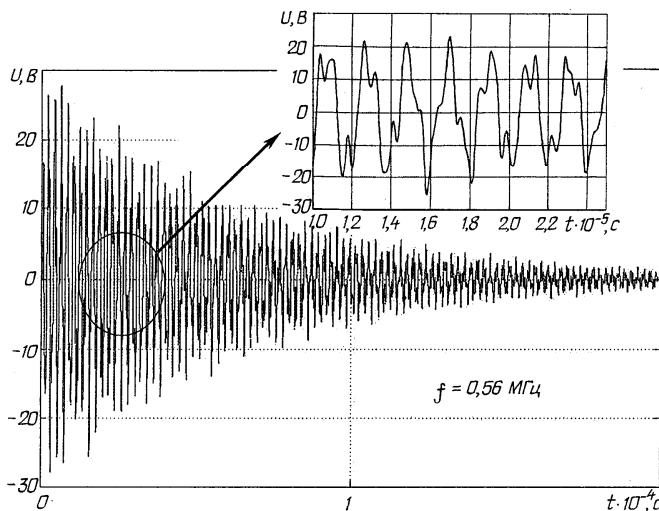


Рис. 8

Из приведенных результатов расчета высокочастотных процессов в кабеле длиной 100 м, возникающих как реакция на частичный разряд в изоляции этого кабеля, можно заключить следующее.

1. При протекании импульса тока, вызванного возникновением частичного разряда в изоляции кабеля, в системе как реакция на это внешнее воздействие возникают высокочастотные колебания на частотах, совпадающих с частотами собственных резонансов кабеля. Если частота тока меньше первой резонансной частоты кабеля, то напряжение на входе определяется интегралом от тока импульса и имеет, наряду со значительной вынужденной составляющей, малые по амплитуде высокочастотные переходные составляющие.

2. В случае, если временные характеристики импульса тока в изоляции кабеля совпадают с одной из резонансных частот системы (или близки по значению), величина сигнала на входе кабеля будет значительно больше, чем при низкой частоте.

3. Существуют такие параметры токового импульса, в частности, значение $f_{имп}$, при которых реакция кабеля на это внешнее воздействие будет максимальной. Для отрезка кабеля длиной 100 м это соответствует случаю $f_{имп} = f_3 = 2,18$ МГц, т.е. частоты тока совпадают с частотой третьего резонанса кабеля.

Длина исследуемого кабеля равна 10 м. Резу-

ния и высокочастотные переходные составляющие, соответствующие резонансным свойствам кабеля. В силу более высоких значений резонансных частот измеренное напряжение высокочастотных колебаний имеет меньшее амплитудное значение, чем для случая длинного кабеля, что видно из сравнения данных рис. 10 и 8.

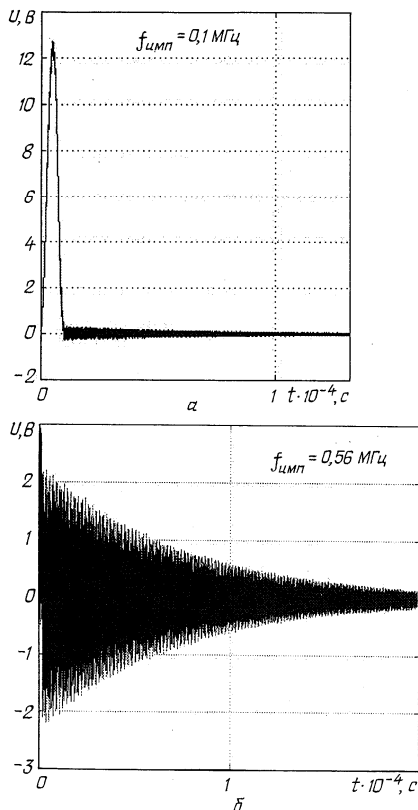


Рис. 10

выполнен расчет методом конечных элементов высокочастотного электромагнитного поля и эквивалентных параметров такого кабеля в широком диапазоне изменения частоты – $50 \div 10^6$ Гц.

Изучены резонансные свойства силового кабеля и показано, что при совпадении частоты импульсного тока частичного разряда с одной из резонансных частот кабеля величина измеряемого сигнала на входе кабеля достигает наибольшего значения. Также в работе показано, что информация о токе частичного разряда может быть выделена на фоне возникающих высокочастотных собственных колебаний, если частота этого тока меньше частоты первого резонанса кабеля. Полученные результаты исследований могут быть использованы при выборе оптимальной длины исследуемого кабеля.

Таким образом, располагая данными о временных характеристиках частичных разрядов, возникающих в изоляции силового кабеля, можно рекомендовать выбор такой длины исследуемого кабеля, при которой одна из резонансных частот (первого, второго или третьего резонансов) совпадала бы с частотой тока частичного разряда. При этом измеряемый сигнал на входе кабеля будет иметь наибольшую амплитуду, а значит при заданной чувствительности средств измерения будут измерены более малые токи частичных разрядов.

Временные характеристики тока частичного разряда могут быть достоверно измерены в случае, если частота этого тока ниже первой частоты собственного резонанса кабеля. В этом случае полезный сигнал, содержащий информацию о токе частичного разряда, явно выделяется на фоне возникающих высокочастотных колебаний, вызванных наличием собственных резонансов в системе.

Заключение. В работе применительно к задаче исследования высокочастотных процессов в силовом кабеле при его испытании на уровень частичных разрядов разработана высокочастотная электротехническая модель испытательной установки, включающая кабель, рассматриваемый в виде электрической цепи с распределенными параметрами. Для количественного анализа электромагнитных процессов в такой установке в работе использовался пакет программ Matlab/Simulink/SimPowerSystems.

Для определения высокочастотных значений эквивалентных параметров силового кабеля с сегментированной жилой типа "Милликен" была разработана математическая модель и

1. Каден Г. Электромагнитные экраны. – М., Л.: Энергоиздат, 1957. – 327 с.
2. Уиду Б. Кабельные линии высокого напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 232 с.
3. Argaut P., Daurelle J.Y. Calculation method of power cable AC resistance with individually insulated strands. //Proc. of CABLE 1999. – Vol. 2. – Pp. 582–591.
4. Fromm U. Optimized conductors for XLPE cables with a large cross-section. //European Trans. on Electrical Power. – 2005. – No. 15. – Pp. 109–121.
5. Milliken H. Electrical Cable. Patent Publication 1933, US #475094.
6. Podoltsev A. D., Kucheryavaya I.N., Lebedev B.B. Analysis of effective resistance and eddy-current losses in multiturn winding of high-frequency magnetic components. //IEEE Trans. on Magn. Vol. 39. – No 1. – 2003. – Pp. 539–548.
7. Suzuki H., Kanaoka M. Theoretical investigation on skin effect factor of conductor in power cables. //IEEE Trans. PE. – Vol. 126. – 2006. – Pp. 807–820.
8. www.comsol.com
9. www.mathworks.com

Надійшла 17.11.2009

С.Е.Зирка, докт.техн.наук, **Ю.И.Мороз**, канд.техн.наук, **Е.Ю.Мороз** (Днепропетровский нац. ун-т), **А.Л.Тарчуткин** (ОАО «ВИТ», Запорожье)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСФОРМАТОРЕ С УЧЕТОМ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ СВОЙСТВ МАГНИТОПРОВОДА

Предложен способ учета гистерезиса и динамических свойств холоднокатаной электротехнической стали при произвольном законе изменения индукции в участках магнитной системы трансформатора. Описана модель однофазного трансформатора, позволяющая проанализировать его работу в сложных переходных режимах и допускающая объединение с моделью внешней электрической цепи.

Запропоновано спосіб урахування гістерезису та динамічних властивостей холоднокатаної електротехнічної сталі при довільному законі змінювання індукції в ділянках магнітної системи трансформатора. Описано модель однофазного трансформатора, що дозволяє проаналізувати його роботу в складних перехідних режимах і допускає поєднання з моделлю зовнішнього електричного кола.

Введение. Совершенствование модели трансформатора требует адекватного описания процессов в его магнитной системе (МС). Для этого должны быть воспроизведены гистерезисные свойства магнитного материала МС и его поведение при произвольном законе изменения индукции. Учет гистерезиса позволяет, в частности, уточнить гармонический состав токов холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ), исследовать сложные режимы включения и отключения трансформатора, его работу на выпрямитель, усовершенствовать анализ феррорезонансных явлений и явлений, обусловленных геомагнитным полем.

Известным способом учета гистерезиса и динамических процессов в магнитопроводе является введение в расчетную модель трансформатора фиктивных короткозамкнутых обмоток, активными сопротивлениями которых воспроизводятся потери энергии в отдельных участках МС (стержнях или ярмах). Хотя такой прием позволяет имитировать потери в участках с известной синусоидальной индукцией, отсутствие у резисторов гистерезисных свойств не обеспечивает достаточной точности при моделировании переходных режимов и решении задач со свободным распределением магнитных потоков (примером является 5-стержневой трансформатор, где форма и амплитуда индукции в отдельных участках МС заранее не известны).

Несмотря на обширную литературу, посвященную моделированию трансформаторов (соответствующие обзоры могут быть найдены в [13,15]), только в сравнительно немногих публикациях описаны модели, учитывающие гистерезис [7]. Это обусловлено сложностью моделирования Гистерезиса как явления, а также трудностями [14], возникающими при включении модели гистерезиса в широко используемый программный комплекс ЕМТР (Electromagnetic transient program) [11]. Следует заметить, что применение ЕМТР предполагает использование схем замещения трансформатора. Эти схемы, как известно, предназначены для изучения процессов во внешней по отношению к трансформатору электрической цепи, однако не отражают внутренние процессы в трансформаторе [5]. Во всяком случае, переход от модели трансформатора к его схемам замещения чреват ошибками, вызывавшими многочисленные дискуссии [4]. Примером является некорректное разделение индуктивности рассеяния пары обмоток между ними [15] и даже использование такой схемы замещения для расчета бросков тока включения.

В соответствии с [5] рассматриваемая ниже модель не является схемой замещения трансформатора. При ее использовании не требуется приводить параметры трансформатора к числу витков одной из обмоток, оперировать индуктивностями рассеяния отдельных обмоток или переходить к дуальным электрическим цепям [5]. Вместе с этим известные методы расчета индуктивности рассеяния пары обмоток используются для контроля эквивалентных диаметров тонких обмоток модели.

В предлагаемом подходе учет гистерезиса выполняется на этапе составления уравнений магнитной цепи трансформатора, включающей потоки, частично замыкающиеся вне ферромагнетика [1]. Магнитные потоки, сцепленные с обмотками, учитываются также в уравнениях электрических

цепей трансформатора (уравнения обмоток). Это позволяет объединить магнитные и электрические уравнения трансформатора в единую систему, к которой могут быть добавлены уравнения внешней цепи (сети). Являясь инструментом анализа переходного процесса, предложенная модель позволяет исследовать и установившийся режим, наступающий после его завершения.

Описываемый подход был разработан при моделировании мощного трехфазного трансформатора. Ввиду того, что описать модель такого трансформатора в рамках одной статьи затруднительно, сущность подхода рассматривается ниже на примере однофазного трансформатора, «вырезанного» из упомянутого трехфазного трансформатора с сохранением диаметра (сечения) стержня, чисел витков и напряжений обмоток. Основные размеры и параметры трансформатора: наружная обмотка (ВН): $h_1=2,288$ м; $a_1=0,135$ м; $d_{1вн}=1,662$ м; $d_{1нар}=1,932$ м; $w_1=846$; $r_1=0,6058$ Ом; $E_m=439$ кВ. Внутренняя обмотка (НН): $h_2=2,4$ м; $a_2=0,113$ м; $d_{2вн}=1,24$ м; $d_{2нар}=1,466$ м; $w_2=44$; $r_2=0,0011$ Ом; $r_n=0,6$ Ом. Размеры магнитной системы: $h_0=2,73$ м; $l_1=3,33$ м; $l_2=6,14$ м; $S_1=S_2=0,9714$ м².

Динамическая модель участка магнитной системы. Магнитная система трансформатора может рассматриваться как совокупность участков (магнитных и воздушных стержней), каждый из которых характеризуется постоянным сечением S_k по его длине l_k . В пределах стержня k мгновенные значения напряженности поля H_k и магнитного потока Φ_k (индукции $B_k=\Phi_k/S_k$) считаются одинаковыми [1].

В качестве уравнения, описывающего ферромагнитные участки, можно использовать выражение, полученное для магнитных цепей, состоящих из одного участка, например, витых сердечников или пластин, образующих замкнутый магнитопровод аппарата Эпштейна. Ввиду отсутствия достоверной физической (детерминистической) модели текстурованного (анизотропного) материала, описание процессов в листовой холоднокатаной стали выполняется, как правило, с использованием известного принципа разделения общих потерь в ферромагнетике на составляющие, обусловленные гистерезисом, макро- и микроскопическими вихревыми токами [9,10]. При условии равномерного распределения магнитного потока по сечению листа (отсутствии выраженного поверхностного эффекта) упомянутое разделение потерь эквивалентно разделению магнитного поля $H(t)$ на поверхности листа на три слагаемые, называемые гистерезисным полем H_r , классическим полем H_k и дополнительным полем H_d [2,9,10,17]. Несколько упрощая модель, предложенную в [17], запишем соответствующее выражение как

$$H(t) = H_r(B) + \frac{d^2}{12\rho} \frac{dB}{dt} + g(B) \delta \left| \frac{dB}{dt} \right|^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь поле $H_r(B)$ рассчитывается с использованием статической модели гистерезиса, а второе слагаемое зависит от толщины листа d и удельного сопротивления материала ρ . Оно называется классическим полем H_k , поскольку может быть получено из аналитического решения классических уравнений Максвелла для тонкого ферромагнитного листа [10] в предположении об отсутствии поверхностного эффекта (для трансформаторной стали с $d < 0,3$ мм это выражение считается приемлемым до частоты 100 Гц [10]).

Зависимость $H_r(B)$, полученная для синусоидальной индукции с амплитудой $B_m=1,7$ Тл, показана кривой 1 на рис. 1. Кривая, построенная суммированием слагаемых H_r и H_k на частоте 50 Гц, — пунктирной кривой 2.

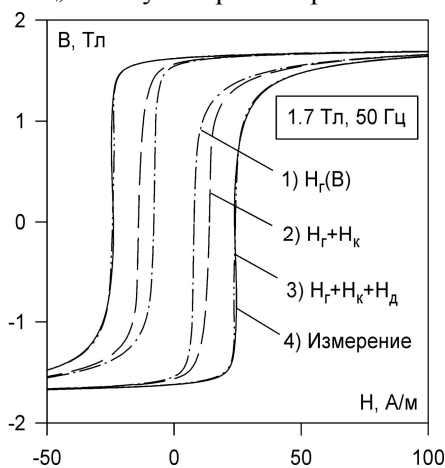


Рис. 1

Очевидно, что этой суммы недостаточно для воспроизведения экспериментальной петли 4, площадь которой представляет собой потери энергии в единице объема материала (Дж/м³) за цикл перемагничивания. В связи с этим площадь между петлями 2 и 4 на рис. 1 характеризует так называемые добавочные (аномальные) потери [10], которые в случае текстурованной стали значительно превышают классические потери (площадь между кривыми 1 и 2).

Для расширения динамической петли и учета таким образом добавочных потерь в выражение (1) введено третье слагаемое, — поле H_d . Параметр направления δ в (1) равен ± 1 для восходящей ($dB/dt > 0$) и нисходящей ($dB/dt < 0$) ветвей соответственно. Отличием (1) от подобных выражений, приведенных в [2,10], является наличие функции $g(B)$, позволяющей настроить форму динамической петли гистерезиса с учетом данных эксперимента. Для написания выражения, охватывающего оба значения δ , удобно ввести переменную $B_\delta = B\delta$. Тогда для холоднокатаной электротехнической стали, рассматриваемой в

настоящей статье ($d=0,255$ мм, $\rho=0,48 \cdot 10^{-6}$ Ом·м),

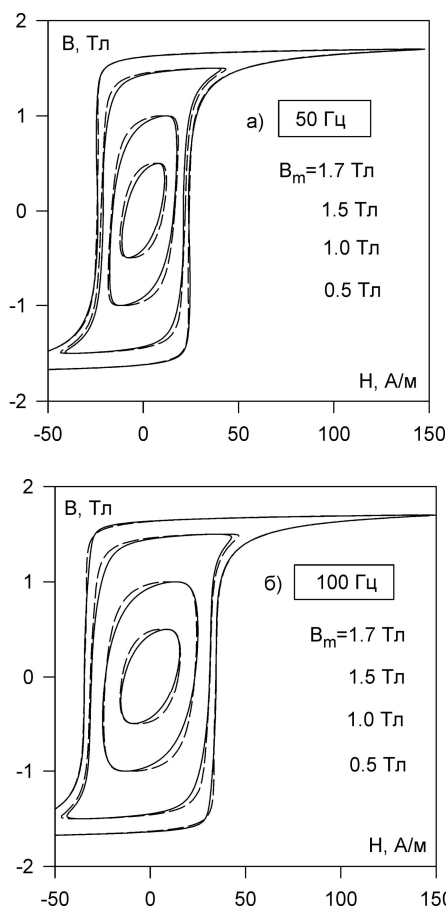


Рис. 2

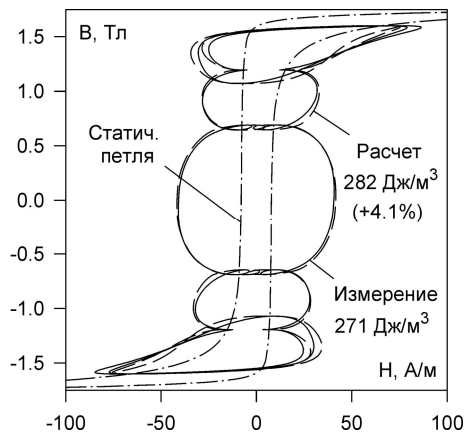


Рис. 3

$$g(B) = \begin{cases} G_m (1 + a_1 B_\delta^2 + b_1 B_\delta^4), & \text{если } B < 0, \\ G_m (1 + a_2 B_\delta^2 + b_2 B_\delta^4), & \text{если } B \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Коэффициенты этого выражения ($a_1=0,103$ 1/Тл², $b_1=-0,165$ 1/Тл⁴, $a_2=0,191$ 1/Тл², $b_2=0,049$ 1/Тл⁴), а также константа $G_m=0,443$ (А/м)(с/Тл)^{1/2} были найдены путем минимизации суммарного отклонения двух петель, рассчитанных по (1) на частотах 50 и 100 Гц, от соответствующих экспериментальных петель, измеренных в режиме контролируемой синусоидальной индукции ($B_m=1,7$ Тл). Эти петли, а также петли, рассчитанные по (1) и снятые на измеренном комплексе [18] для других значений B_m , показаны на рис. 2 пунктирными и сплошными кривыми соответственно.

Несмотря на то, что модели типа (1) являются, строго говоря, не физическими, а феноменологическими, их приемлемость для сложных законов изменения магнитной индукции подтверждается рядом численных и натурных экспериментов [9,17]. Иллюстрацией может служить близость кривых $B(H)$ на рис. 3, измеренных и рассчитанных посредством (1) для магнитной индукции, основная гармоника которой (50 Гц) имеет амплитуду 1,528 Тл, а амплитуды 3, 7 и 11-ой гармоник составляют 10% основной. Хорошее совпадение расчета с экспериментом достигнуто, в частности, за счет применения статической модели гистерезиса (СМГ) [16], воспроизводящей историю процесса намагничивания (удовлетворяющей правилам Мадлунга). Вместе с точным воспроизведением симметричных петель гистерезиса (эти петли являются исходными данными модели), преимуществом такой СМГ является возможность построения как «прямых» $B(H)$, так и «обратных» зависимостей $H(B)$, используемых в (1).

Обращает на себя внимание тот факт, что модель (1), настроенная при $B_m=1,7$ Тл и частотах 50 и 100 Гц (эти настройки обеспечивают достаточную точность модели до частоты 200 Гц [17]), хорошо воспроизводит динамическую кривую $B(H)$, соответствующую индукции с частотами гармоник 150, 350 и 550 Гц. Это объясняется тем, что подобно реальному материалу динамические свойства модели (1) определяются производной dB/dt , величина которой зависит как от частоты, так и от амплитуды гармоник. Можно показать, что при описанном выше гармоническом составе индукции $B(t)$ максимальное значение ее производной dB/dt является таким же, как и в случае синусоидальной индукции с амплитудой 1,528 Тл и частотой 155 Гц, то есть с частотой, не превышающей 200 Гц. Для анализа режимов с большими

токами намагничивания статическая петля гистерезиса была экстраполирована так, чтобы тангенс ее наклона в области индукций, превышающих 2 Тл, был равен магнитной постоянной. В предлагаемой модели выражение (1) используется для описания каждого ферромагнитного участка МС в отдельности. Особенности применения такого подхода рассматриваются в следующем разделе.

Расчет переходного процесса в однофазном трансформаторе. При описании магнитной системы требуется выбрать количество ее участков и границ между ними. В принципе, количество участков может быть произвольным. Например, в трансформаторе с n концентрическими обмотками ярмо можно разделить на $n-1$ внутренних участков [5]. Однако в трансформаторе с МС, схематически показанной на рис. 4, общее число ферромагнитных участков считают обычно равным

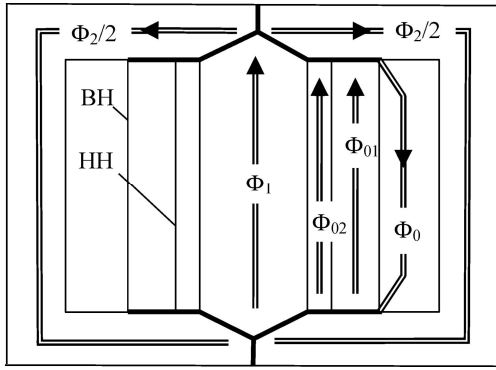


Рис. 4

двум (в силу симметрии далее рассматривается только правая часть МС). Такими участками можно считать, например, центральный и боковой стержни, а длину яра разделить между ними [5]. В настоящей же модели яра относятся ко второму участку с потоком Φ_2 (рис. 4). Этим учитывается то обстоятельство, что яра и боковые стержни (в дальнейшем – яра) насыщаются обычно меньше, чем центральный стержень. Причиной этого является то, что часть потока Φ_1 центрального стержня замыкается по воздуху в виде потока Φ_0 . Воздушным является и стержень с потоком Φ_{01} между наружной обмоткой высокого напряжения (ВН) и внутренней обмоткой низкого напряжения (НН), а также стержень с потоком Φ_{02} между обмоткой НН и центральным стержнем. При этом длины воздушных стержней полагаются равными высоте окна h_0 . Таким допущениям соответствуют два «распределенных» узла МС, участки которых (жирные линии на рис. 4) имеют нулевое магнитное сопротивление для магнитных потоков в воздухе (Φ_{01} , Φ_{02} и Φ_0).

Составление уравнений и определение параметров воздушных стержней становится более наглядным при использовании схемы магнитной цепи. В схеме на рис. 5 ферромагнитные участки, описываемые уравнениями вида (1), условно показаны нелинейными магнитными сопротивлениями R_1 и R_2 , а воздушные стержни – линейными магнитными сопротивлениями R_0 , R_{01} и R_{02} . Магнитные сопротивления (R_i), сечения (S_i) и длины (l_i) всех участков МС обозначены в соответствии с магнитными потоками, показанными на рис. 4. Для упрощения рассматриваемого примера сечения яра и боковых стержней считаем одинаковыми и объединяем эти элементы в один участок (яро). Из соображений симметрии сечение S_2 этого участка равно удвоенному сечению реальных яра. Соответственно, поток Φ_2 в нелинейном сопротивлении R_2 равен сумме потоков $\Phi_2/2$, показанных на рис. 4.

Стержень и яро описываются напряженностями поля H_1 , H_2 и индукциями B_1 , B_2 (потоками $\Phi_1 = S_1 B_1$ и $\Phi_2 = S_2 B_2$). Воздушные стержни характеризуются магнитными потоками и сопротивлениями $R_{0i} = l_i / (\mu_0 S_i)$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Тогда для схемы на рис. 5 можно записать одно узловое и четыре контурных уравнения

$$\Phi_{02} + \Phi_{01} + S_1 B_1 - S_2 B_2 - \Phi_0 = 0, \quad (3)$$

$$H_1 l_1 - R_{02} \Phi_{02} = 0 \quad (4)$$

$$R_{02} \Phi_{02} - R_{01} \Phi_{01} = -i_2 w_2, \quad (5)$$

$$R_{02} \Phi_{02} + R_0 \Phi_0 = i_1 w_1 - i_2 w_2 \quad (6)$$

$$H_2 l_2 - R_0 \Phi_0 = 0, \quad (7)$$

где w_1 и w_2 – числа витков в обмотках ВН и НН, а i_1 и i_2 – токи в этих обмотках.

Система (3)–(7) уравнений магнитной цепи дополняется уравнениями обмоток

$$e(t) = i_1 r_1 + L_c \frac{di_1}{dt} + w_1 \left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_{01}}{dt} + \frac{d\Phi_{02}}{dt} \right), \quad (8)$$

$$w_2 \left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_{02}}{dt} \right) = i_2 r_2 + i_2 r_H + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (9)$$

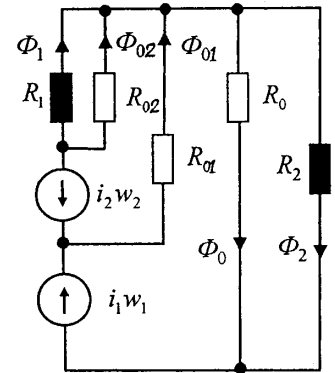


Рис. 5

Здесь $e(t)$ – ЭДС генератора; L_c – индуктивность сети; r_H и L_2 – сопротивление и индуктивность нагрузки; r_1 и r_2 – электрические сопротивления проводов обмоток.

В соответствии с (1) значения H_1 в (4) и H_2 в (7) представляются выражениями

$$H_k = H_r(B_k) + \frac{d^2}{12\rho} \frac{dB_k}{dt} + g(B_k) \delta_k \left| \frac{dB_k}{dt} \right|^{1/2}, \quad k = 1, 2. \quad (10)$$

Если в качестве переменных состояния использовать величины $B_1, B_2, \Phi_{01}, \Phi_{02}$ и i_1 , то можно записать следующую последовательность вычисления их производных, используемых на каждом шаге интегрирования системы (3)–(10).

1) На основании (3) и (5) вычисляем

$$\Phi_0 = S_1 B_1 - S_2 B_2 + \Phi_{01} + \Phi_{02}, \quad (11)$$

$$i_2 = \frac{1}{w_2} (R_{01} \Phi_{01} - R_{02} \Phi_{02}). \quad (12)$$

2) Производные dB_1/dt и dB_2/dt находятся посредством решения квадратных уравнений относительно $(dB_1/dt)^{1/2}$ и $(dB_2/dt)^{1/2}$, получаемых из (4) и (7),

$$\frac{d^2}{12\rho} \frac{dB_1}{dt} + g(B_1) \delta_1 \left| \frac{dB_1}{dt} \right|^{1/2} + H_r(B_1) - R_{02} \Phi_{02} \frac{1}{l_1} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{12\rho} \frac{dB_2}{dt} + g(B_2) \delta_2 \left| \frac{dB_2}{dt} \right|^{1/2} + H_r(B_2) - R_0 \Phi_0 \frac{1}{l_2} = 0. \quad (14)$$

3) Производные остальных переменных состояния находятся умножением матриц

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{02} \\ \Phi_{01} \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & (R_{01} + R_0) & -w_1 \\ w_1 & w_1 & L_c \\ w_2 + \frac{L_2 R_{02}}{w_2} & -\frac{L_2 R_{01}}{w_2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} R_0 \left(S_2 \frac{dB_2}{dt} - S_1 \frac{dB_1}{dt} \right) \\ e(t) - i_1 r_1 - w_1 S_1 \frac{dB_1}{dt} \\ i_2 (r_2 + r_H) - w_2 S_1 \frac{dB_1}{dt} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Эквивалентные параметры тонких обмоток и воздушных стержней. Без ущерба для точности моделирования процессов в МС реальные обмотки трансформатора с размерами сечений h_1, a_1 (ВН) и h_2, a_2 (НН) можно заменить тонкими обмотками (рис. 4), высота которых равна высоте окна h_0 . Эквивалентные диаметры d_1 и d_2 таких обмоток определяются обычно по формулам [5]

$$d_1 = d_{1вн} + 2a_1/3, \quad d_2 = d_{2нар} - 2a_2/3, \quad (16, 17)$$

где $d_{1вн}$ – внутренний диаметр обмотки ВН, а $d_{2нар}$ – наружный диаметр обмотки НН [5].

Значение d_1 используется, в частности, для оценки индуктивности обмотки ВН при полном насыщении стали центрального стержня [6]

$$L_{экр}^s = \mu_0 w_1^2 \pi d_1^2 / 4h_0. \quad (18)$$

(Здесь верхний индекс s (saturation) обозначает насыщение).

Насыщение стержня может возникнуть при подключении обмотки ВН к сети (обмотка НН считается при этом разомкнутой). При неблагоприятном моменте включения (неблагоприятной фазе ЭДС генератора) имеет место бросок тока i_1 , максимальное значение которого оценивается так [6]:

$$I_{1m} = \frac{E_m}{\omega (L_c + L_{экр}^s)} \left[2 - \frac{(B_s - B_0) \omega w_1 S_1}{E_m} \right]. \quad (19)$$

Здесь E_m и $\omega = 2\pi f$ – амплитуда и угловая частота ЭДС $e(t)$, f – частота ЭДС в Гц, B_s – индукция насыщения стали (ориентировочно можно принять $B_s = 2$ Тл), B_0 – индукция в стержне на момент включения (наибольший ударный ток соответствует максимальному значению B_0 , которое можно принять равным остаточной индукции материала B_r).

Заметим, что формула (18) соответствует случаю ненасыщенного яра. Насыщение же стержня, имеющее место при броске тока включения, сопровождается насыщением ярем. Хотя, вследст-

вие существования потока Φ_0 , насыщение ярем заметно меньше, чем насыщение стержня, индукция в ярях все же достигает значений, при которых всю МС трансформатора можно считать насыщенной. При этом обмотку ВН можно считать обмоткой без стали и рассчитывать ее индуктивность $L_{\text{возд}}^s$ по формулам, приведенным в [3]. Поскольку длина магнитных линий такой обмотки больше, чем h_0 , то индуктивность $L_{\text{возд}}^s$ несколько меньше индуктивности $L_{\text{экр}}^s$. Например, для выбранного выше трансформатора $L_{\text{возд}}^s = 0.6897$ Гн, тогда как $L_{\text{экр}}^s = 0.7942$ Гн. При расчете ударного тока по (19), где вместе с $L_{\text{экр}}^s$ учитывается индуктивность сети L_c , 15-процентное отличие $L_{\text{экр}}^s$ и $L_{\text{возд}}^s$ является приемлемым. Однако это отличие позволяет определить магнитное сопротивление R_0 модели, структура которой остается неизменной при любых режимах работы трансформатора.

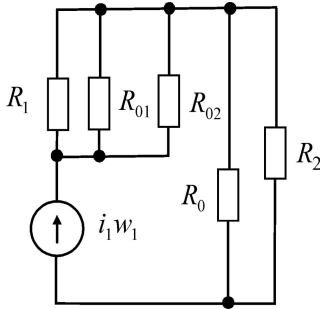


Рис. 6

Очевидно, что при разомкнутой обмотке НН и насыщенной МС схема на рис. 5 преобразуется к виду, показанному на рис. 6, где отсутствие заливки у сопротивлений R_1 и R_2 указывает на насыщение соответствующих участков.

Магнитные сопротивления R_1 , R_{01} и R_{02} включены параллельно и образуют сопротивление $R_{\text{экр}}^s = w_1^2 / L_{\text{экр}}^s$. Аналогично, индуктивности $L_{\text{возд}}^s$ реальной обмотки соответствует магнитное сопротивление $R_{\text{возд}}^s = w_1^2 / L_{\text{возд}}^s$. Поскольку $L_{\text{экр}}^s > L_{\text{возд}}^s$, то $R_{\text{экр}}^s < R_{\text{возд}}^s$. Очевидно, что для увеличения входного сопротивления магнитной цепи до $R_{\text{возд}}^s$ сопротивление параллельно соединенных элементов R_0 и R_2 должно быть равным $(R_{\text{возд}}^s - R_{\text{экр}}^s)$. Так как магнитное сопротивление R_2 известно, $R_2 = l_2 / (\mu_0 S_2)$, то сопротивление воздушного стержня R_0 определяется выражением

$$R_0 = \frac{(R_{\text{возд}}^s - R_{\text{экр}}^s) R_2}{R_2 - (R_{\text{возд}}^s - R_{\text{экр}}^s)}. \quad (20)$$

В рассматриваемом трансформаторе $R_2 = 5029912$ 1/Гн, а $R_0 = 140426$ 1/Гн, то есть сопротивление воздушного стержня значительно меньше сопротивления полностью насыщенного яря. Поскольку гладкие гистерезисные кривые, используемые в модели, не имеют изломов, то по мере насыщения яря происходит плавное перераспределение магнитного потока от яря к воздушному стержню с сопротивлением R_0 , а индукция B_2 в яре не достигает таких высоких значений,

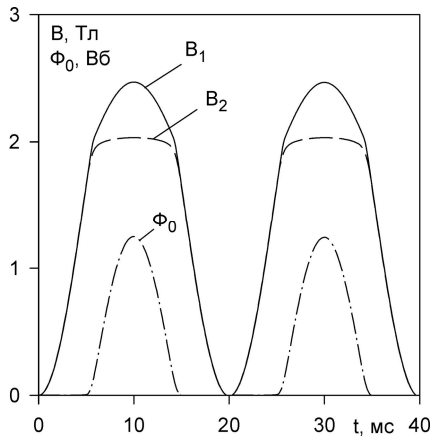


Рис. 7

как индукция B_1 в стержне. Отличие максимальных индукций в стержне ($B_{1m} = 2.469$ Т) и яре ($B_{2m} = 2.033$ Т), а также резкое увеличение потока Φ_0 при насыщении яря иллюстрируется кривыми на рис. 7. Они получены интегрированием системы (3)–(10), где величина r_n была увеличена на 3 порядка по отношению к номинальному сопротивлению нагрузки (этим моделировался режим XX со стороны обмотки НН). Интегрирование производилось на протяжении первых двух периодов и выполнялось для наиболее неблагоприятной фазы напряжения сети, то есть синусоидальной ЭДС. Предполагалось, что в начале процесса магнитопровод трансформатора находится в размагниченном состоянии ($B_0 = 0$), а индуктивность L_c сети равна нулю. Отмечено, что в момент достижения максимального тока i_1 падения магнитных напряжений в стержне ($H_1 l_1$) и яре ($H_2 l_2$) составляют соответственно 88% и 12% МДС $i_1 w_1$ обмотки ВН.

Результаты расчета тока включения представлены сплошной кривой на рис. 8, где горизонтальной засечкой (19) показано значение, рассчитанное по формуле (19). Если в этой формуле значение $L_{\text{экр}}^s$ заменить значением $L_{\text{возд}}^s$, то величина броска возрастет до значения, отмеченного засечкой (19') и приблизится к величине, рассчитанной на модели.

Для сравнения пунктирной кривой на рис. 8 показаны завышенные броски тока включения, полученные при отсутствии в расчетной модели воздушного стержня (для расчета этой кривой значение R_0 было увеличено на 3 порядка).

Настройка параметров модели заканчивается уточнением эквивалентного диаметра d_2 обмотки НН, который вместе с диаметром d_1 определяет индуктивность рассеяния L_{12} пары тонких обмоток, доходящих до ярем [6],

$$L_{12} = \mu_0 w_1^2 \pi (d_2^2 - d_1^2) / 4h_0. \quad (21)$$

Необходимость уточнения d_2 вызвана тем, что значение L_{12} обычно несколько меньше индуктивности короткого замыкания трансформатора (L_k), которая измеряется в опыте КЗ или рассчитывается с использованием программ типа ANSYS. Так, для трансформатора, рассматриваемого в настоящей статье, $\omega L_{12} = 92$ Ом, тогда как сопротивление ωL_k , измеренное со стороны обмотки ВН, равно 100 Ом. Для увеличения L_{12} до требуемой величины диаметр d_2 следует уменьшить в данном случае до значения $d_{2нар} - a_2$, что соответствует расположению тонкой обмотки НН в середине сечения реальной обмотки.

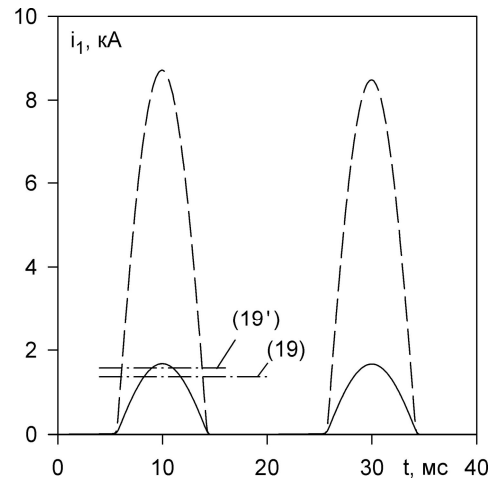


Рис. 8

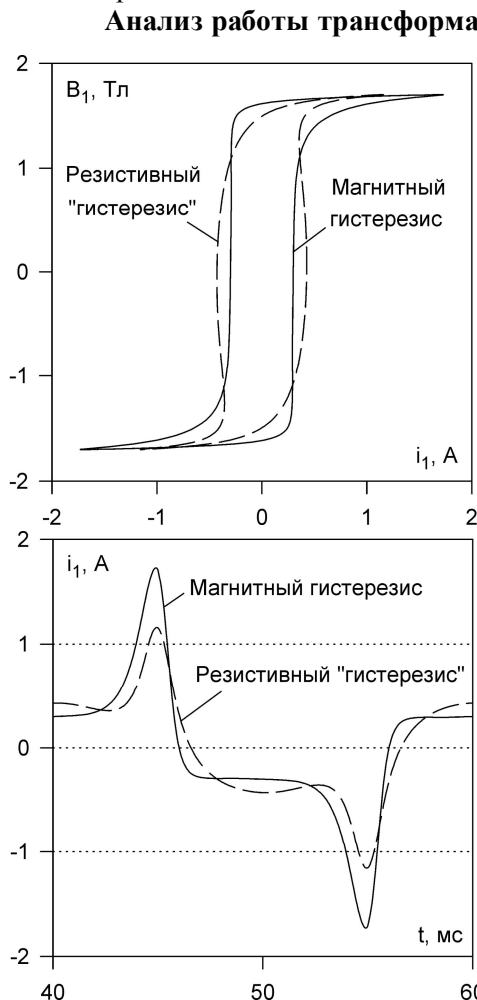


Рис. 9, 10

Анализ работы трансформатора в режиме холостого хода. Целью анализа является расчет высших гармоник тока ХХ, вызывающих искажения сетевого напряжения, что может повлиять на работу других потребителей и срабатывание защитных устройств автоматики. Вместе с расчетом по модели (3)–(10), включающей учет гистерезисных свойств стали, анализ тока ХХ был также выполнен с помощью упрощенной (резистивной) модели, в которой потери в магнитопроводе воспроизводились с помощью сопротивлений R_c и R_y , включенных в воображаемые обмотки, охватывающие стержень и ярмо соответственно. Если числа витков в этих обмотках равны w_1 , то $R_c = 3,36$ МОм и $R_y = 1,84$ МОм. Эти значения подобраны так, чтобы потери в сопротивлениях были равны потерям в стержне и ярме, рассчитанным посредством модели (3)–(10). Это иллюстрируется равенством площадей динамических петель гистерезиса на рис. 9, построенных в координатах «индукция – ток намагничивания» с помощью модели (3)–(10) и модели с сопротивлениями потерь. Однозначная (безгистерезисная) кривая намагничивания резистивной модели была получена как полусумма восходящей и нисходящей ветвей предельной петли гистерезиса [7].

На рис. 10 сравниваются токи ХХ, рассчитанные с использованием гистерезисной и резистивной моделей (сплошная и пунктирная кривые соответственно). Разложение этих кривых в ряд Фурье показывает наличие только нечетных гармоник, причем третья и высшие гармоники, рассчитанные с использованием гистерезисной модели, в среднем на 40% выше, чем эти же гармоники, полученные с помощью резистивной модели.

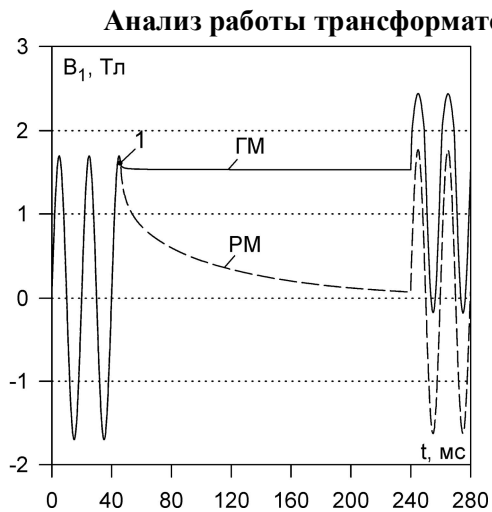


Рис. 11

стивной модели, существенно отличаются. Индукция в магнитопроводе, рассчитанная с использованием резистивной модели (РМ), уменьшается за время интервала почти до нуля (пунктирная кривая на рис. 11), в то время как индукция, определяемая гистерезисной моделью (ГМ), практически не изменяется (сплошная кривая). Различием исходных индукций определяется отличие процессов, возникающих после второго включения трансформатора. С точки зрения броска пускового тока наиболее благоприятным является повторное включение на косинусоидальное напряжение. При этом резистивная

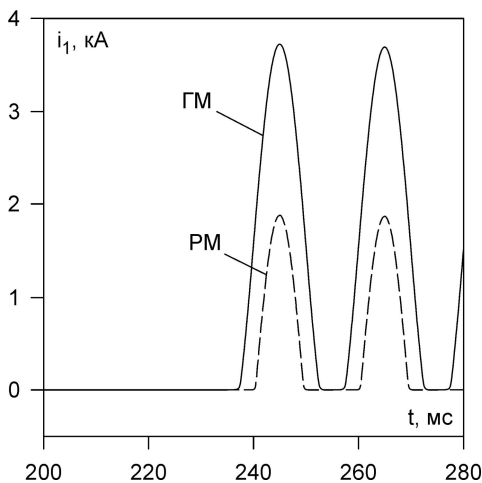


Рис. 12

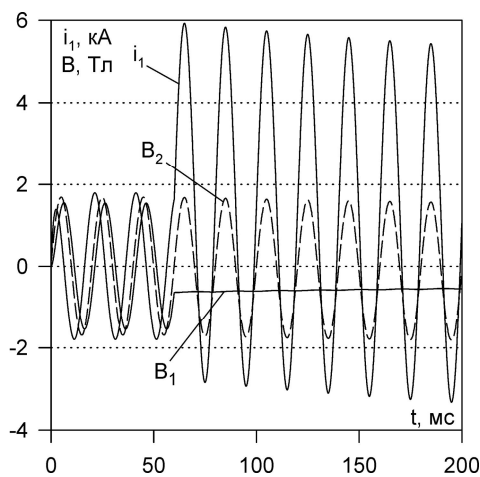


Рис. 13

материала является необходимым условием моделирования трансформатора при его повторяющихся включениях. Примером может служить переходный процесс, иллюстрируемый рис. 11. Он состоит из двух повторных включений, разделенных интервалом длительностью 200 мс, в течение которого ненагруженный трансформатор отключен от сети. Будем считать, что магнитная система трансформатора находилась вначале в размагниченном состоянии, а напряжение сети было косинусоидальным. Тогда после первого включения трансформатор сразу переходит в режим ХХ с симметричной индукцией и бросков тока не возникает. Считаем, что отключение трансформатора от сети выполняется после двух периодов входного напряжения и происходит при переходе тока i_1 через ноль. В момент прерывания тока индукция в стержне и ярме равна 1,6 Тл (точка 1 на рис. 11), а затем процессы, рассчитанные с помощью гистерезисной и резистивной моделей, существенно отличаются. Индукция в магнитопроводе, рассчитанная с использованием резистивной модели (РМ), уменьшается за время интервала почти до нуля (пунктирная кривая на рис. 11), в то время как индукция, определяемая гистерезисной моделью (ГМ), практически не изменяется (сплошная кривая). Различием исходных индукций определяется отличие процессов, возникающих после второго включения трансформатора. С точки зрения броска пускового тока наиболее благоприятным является повторное включение на косинусоидальное напряжение. При этом резистивная модель сразу переходит в почти установившийся режим с первичным током порядка 2 А, тогда как гистерезисная модель показывает бросок первичного тока величиной 1,6 кА.

Наибольшие токи включения в обеих моделях имеют место в случае, когда повторное включение происходит в момент, когда первичное напряжение переходит через ноль в сторону положительных значений (такое напряжение было названо синусоидальным). При этом, как видно из рис. 12, бросок тока, рассчитанный с использованием гистерезисной модели, примерно вдвое больше броска, предсказанного моделью с сопротивлениями потерь.

Анализ работы трансформатора в режиме КЗ. Рассмотрим замыкание вторичной обмотки накоротко при сохранении номинального напряжения первичной обмотки. Кривые, показанные на рис. 13, рассчитаны для КЗ, происходящего по истечении трех периодов после включения трансформатора на косинусоидальное напряжение.

Начиная с момента КЗ, индукция B_1 в стержне остается почти неизменной, а у индукции B_2 в ярме появляется постоянная составляющая. Ударный ток i_{1m} зависит от момента КЗ (на рис. 13 его величина равна 5,94 кА). В течение 100 периодов (2 секунд) трансформатор переходит в режим установившегося КЗ, ток которого ($i_{1m}=4,37$ кА) определяется параметрами сети и сопротивлением ωL_k . Начиная с первых периодов после КЗ, в токе i_1 присутствует только первая гармоника (высшими гармониками можно пренебречь). В этом отношении токи КЗ (ударный и установившийся) отличаются от броска тока включения, характеризуемого значительной величиной второй гармоники. Например, вторая гармоника тока включения, показанного на рис. 8, составляет 52% его первой гармоники и находится по отношению к ней в противофазе. Это позволяет использовать

описанную модель при разработке систем защиты трансформатора от токов КЗ, назначением которых является дифференциация режимов КЗ и токов включения путем анализа амплитуд и фаз отдельных гармоник первичного тока [11].

В заключение заметим, что в описанной модели были непосредственно использованы кривые намагничивания, полученные на аппарате Эпштейна. Они близки к характеристикам стали при ее работе в трансформаторах с современными способами сборки МС, что обеспечивает немагнитный зазор порядка сотен микрон. Это относится к схемам шихтовки «step-lap» в 6–8 положений с минимальным перекрытием листов и изменением положения стыка после каждого листа или пары листов. При менее совершенных схемах шихтовки ток и потери холостого хода трансформатора существенно зависят от конструкции зон стыков МС, а именно, площади и длины немагнитного зазора, ориентации стали в зоне стыка, способа раскроя, технологии сборки. Все эти трудно учитываемые факторы требуют отдельного исследования и корректировки модели. Возможными способами корректировки является введение поправочных множителей в выражение (1) или непосредственный учет в модели немагнитных зазоров (например, зазор Δ между стержнем и ярмом может быть воспроизведен введением слагаемого $B_2\Delta/(\mu_0 l_2)$ в уравнение (14)). Заметим, что использование поправочных коэффициентов требуется при использовании любой модели и не влияет на преимущества гистерезисной модели, описанной выше.

1. Евдокунин Г.А., Дмитриев М.В. Моделирование переходных процессов в электрической сети, содержащей трансформаторы при учете конфигурации их магнитной системы // Известия РАН. Энергетика. – 2009. – № 2. – С. 37–48.
2. Кадочников А. И. Динамические петли магнитного гистерезиса. – Екатеринбург: Изд-во Урал. отд. РАН, 2007. – 288 с.
3. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.
4. Карасев В.В., Лейтес Л.В. В дискуссии «Об электромагнитном рассеянии обмоток трансформатора» // Электричество. – 1983. – № 9. – С. 63, 64.
5. Лейтес Л.В. Электромагнитные расчеты трансформаторов и реакторов. – М.: Энергия, 1981.
6. Лурье А.И. Процесс включения трансформатора на холостой ход и короткое замыкание // Электротехника. – 2008. – № 2. – С. 2–18.
7. Розенблат М.А. Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники. – М.: Наука, 1974. – 768 с.
8. Barbisio E., Fiorillo F., Ragusa C. Predicting loss in magnetic steels under arbitrary induction waveform and with minor hysteresis loops // IEEE Trans. Magn. – 2004. – Vol. 40. – № 4. – P. 1810–1819.
9. Bertotti G. Hysteresis in magnetism. – San Diego: Academic Press, 1988.
10. Dommel H. W., Bhattacharya S., Brandwajn V., Lauw H. K., Marti L. Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book); 2nd ed. – Portland, OR: Bonneville Power Admin., 1992.
11. Kasztenny B., Kulidjian A. An improved transformer inrush restraint algorithm // 53rd Ann. Conf. Protective Relay Engineers. GER-3989A, College Station, April 11-13, 2000.
12. Martinez J. A., Mork B. A. Transformer modeling for low- and mid-frequency transients – A review // IEEE Trans. Pow. Del. – 2005. – Vol. 20. – № 2. – Pp. 1625–1632.
13. Mork B. A., Ishchenko D., Gonzalez F., Cho S. D. Parameter estimation methods for five-limb magnetic core model // IEEE Trans. Pow. Del. – 2008. – Vol. 23. – № 4. – Pp. 2025–2032.
14. Theocharis A. D., Miliadis-Argitis J., Zacharias Th. Single-phase transformer model including magnetic hysteresis and eddy currents // Electrical Engineering. – 2008. – Vol. 90. – № 3. – Pp. 229–241.
15. Zirka S.E., Moroz Y.I., Marketos P., Moses A.J. Congruency based hysteresis models for transient simulations // IEEE Trans. Magn. – 2004. – Vol. 40. – № 2. – Pp. 390–399.
16. Zirka S.E., Moroz Y.I., Marketos P., Moses A.J., Jiles D.C., Matsuo T. Generalization of the classical method for calculating dynamic hysteresis loops in grain-oriented electrical steels // IEEE Trans. Magn. – 2008. – Vol. 44. – № 9. – Pp. 2113–2126.
17. Zurek S., Meydan T., Marketos P., Moses A.J. Use of novel adaptive digital feedback for magnetic measurements under controlled magnetizing conditions // IEEE Trans. Magn. – 2005. – Vol. 41. – № 11. – Pp. 4242–4249.

Надійшла 05.03.09

T. Kaczorek (Warsaw University of Technology, Poland)

SOME RECENT DEVELOPMENTS IN THEORY OF FRACTIONAL POSITIVE AND CONE LINEAR SYSTEMS

Запропоновано огляд та деякі нові результати у теорії фракційних додатних та конусних одновимірних (1D) та двовимірних (2D) лінійних систем. Подано рівняння стану та їхнє розв'язання для фракційних неперервних та дискретних лінійних систем. Встановлено необхідні та достатні умови для внутрішньої та зовнішньої додатності фракційних лінійних систем. Показано їхню досяжність. Запропоновано нову форму запису конусних систем та методи, придатні для комп'ютерного розрахунку таких систем. Представлено додатні фракційні 2D лінійні системи. Встановлено необхідні та достатні умови для додатності та досяжності. Теоретичні виклади проілюстровано чисельними прикладами 1D та 2D лінійних систем.

Предложены анализ состояния вопроса и некоторые новые результаты, полученные в теории дробных положительных и конусных одномерных (1D) и двумерных (2D) линейных систем. Приведены уравнения состояния и их решения для дробных непрерывных и дискретных линейных систем. Выявлены необходимые и достаточные условия для внутренней и внешней положительности дробных линейных систем. Показана их достижимость. Предложена новая форма записи конусных систем, а также методы их компьютерного расчета. Представлены положительные дробные 2D линейные системы. Установлены необходимые и достаточные условия для положительности и достижимости. Теоретические выкладки иллюстрированы численными примерами 1D и 2D линейных систем.

Introduction. In positive systems inputs, state variables and outputs take only non-negative values. Examples of positive systems are industrial processes involving chemical reactors, heat exchangers and distillation columns, storage systems, compartmental systems, water and atmospheric pollution models. A variety of models having positive linear systems behaviour can be found in engineering, management science, economics, social sciences, biology and medicine, etc.

Positive linear systems are defined on cones and not on linear spaces. Therefore, the theory of positive systems is more complicated and less advanced. An overview of state of the art in positive systems is given in the monographs [2, 5]. An extension of positive systems are the cone systems. The notion of cone systems was introduced in [6]. Roughly speaking cone system is a system obtained from positive one by substitution of the positive orthants of states, inputs and outputs by suitable arbitrary cones. The realization problem for cone systems has been addressed in [6].

The first definition of the fractional derivative was introduced by Liouville and Riemann at the end of the 19th century [21, 24, 26]. This idea has been used by engineers for modeling different processes in the late 1960s [1, 3, 25-27]. Mathematical fundamentals of fractional calculus are given in [21, 23, 24, 26]. A generalization of the Kalman filter for fractional order systems has been proposed in [27]. Fractional polynomials and nD systems have been investigated in [4]. The positive controllability of positive systems and approximate constrained controllability of mechanical systems have been investigated in [20, 21].

The aim of this paper is to give an overview of some recent developments and new results in the theory of fractional positive and cone 1D and 2D linear systems.

The paper is organized as follows. The standard and positive fractional continuous-time linear systems are addressed in section 2. Necessary and sufficient conditions for the positivity of the system are established. Similar problem for the discrete-time linear systems are considered in section 3. Section 4 is devoted to the reachability of positive fractional discrete-time linear systems. The realization problem for positive fractional continuous-time systems is addressed in section 5. The cone fractional discrete-time linear systems and their reachability are considered in section 6. Positive fractional 2D systems and their reachability are addressed in section 7. Concluding remarks and open problems are given in section 8.

The following notation will be used in this paper.

Let $\mathfrak{R}^{n \times m}$ be the set of $n \times m$ real matrices and $\mathfrak{R}^n := \mathfrak{R}^{n \times 1}$. The set of $m \times n$ matrices with nonnegative entries will be denoted by $\mathfrak{R}_+^{m \times n}$ and $\mathfrak{R}_+^n := \mathfrak{R}_+^{n \times 1}$. The set of nonnegative integers will be denoted by Z_+ and the $n \times n$ identity matrix by I_n .

Continuous-time linear systems. 1. *Continuous-time fractional linear systems.* In this paper the following Caputo definition of the fractional derivative will be used [21, 24]

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha \leq n \in N = \{1, 2, \dots\}, \quad (1)$$

where $\alpha \in \mathfrak{R}$ is the order of fractional derivative and $f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n}$.

Consider the continuous-time fractional linear system described by the state equations

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2a,b)$$

where $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ are the state, input and output vectors and $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

Theorem 1. [10] The solution of equation (2a) is given by

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

where
$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \quad (4,5)$$

and $E_\alpha(At^\alpha)$ is the Mittag-Leffler matrix function, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ is the gamma function.

Remarks. 1. From (4) and (5) for $\alpha = 1$ we have $\Phi_0(t) = \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{At}$. (6)

2. From the Cayley-Hamilton theorem we have. If $\det[I_n s^\alpha - A] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0$, (7)

then $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$. (8)

Example. Find the solution of eq.(2a) for $0 < \alpha \leq 1$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t > 0 \\ 0, & \text{for } t < 0 \end{cases}$. (9)

Using (4) and (5) we obtain $\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = I_2 + \frac{At^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ $\Phi(t) = I_2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + A \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}$, (10a,b)

since $A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ for $k = 2, 3, \dots$.

Substitution of (10) and $u(t) = 1$ into (3) yields

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau = x_0 + \frac{Ax_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^t \left(\frac{B}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1} + \frac{AB}{\Gamma(2\alpha)}(t-\tau)^{2\alpha-1} \right) d\tau = \\ &= x_0 + \frac{Ax_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{ABt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{bmatrix}, \quad (11) \end{aligned}$$

since $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

2. Positivity of continuous-time fractional systems.

Definition 1. The fractional system (2) is called the internally positive fractional system if and only if $x(t) \in \mathfrak{R}_+^n$ and $y(t) \in \mathfrak{R}_+^p$ for $t \geq 0$ for any initial conditions $x_0 \in \mathfrak{R}_+^n$ and all inputs $u(t) \in \mathfrak{R}_+^m$, $t \geq 0$.

A square real matrix $A = [a_{ij}]$ is called the Metzler matrix if its off-diagonal entries are nonnegative, i.e. $a_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$ [2, 5].

Lemma 1. Let $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ and $0 < \alpha \leq 1$. Then

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \in \mathfrak{R}_+^{n \times n} \quad \text{for } t \geq 0, \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathfrak{R}_+^{n \times n} \quad \text{for } t \geq 0, \quad (12,13)$$

if and only if A is a Metzler matrix. Proof is given in [10].

Theorem 2. The continuous-time fractional system (2) is internally positive if and only if

$$A \in M_n, \quad B \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathfrak{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathfrak{R}_+^{p \times m} \quad (14)$$

M_n is the set of Metzler matrices. Proof is given in [10].

Definition 2. The fractional system (2) is called externally positive if and only if $y(t) \in \mathfrak{R}_+^p, t \geq 0$ for every input $u(t) \in \mathfrak{R}_+^m, t \geq 0$ and $x_0 = 0$.

The impulse response $g(t)$ of single-input single-output system is called its output for the input equal to the Dirac impulse $\delta(t)$ with zero initial conditions. Assuming successively that only one input is equal to $\delta(t)$ and the remaining inputs and initial conditions are zero we may define the impulse response matrix $g(t) \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ of the system (2). The impulse response matrix of the system (2) is given by

$$g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) \quad \text{for } t \geq 0. \quad (15)$$

Substitution of (3) into (2b) for $x_0 = 0$ yields $y(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \geq 0. \quad (16)$

The formula (15) follows from (16) for $u(t) = \delta(t)$.

Theorem 3. The continuous-time fractional system (2) is externally positive if and only if its impulse response matrix (15) is nonnegative, i.e. $g(t) \in \mathfrak{R}_+^{p \times m}$ for $t \geq 0$. (17)

Proof. The necessity of the condition (17) follows immediately from Definition 2. The output $y(t)$ of the system (2) with zero initial conditions for any input $u(t)$ is given by the formula

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (18)$$

which can be obtained by substitution of (15) into (16). If the condition (17) is met and $u(t) \in \mathfrak{R}_+^m$, then from (18) we have $y(t) \in \mathfrak{R}_+^p$ for $t \geq 0$. From (15) and (13) it follows that if A is a Metzler matrix and (14) holds then the impulse response matrix (15) is nonnegative. Therefore, we have the following two *corollaries*: 1. The impulse response matrix (15) of the internally positive system (2) is nonnegative. 2. Every continuous-time fractional internally positive system (2) is also externally positive.

A example of electrical circuit composed of a resistance R , capacitance C and voltage source described by fractional differential equation is given in [18].

Discrete-time linear systems. 1. Discrete-time fractional systems. The following definition of the fractional difference will be used $\Delta^\alpha x_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (19)$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ is the order of the fractional difference, and

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1, & \text{for } j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}, & \text{for } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20)$$

Consider the fractional discrete-time linear system, described by the state-space equations

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad u \in Z_+ \quad y_k = Cx_k + Du_k, \quad (21a,b)$$

where $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $u_k \in \mathfrak{R}^m$, $y_k \in \mathfrak{R}^p$ are the state, input and output vectors and $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

Using (19) we may write the equations (21) in the form

$$x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \in Z_+ \quad y_k = Cx_k + Du_k. \quad (22a,b)$$

Definition 3. The system (22) is called the (internally) positive fractional system if and only if $x_k \in \mathfrak{R}_+^n$ and $y_k \in \mathfrak{R}_+^p$, $k \in Z_+$ for any initial conditions $x_0 \in \mathfrak{R}_+^n$ and all input sequences $u_k \in \mathfrak{R}_+^m$, $k \in Z_+$.

Theorem 4. [8] The solution of equation (22a) is given by $x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} B u_i$, (23)

where Φ_k is determined by the equation $\Phi_{k+1} = (A + I_n \alpha) \Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} \Phi_{k-i+1}$ with $\Phi_0 = I_n$. (24)

Theorem 5. Let $\det [I_n \Delta^\alpha (z^{-1}) - A z^{-1}] = \sum_{i=0}^M a_{M-i} z^{-i}$ (25)

be the characteristic polynomial of the system (22). Then the matrices $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M$ satisfy the equation

$$\sum_{i=0}^M a_i \Phi_i = 0. \quad (26)$$

Proof. From definition of inverse matrix and (25) we have

$$\text{Adj} [I_n \Delta^\alpha (z^{-1}) - A z^{-1}]^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i z^{-i} \right) \left(\sum_{i=0}^M a_{m-i} z^{-i} \right), \quad (27)$$

where $\text{Adj}F$ denotes the adjoint matrix of F .

Comparison of the coefficients at the same power z^{-M} of the equality (27) yields (26) since degree of $\text{Adj} [I_n \Delta^\alpha (z^{-1}) - A z^{-1}]$ less than M .

Theorem 5 is an extension of the well-known classical Cayley-Hamilton theorem for the fractional system (20). Note that the degree M of the characteristic polynomial (25) depends on k and it increases to infinity for $k \rightarrow \infty$. In practical problems it is assumed that k is bounded by some natural number L . If $k = L$ then $M = N(L+1)$.

2. *Positivity of discrete-time fractional systems.* The following two lemmas are used in the proof of the positivity of the fractional system (23).

Lemma 2. [8] If $0 < \alpha \leq 1$, then $(-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} > 0$ for $i = 1, 2, \dots$ (28,29)

Lemma 3. [8] If (29) holds and $A + I_n \alpha \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}$, then $\Phi_k \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}$ for $k = 1, 2, \dots$ (30,31)

Theorem 6. Let (28) be satisfied. Then the fractional system (28) is positive if and only if

$$A + I_n \alpha \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathfrak{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathfrak{R}_+^{p \times m}. \quad (32)$$

Proof is given in [8, 18].

Example 2. Consider the fractional system (22) for $0 < \alpha < 1$ with $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(n = 2)$. (33)

The fractional system is positive since $A + I_n \alpha = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_+^{2 \times 2}$.

Using (24) for $k = 0, 1, \dots$ we obtain diagonal matrices of the forms

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= (A + I_n \alpha) \Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Phi_2 &= (A + I_n \alpha) \Phi_1 - \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \Phi_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha^2 + 5\alpha + 2 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha)\alpha \end{bmatrix}, \\
\Phi_3 &= (A + I_n \alpha) \Phi_2 - \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \Phi_1 - \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \Phi_0 = \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3(\alpha^2 + 5\alpha + 2)(\alpha + 1) - (\alpha - 1)(2\alpha + 5)\alpha & 0 \\ 0 & (1 - \alpha)(\alpha - 2)\alpha \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{34}$$

From (23) and (24) we have
$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i, \tag{35}$$

where Φ_k is given by (34).

Definition 4. The discrete-time fractional system (22) is called externally positive if $y_k \in \mathfrak{R}_+^p, k \in \mathbb{Z}_+$ for every input sequence $u_k \in \mathfrak{R}_+^m, k \in \mathbb{Z}_+$ and $x_0 = 0$.

Theorem 7. The discrete-time fractional system (22) is externally positive if and only if its response matrix $g_k = \begin{cases} D, & \text{for } k = 0 \\ CA^{k-1}B, & \text{for } k = 1, 2, \dots \end{cases}$ is nonnegative, i.e. $g_k \in \mathfrak{R}_+^{p \times m}$ for $k \in \mathbb{Z}_+$. (36,37)

The proof is similar to the proof of Theorem 3.

Remark 4. The impulse response matrix (36) of the internally positive system (22) is nonnegative and every discrete-time fractional internally positive system is also externally positive.

Reachability of positive fractional discrete-time systems. Consider the positive fractional discrete-time linear system (22).

Definition 5. A state $x_f \in \mathfrak{R}_+^n$ of the positive fractional system (22) is called reachable in q steps if there exist an input sequence $u_k \in \mathfrak{R}_+^m, k = 0, 1, \dots, q-1$ which steers the state of the system from zero ($x_0 = 0$) to the final state x_f , i.e. $x_q = x_f$.

Let $e_i, i = 1, \dots, n$ be the i -th column of the identity matrix I_n . A column ae_i for $a > 0$ is called a monomial column.

Theorem 8. The positive fractional system (22) is reachable in q steps if and only if the reachability matrix

$$R_q := [B, \Phi_1 B, \dots, \Phi_{q-1} B] \tag{38}$$

contains n linearly independent monomial columns.

Proof. Using (22) for $k = q$ and $x_0 = 0$, obtain $x_f = x_q = \sum_{i=0}^{q-1} \Phi_{q-i-1} B u_i = R_q \begin{bmatrix} u_{q-1} \\ u_{q-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$. (39)

From Definition 5 and (39) it follows that for every $x_f \in \mathfrak{R}_+^n$ there exists an input sequence $u_i \in \mathfrak{R}_+^m, i = 0, 1, \dots, q-1$ if and only if the matrix (38) contains n linearly independent monomial columns.

Example 3. Consider the positive fractional systems (22) for $0 < \alpha < 1$ with (33). Using (24) and (38) we obtain

$$R_2 = [B, \Phi_1 B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = [B, \Phi_1 B, \Phi_2 B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0, 5(1 - \alpha)\alpha \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{(1 - \alpha)\alpha}{2} & \frac{(1 - \alpha)(\alpha - 2)\alpha}{6} \end{bmatrix}, \dots \tag{40}$$

Note that the matrices (40) contain only one linearly independent monomial column. Therefore, by Theorem 8 the system (22) with (33) is unreachable.

Example 4. Consider the fractional systems (22) for $0 \leq \alpha \leq 1$ with $A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ($n = 2$). (41)

The system is positive since $A + I_n \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 + \alpha \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2}$. Using (24) for $k = 0$ we obtain

$\Phi_1 = (A + I_n \alpha) \Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 + \alpha \end{bmatrix}$. The reachability matrix (38) for $q = 2$ has the form

$$R_q = [B, \Phi_1 B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

It contains two linearly independent monomial columns. Therefore, the positive fractional system with (41) is reachable in two steps.

Remark 5. From (24) and (38) it follows that the positive fractional system (22) is reachable only if the matrix

$$[B, A + I_n \alpha] \quad (42)$$

contains n linearly independent monomial columns.

The controllability of positive fractional discrete-time linear systems has been considered in [8] and the reachability of positive fractional continuous-time linear systems in [10].

Realisation problem for positive fractional continuous-time linear systems.

1. Problem formulation. Using the Laplace transform it is easy to show that the transfer matrix of the systems is given by the formula

$$T(s) = C[I_n s^\alpha - A]^{-1} B + D. \quad (43)$$

The transfer matrix is called proper if and only if $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = K \in R^{p \times m}$ and it is called strictly proper if

and only if $K = 0$. From (43) we have $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = D$, since $\lim_{s \rightarrow \infty} [I_n s^\alpha - A]^{-1} = 0$. (44)

Definition 6. Matrices (14) are called a positive fractional realization of given transfer matrix $T(s)$ if they satisfy the equality (43). A realization is called minimal if the dimension of A is minimal among all realizations of $T(s)$.

The positive realization problem can be stated as follows. Given a proper transfer matrix $T(s)$, find its positive realizations (14). In this section sufficient conditions for the existence of positive fractional realizations will be established and procedure for computation of the positive fractional realizations will be proposed.

Problem Solution. The realization problem will be solved for single-input single-output (SISO) linear fractional systems with the proper transfer function

$$T(s) = \frac{b_n (s^\alpha)^n + b_{n-1} (s^\alpha)^{n-1} + \dots + b_1 s^\alpha + b_0}{(s^\alpha)^n - a_{n-1} (s^\alpha)^{n-1} - \dots - a_1 s^\alpha - a_0}. \quad (45)$$

Using (44) we obtain
$$D = \lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = b_n \quad (46)$$

and the strictly proper transfer function has the form

$$T_{sp}(s) = T(s) - D = \frac{\bar{b}_{n-1} (s^\alpha)^{n-1} + \bar{b}_{n-2} (s^\alpha)^{n-2} + \dots + \bar{b}_1 s^\alpha + \bar{b}_0}{(s^\alpha)^n - a_{n-1} (s^\alpha)^{n-1} - \dots - a_1 s^\alpha - a_0}, \quad (47)$$

where
$$\bar{b}_k = b_k + a_k b_n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (48)$$

From (48) it follows that if $a_k \geq 0$ and $b_k \geq 0$ for $k = 0, 1, \dots, n$ then also $\bar{b}_k \geq 0$ for $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Theorem 9. There exist positive fractional minimal realizations of the forms

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (49a,b)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\bar{b}_0 \quad \bar{b}_1 \quad \dots \quad \bar{b}_{n-1}], \quad D = b_n \quad C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], \quad D = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \bar{b}_{n-1} \\ \vdots \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_0 \end{bmatrix}, \quad (49c,d)$$

$$C = [\bar{b}_{n-1} \quad \dots \quad \bar{b}_1 \quad \bar{b}_0], \quad D = b_n \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = \bar{b}_n$$

of the transfer function (45) if a) $b_k \geq 0$ for $k=0,1,\dots,n$, b) $a_k \geq 0$ for $k=0,1,\dots,n-2$ and $b_{n-1} + a_{n-1}b_n \geq 0$.

Proof. Taking into account that for (49) $\det[I_n s^\alpha - A] = (s^\alpha)^n - a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} - \dots - a_1 s^\alpha - a_0$ and $\text{Adj}[I_n s^\alpha - A]B = [1 \quad s^\alpha \quad \dots \quad (s^\alpha)^{n-1}]$ it is easy to verify that

$$C[I_n s^\alpha - A]^{-1}B = \frac{C \text{Adj}[I_n s^\alpha - A]B}{\det[I_n s^\alpha - A]} = \frac{\bar{b}_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \bar{b}_{n-2}(s^\alpha)^{n-2} + \dots + \bar{b}_1 s^\alpha + \bar{b}_0}{(s^\alpha)^n - a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} - \dots - a_1 s^\alpha - a_0}.$$

The matrix A is Metzler matrix if and only if $a_k \geq 0$ for $k=0,1,\dots,n-2$ and arbitrary a_{n-1} . Note that the coefficient of matrices C and D are nonnegative if the conditions a) is met and $\bar{b}_{n-1} = b_{n-1} + a_{n-1}b_n \geq 0$. The proof for (49b), (49c) and (49d) are similar (dual). The matrices (49) are minimal realizations if and only if the transfer function (45) is irreducible. If the conditions of Theorem 9 are satisfied then the positive minimal realizations (49) of the transfer function (45) can be computed by use of the following procedure.

Procedure. *Step 1.* Knowing $T(s)$ and using (46) find D and the strictly proper function (47). *Step 2.* Using (49) find the desired realizations.

Example 5. Find the positive minimal fractional realizations (49) of the irreducible transfer function

$$T(s) = \frac{2(s^\alpha)^2 + 5s^\alpha + 1}{(s^\alpha)^2 + 2s^\alpha - 3}. \quad (50)$$

Using Procedure and (50) we obtain the following. *Step 1.* From (46) and (50) we obtain

$$D = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2(s^\alpha)^2 + 5s^\alpha + 1}{(s^\alpha)^2 + 2s^\alpha - 3} = 2 \quad \text{and} \quad T_{sp}(s) = T(s) - D = \frac{s^\alpha + 7}{(s^\alpha)^2 + 2s^\alpha - 3}. \quad (51,52)$$

Step 2. Taking into that in this case $\bar{b}_0 = 7$, $\bar{b}_1 = 1$ and using (49) we obtain the desired positive minimal fractional realizations

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [7 \quad 1], \quad D = 2; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 2; \quad (53a,b)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 7], \quad D = 2; \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 2. \quad (53c,d)$$

An extension of this method for multi-input multi-output positive fractional continuous-time linear systems has been given in [11]. The presented method can be easily extended for positive fractional discrete-time linear systems.

Cone Fractional Discrete Time Systems And Their Reachability.

Definition 7. Let $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ be nonsingular and p_k be the k -th ($k=1,\dots,n$) its row.

The set
$$P := \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : \bigcap_{k=1}^n p_k x \geq 0 \right\} \quad (54)$$

is called a linear cone generated by the matrix P.

In a similar way we may define for the inputs u the linear cone

$$Q := \left\{ u \in \mathfrak{R}^m : \bigcap_{k=1}^m q_k u \geq 0 \right\} \quad (55)$$

generated by the nonsingular matrix $Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and for the outputs y , the linear cone

$$V := \left\{ y \in \mathfrak{R}^p : \bigcap_{k=1}^p v_k y \geq 0 \right\} \quad (56)$$

generated by the nonsingular matrix $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$.

Definition 8. The fractional system (22) is called (P, Q, V) cone fractional system if $x_k \in P$ and $y_k \in V$, $k \in Z_+$ for every $x_0 \in P$, $u_k \in Q$, $k \in Z_+$.

The (P, Q, V) cone fractional system (4) will be shortly called the cone fractional system. Note that if $P = \mathfrak{R}_+^n$, $Q = \mathfrak{R}_+^m$, $V = \mathfrak{R}_+^p$ then the $(\mathfrak{R}_+^n, \mathfrak{R}_+^m, \mathfrak{R}_+^p)$ cone system is equivalent to the classical positive system [2, 5].

Theorem 10. The fractional system (22) is (P, Q, V) cone fractional system if and only if

$$\bar{A} = PAP^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}, \quad \bar{B} = PBQ^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, \quad \bar{C} = VCP^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{p \times n}, \quad \bar{D} = VDQ^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{p \times m} \quad (57)$$

Proof. Let $\bar{x}_k = Px_k$, $\bar{u}_k = Qu_k$ and $\bar{y}_k = Vy_k$, $k \in Z_+$. (58)

From Definition 8 it follows that if $x_k \in P$ then $\bar{x}_k \in \mathfrak{R}_+^n$, if $u_k \in Q$ then $\bar{u}_k \in \mathfrak{R}_+^m$ and if $y_k \in V$ then $\bar{y}_k \in \mathfrak{R}_+^p$. From (22) and (58) we have

$$\bar{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \bar{x}_{k-j+1} = Px_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} Px_{k-j+1} = PAx_k + PBu_k = PAP^{-1}\bar{x}_k + PBQ^{-1}\bar{u}_k = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}\bar{u}_k, \quad k \in Z_+$$

and $\bar{y}_k = Vy_k = VCx_k + VDQ^{-1}\bar{u}_k = VCP^{-1}\bar{x}_k + VDQ^{-1}\bar{u}_k = \bar{C}\bar{x}_k + \bar{D}\bar{u}_k, \quad k \in Z_+.$ (59a,b)

It is well-known [5] that the system (59) is the positive one if and only if the conditions (57) are satisfied.

Definition 9. A state $x_f \in P$ of the cone fractional system (22) is called reachable in q steps if there exists an input sequence $u_k \in Q$, $k = 0, 1, \dots, q-1$ which steers the state of the system from zero initial state ($x_0 = 0$) to the desired state x_f , i.e. $x_q = x_f$. If every state $x_f \in P$ is reachable in q steps then the cone fractional system is called reachable in q steps. If for every state $x_f \in P$ there exists a natural number q such that the state is reachable in q steps then the cone fractional system is called reachable.

Theorem 11. The cone fractional system (22) is reachable in q steps if and only if the matrix

$$\bar{R}_q = [PBQ^{-1}, P\Phi_1 BQ^{-1}, \dots, P\Phi_{q-1} BQ^{-1}] \quad (60)$$

contains n linearly independent monomial columns.

Proof. From the relations (58) it follows that if $x_k \in P$ then $\bar{x}_k = Px_k \in \mathfrak{R}_+^n$ and if $u_k \in Q$ then $\bar{u}_k = Qu_k \in \mathfrak{R}_+^m$ for $k \in Z_+$. Hence by Definition 8 and 9 the cone fractional system (22) is reachable in q steps if and only if the positive fractional system (59) is reachable in q steps.

Using (24) and (57) it is easy to show that $\bar{\Phi}_k$ of the system (59) with Φ_k of the system (22) are related by

$$\bar{\Phi}_k = P\Phi_k P^{-1} \text{ for } k = 0, 1, \dots \quad (61)$$

Taking into account that $\bar{\Phi}_k \bar{B} = P\Phi_k P^{-1} PBQ^{-1} = P\Phi_k BQ^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, q-1$ (62)

we may write

$$\begin{aligned} \bar{R}_q &= [\bar{B}, \bar{\Phi}_1 \bar{B}, \dots, \bar{\Phi}_{q-1} \bar{B}] = \\ &= [PBQ^{-1}, P\Phi_1 BQ^{-1}, \dots, P\Phi_{q-1} BQ^{-1}] \end{aligned} \quad (63)$$

By Theorem 8 the positive fractional system (59) is reachable in q steps if and only if the matrix (60) contain n linearly independent monomial columns.

Example 6. Consider the cone fractional system (22)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = [1], \quad (64)$$

for

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & a \\ 1 & a - \alpha + 1 \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

and for the following two forms of the matrix B

$$B_1 = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix}, \quad b > 0.$$

The P -cone generated by the matrix P is shown in Fig.. In case 1 we shall show that the cone fractional system is not reachable.

Using (57) and (64) we obtain

$$\begin{aligned} \bar{A}_d &= P(A + I_n \alpha)P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a > 0 \\ \bar{B}_1 &= PB_1 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b > 0 \end{aligned} \quad (65)$$

The system (59) with matrices (65) is a positive fractional system. Using (60) for $q = 2$, (64) and taking into account that $\Phi_1 = A_d$ we obtain

$$\bar{R}_2 = [PB_1 Q^{-1}, P\Phi_1 B_1 Q^{-1}] = P[B_1, A_d B_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & ab \\ b & (a+2)b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & 2(a+1)b \\ 0 & 2b \end{bmatrix}. \quad (66)$$

The matrix (66) contains only one (the first) monomial column. Thus by Theorem 11 the cone fractional system is unreachable.

$$\text{In case 2 we have} \quad \bar{B}_2 = PB_2 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2b \end{bmatrix}, \quad b > 0. \quad (67)$$

The system (59) with matrices \bar{A}_d and \bar{B}_2 given by (65) and (67) is also a positive fractional system. Using (60) and (64) we obtain the matrix

$$\bar{R}_2 = P[B_2, A_d B_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & ab \\ b & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2ab \\ 2b & 0 \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (68)$$

which contains two linearly independent monomial columns. Therefore, by Theorem 11 the cone fractional system is reachable.

The controllability to zero of the cone fractional discrete-time linear systems has been considered in [9].

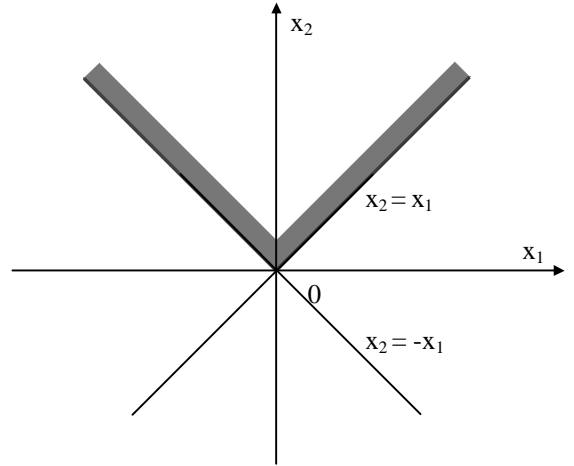
Positive Fractional 2d Linear Systems And Their Reachability And Their Reachability.

1. *Fractional 2D linear systems.* The positive fractional 2D linear systems have been introduced in [15, 16] and the positive 2D hybrid linear systems in [17].

Definition 10. The (α, β) orders fractional difference of and 2D function x_{ij} is defined by the formula

$$\Delta^{\alpha, \beta} x_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j c_{\alpha\beta}(k, l) x_{i-k, j-l}, \quad n-1 < \alpha < n, \quad n-1 < \beta < n, \quad n \in N = \{1, 2, \dots\}, \quad (69)$$

$$\text{where } \Delta^{\alpha, \beta} x_{ij} = \Delta_i^\alpha \Delta_j^\beta x_{ij} \text{ and } c_{\alpha, \beta}(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{for } k=0 \text{ or/and } l=0 \\ (-1)^{k+l} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k)\beta(\beta-1)\dots(\beta+1-l)}{k!l!} & \text{for } k+l > 0 \end{cases} \quad (70)$$



The justification of Definition 10 is given in [15].

Consider the (α, β) order 2D fractional linear system, described by the state equations

$$\Delta^{\alpha, \beta} x_{i+1, j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1} \quad y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij}, \quad (71a, b)$$

where $x_{ij} \in \mathfrak{R}^n$, $u_{ij} \in \mathfrak{R}^m$, $y_{ij} \in \mathfrak{R}^p$ are the state, input and output vectors and $A_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_k \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $k = 0, 1, 2$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

Using Definition 10 we may write the equation (71a) in the form

$$x_{i+1, j+1} = \bar{A}_0 x_{ij} + \bar{A}_1 x_{i+1, j} + \bar{A}_2 x_{i, j+1} - \sum_{\substack{k=0 \\ k+l>0}}^{i+1} \sum_{l=0}^{j+1} c_{\alpha\beta}(k, l) x_{i-k+1, j-l+1} + B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1}, \quad (72)$$

where $\bar{A}_0 = A_0 - I_n \alpha \beta$, $\bar{A}_1 = A_1 - I_n \beta$, $\bar{A}_2 = A_2 - I_n \alpha$.

From (69) it follows that the coefficients (70) in (69) strongly decrease when k and l increase. Therefore, in practical problems it is assumed that i and j are bounded by some natural numbers L_1 and L_2 . In this case (72) takes the form

$$x_{i+1, j+1} = \bar{A}_0 x_{ij} + \bar{A}_1 x_{i+1, j} + \bar{A}_2 x_{i, j+1} - \sum_{k=0}^{L_1+1} \sum_{l=0}^{L_2-k+1} c_{\alpha\beta}(k, l) x_{i-k+1, j-l+1} + B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1}. \quad (73)$$

Note that the fractional systems are 2D linear systems with delays increasing with i and j .

The boundary conditions for the equation (72) and (73) are given in the form

$$x_{i0}, i \in Z_+ \quad \text{and} \quad x_{0j}, j \in Z_+. \quad (74)$$

Theorem 12. The solution of equation (72) with boundary conditions (74) is given by

$$\begin{aligned} x_{ij} = & \sum_{p=1}^i T_{i-p, j-1} (\bar{A}_1 x_{p0} + B_1 u_{p0}) + \sum_{q=1}^j T_{i-1, j-q} (\bar{A}_2 x_{0q} + B_2 u_{0q}) + \sum_{p=1}^{i-1} T_{i-p-1, j-1} \bar{A}_0 x_{p0} + \\ & + \sum_{q=1}^{j-1} T_{i-1, j-q-1} \bar{A}_0 x_{0q} + T_{i-1, j-1} \bar{A}_0 u_{00} + \sum_{p=0}^{i-1} \sum_{q=0}^{j-1} T_{i-p-1, j-q-1} B_0 u_{pq} + \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^j (T_{i-p-1, j-q-1} B_1 + T_{i-p, j-q-1} B_2) u_{pq} \end{aligned} \quad (75)$$

where the transition matrices T_{pq} are defined by the formula

$$T_{pq} = \begin{cases} I_n & \text{for } p = q = 0 \\ \bar{A}_0 T_{p-1, q-1} + \bar{A}_1 T_{p, q-1} + \bar{A}_2 T_{p-1, q} - \sum_{\substack{k=0 \\ k+l < p+q-2}}^p \sum_{l=0}^q c_{\alpha, \beta}(p-k, q-l) T_{kl} & \text{for } p+q > 0 \\ 0 \text{ (zero matrix)} & \text{for } p < 0 \text{ or/and } q < 0 \end{cases} \quad (76)$$

Proof is given in [16]. Let

$$\bar{G}(z_1, z_2) = I_n + \sum_{k=0}^{L_1+1} \sum_{l=0}^{L_2+1} I_n c_{\alpha\beta}(k, l) z_1^{-k} z_2^{-l} - \bar{A}_0 z_1^{-1} z_2^{-1} - \bar{A}_1 z_2^{-1} - \bar{A}_2 z_1^{-1} \quad (77)$$

and

$$\det \bar{G}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} a_{N_1-k, N_2-l} z_1^{-k} z_2^{-l}. \quad (78)$$

It is assumed that i and j are bounded by some natural numbers L_1, L_2 which determined the degrees N_1, N_2 .

Theorem 13. Let (78) be the characteristic polynomial of the system (71). Then the matrices T_{kl}

$$\text{satisfy the equation} \quad \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} a_{kl} T_{kl} = 0. \quad (79)$$

Proof is given in [16].

Theorem 13 is an extension of the well-known classical Cayley-Hamilton theorem for the 2D fractional system (71).

2. Positivity of the fractional 2D systems

Lemma 4. [16]

a) If $0 < \alpha < 1$ and $1 < \beta < 2$ then $c_{\alpha\beta}(k,l) < 0$ for $k = 1, 2, \dots; l = 2, 3, \dots$ (80a)

b) If $1 < \alpha < 2$ and $0 < \beta < 1$ then $c_{\alpha\beta}(k,l) < 0$ for $k = 2, 3, \dots; l = 1, 2, \dots$ (80b)

Lemma 5. [16] If (80) is met and $\bar{A}_k \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}$ for $k = 0, 1, 2,$ (81)

then $T_{pq} \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}$ for $p, q \in Z_+.$ (82)

Definition 11. The system (71) is called the (internally) positive 2D fractional system if and only if $x_{ij} \in \mathfrak{R}_+^n$ and $y_{ij} \in \mathfrak{R}_+^p, i, j \in Z_+$ for any boundary conditions $x_{i0} \in \mathfrak{R}_+^n, i \in Z_+, x_{0j} \in \mathfrak{R}_+^n, j \in Z_+$ and all input sequences $u_{ij} \in \mathfrak{R}_+^m, i, j \in Z_+.$

Theorem 14. The 2D fractional system (71) for $0 < \alpha < 1$ and $1 < \beta < 2$ is positive if and only if

$$\bar{A}_k \in \mathfrak{R}_+^{n \times n}, B_k \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, k = 0, 1, 2, C \in \mathfrak{R}_+^{p \times n}, D \in \mathfrak{R}_+^{p \times m}. \quad (83)$$

Proof is given in [16].

Remark 6. From (70) and (71) it follows that if $\alpha = \beta, 0 < \alpha < 1$ then $c_{\alpha\beta}(k,l) < 0$ for $k = l = 1, 2, \dots$ and the fractional 2D system (71) is not positive.

3. Reachability of the positive fractional 2D systems.

Definition 12. The positive 2D fractional system (71) is called reachable at the point $(h,k) \in Z_+ \times Z_+$ if and only if for zero boundary conditions (74) ($x_{i0} = 0, i \in Z_+, x_{0j}, j \in Z_+$) and every vector $x_f \in \mathfrak{R}_+^n$ there exists a sequence of inputs $u_{ij} \in \mathfrak{R}_+^m$ for

$$\begin{aligned} (i, j) \in D_{hk} = \{ (i, j) \in Z_+ \times Z_+ : 0 \leq i \leq h, \\ 0 \leq j \leq k, i + j \neq h + k \} \end{aligned} \quad (84)$$

such that $x_{hk} = x_f.$ A vector is called monomial if and only if its one component is positive and the remaining components are zero.

Theorem 15. The positive 2D fractional system (71) is reachable at the point (h,k) if and only if the reachability matrix

$$\begin{aligned} R_{hk} = [M_0, M_1^1, \dots, M_{h2}^1, M_1^2, \dots, M_k^2, M_{11}, \dots, M_{1k}, M_{21}, \dots, M_{hk}] \\ M_0 = T_{h-1, k-1} B_0, M_i^1 = T_{h-i, k-1} B_1 + T_{h-i-1, k-1} B_0, i = 1, \dots, h \\ M_j^2 = T_{h-1, k-1} B_2 + T_{h-1, k-j-1} B_0, j = 1, \dots, k \\ M_{ij} = T_{h-i-1, k-j-1} B_0 + T_{h-i, k-j-1} B_1 + T_{h-i-1, k-1} B_2, i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (85,86)$$

contains n linearly independent monomial columns.

Proof. Using the solution (75) for $i = h, j = k$ and zero boundary conditions we obtain

$$x_f = R_{hk} u(h, k), \quad (87)$$

where $u(h, k) = [u_{00}^T, u_{10}^T, \dots, u_{h0}^T, u_{01}^T, \dots, u_{0k}^T, u_{11}^T, \dots, u_{1k}^T, u_{21}^T, \dots, u_{hk}^T]^T$ (88)

and T denotes the transpose.

For the positive 2D fractional system (71) from (86) and (85) we have $M_0 \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, M_i^1 \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, M_j^2 \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, M_{ij} \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}, i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, h$ and $R_{hk} \in \mathfrak{R}_+^{n \times [(h+1)(k+1)-1]m}.$ From (87) it follows that there exists a sequence $u_{ij} \in \mathfrak{R}_+^m$ for $(i, j) \in D_{hk}$ for every $x_f \in \mathfrak{R}_+^n$ if and only if the matrix (85) contains n linearly independent monomial columns.

The following theorem gives sufficient conditions for the reachability of the positive 2D fractional system (71).

Theorem 16. The positive 2D fractional system (71) is reachable at the point (h,k) if $\text{rank } R_{hk} = n$ and the right inverse R_{hk}^r of the matrix (85) has nonnegative entries

$$R_{hk}^r = R_{hk}^T [R_{hk} R_{hk}^T]^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{[(h+1)(k+1)-1]m \times n}. \quad (89)$$

Proof. If $\text{rank } R_{hk} = n$ then there exists the right inverse R_{hk}^r of the matrix R_{hk} . If the condition (89) is met then from (87) we obtain $u(h, k) = R_{hk}^r x_f \in \mathfrak{R}_+^{[(h+1)(k+1)-1]m}$ for every $x_f \in \mathfrak{R}_+^n$.

Example 7. Consider the positive 2D fractional system (71) with

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (90)$$

To check the reachability at the point $(h, k) = (1, 1)$ of the system we use Theorem 15. From (86) and (85) we obtain

$$M_0 = B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, M_1^1 = B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, M_1^2 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, M_{ij} = 0 \text{ for } i \geq 1, j \geq 1,$$

$$R_{11} = [M_0, M_1^1, M_1^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (91)$$

The first two columns of (91) are linearly independent monomial columns and by Theorem 15 the positive 2D fractional system (71) with (90) is reachable at the point $(1, 1)$. The sequence of inputs steering the state of the system from zero boundary conditions to an arbitrary state $x_f \in \mathfrak{R}_+^2$ at the point $(1, 1)$ is given by $\begin{bmatrix} u_{00} \\ u_{10} \end{bmatrix} = x_f$ and $u_{01} = 0$. Using (89) and (91) we obtain

$$R_{hk}^r = R_{hk}^T [R_{hk} R_{hk}^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (92)$$

From (92) it follows that the condition (89) is not satisfied in spite of the fact that the system is reachable at the point $(1, 1)$. Note that the system is reachable at the point $(1, 1)$ for any fractional order (α, β) $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$ (or $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 1$) and any matrices \bar{A}_k , $k = 0, 1, 2$.

Necessary and sufficient conditions for the controllability to zero of positive fractional 2D linear systems have been established in [16].

Concluding remarks and open problems. An overview of some recent developments and new results in the theory of fractional positive and cone 1D and 2D linear system have been given. The state equations and their solutions for fractional continuous-time and discrete-time linear systems have been proposed. Necessary and sufficient conditions for the internal and external positivity and reachability of the systems have been established. The realization problem for positive fractional continuous-time linear systems has been formulated and solved. A new class of cone fractional discrete-time linear systems has been introduced. The positive fractional 2D linear systems have been also introduced and their reachability has been investigated. From the long list of the open problems in the fractional systems theory the following are the natural steps:

- 1D and 2D fractional linear systems with delays,
- Positive 1D and 2D fractional linear systems with delays,
- Positive fractional 2D hybrid systems with and without delays,
- Standard and positive 2D fractional continuous-time systems,
- Standard and positive 1D and 2D nonlinear systems.

This work was supported by Ministry of Science and Higher Education in Poland under work No NN514 1939 33.

1. Engheta N. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory.// IEEE Trans. Atenn. Prop. – Vol. 39. – 1997. – №4. – Pp. 35–46.

2. Farina L, Rinaldi S. Positive Linear Systems; Theory and Applications. – New York, J. Wiley 2000.

3. *Ferreira N.M.F, Machado J.A.T.* Fractional-order hybrid control of robotic manipulators.// Proc. 11th Int. Conf. Advanced Robotics, ICAR'2003, Coimbra, Portugal. Pp. 393–398.
4. *Galkowski K., Kummert A.* Fractional polynomials and nD systems.// Proc IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, ISCAS'2005, Kobe, Japan, CD-ROM.
5. *Kaczorek T.* Positive 1D and 2D Systems. – London, Springer-Verlag, 2002.
6. *Kaczorek T.* Computation of realizations of discrete-time cone systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Vol. 54. – 2006. – № 3. – Pp. 347–350.
7. *Kaczorek T.* Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems. // Machine Intelligence and Robotic Control.– 2007. – №4.
8. *Kaczorek T.* Reachability and controllability to zero of cone fractional linear systems // Archives of Control Sciences. – Vol. 17. – 2007. – № 3. – Pp. 357–367.
9. *Kaczorek T.* Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – Vol. 18. – 2008. – № 2. – Pp. 223–228.
10. *Kaczorek T.* Realization problem for fractional continuous-time systems // Archives of Control Sciences. – Vol.18. – № 1. – 2008. – Pp. 5–20.
11. *Kaczorek T.* Realization problem for positive fractional linear systems. // Inter. J. Factory Automation, 2008.
12. *Kaczorek T.* Realization problem for positive fractional hybrid 2D linear systems. // COMPEL. –2008. – Vol.27. – № 3. – Pp. 613–623.
13. *Kaczorek T.* Fractional 2D linear systems. // Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems. –2008. – Vol.2. – №2. – Pp. 1–5.
14. *Kaczorek T.* Positive 2D fractional linear systems. – COMPEL, 2008.
15. *Kaczorek T.* Positive different orders fractional 2D linear systems. // Acta Mechanica et Automatica. – 2008. – Vol. 2. – № 2.
16. *Kaczorek T.* Positive fractional 2D hybrid linear systems. – MELECON, 2008 (in Press).
17. *Kaczorek T.* Fractional positive linear systems and electrical circuits. // Proc. Inter. Conf. Fund. of Electrotech. and Circ. Theory. Ustron, 28–31.05.2008. – Pp. 3–11.
18. *Klamka J.* Positive controllability of positive systems. // Proc. of American Control Conference, ACC-2002, Anchorage, (CD-ROM).
19. *Klamka J.* Approximate constrained controllability of mechanical systems // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 43. – № 3. – Pp. 539–554.
20. *Miller K.S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – New York, Willey, 1993.
21. *Ostalczyk P.* The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis. // Int. J. Syst, Sci. – 2000. – Vol. 31. – №12. – Pp. 1551–1561.
22. *Oustaloup A.* La dérivation non entière. – Paris: Hermés, 1995.
23. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – San Diego: Academic Press, 1999.
24. *Samko S. G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and derivative. Theory and Applications. – London: Gordon&Breac, 1993.
25. *Shantanu Das* Funichtonal. Fractionsl Calculus for Systems Iedntyfications and Control. – Berlin, Springer, 2008.
26. *Sierociuk D., Dzieliński D.* Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. // Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. – 2006. – Vol.16. – №1. – Pp. 129–140.

Надійшла 25.06.2009

УДК 681.511.4

С.М.Пересада, докт.техн.наук, **С.Н.Ковбаса**, канд.техн.наук, **В.С.Бовкунович** (Нац. техн. ун-т України «КПІ», Київ)

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ КОСВЕННОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ МОМЕНТОМ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Разработана методика и представлены результаты сравнительного экспериментального тестирования алгоритмов векторного управления моментом и потокосцеплением асинхронного двигателя, которые позволяют косвенно оценить показатели качества отработки момента асинхронного двигателя, а также свойства грубости к вариациям активного сопротивления ротора. Показано, что использование алгоритма грубого векторного управления по сравнению со стандартным позволяет в условиях вариаций активного сопротивления ротора стабилизировать показатели качества регулирования моментом и модуля вектора потокосцепления, а также энергетической эффективности на номинальном уровне.

Розроблено методику та представлено результати порівняльного експериментального тестування алгоритмів векторного керування моментом і потокозчепленням асинхронного двигуна, які дають змогу оцінити показники якості відпрацювання моменту асинхронного двигуна, а також властивості грубості до варіацій активного опору ротора за непрямыми ознаками. Показано, що застосування алгоритму грубого векторного керування у порівнянні зі стандартним дозволяє в умовах варіацій активного опору ротора стабілізувати показники якості керування моментом та енергетичної ефективності на номінальному рівні.

Введение. Полномасштабные сравнительные экспериментальные исследования являются завершающим этапом проектирования сложных нелинейных систем управления, к которым относятся электроприводы с векторно-управляемыми асинхронными двигателями. Принципиальность этого этапа состоит в том, что на уровне исследования методом математического моделирования трудно учесть все возмущающие факторы, которыми пренебрегают при аналитическом синтезе. К ним относятся неидеальности инвертора, эффекты квантования, параметрическая неопределенность, неидеальность датчиков, измерительные шумы.

Современная технология проведения экспериментальных исследований обычно включает два этапа: первый на основе концепции быстрого прототипного тестирования (Rapid prototyping [5], см. также изделия фирмы d-Space [10]), в то время как на втором предполагается использование управляющего контроллера, который применяется в конечном изделии. Технические средства станций быстрого прототипного тестирования [3] позволяют приблизить время, необходимое для проведения экспериментов, до существующего при математическом моделировании за счет возможностей высокопроизводительного счетного ядра на основе быстродействующих цифровых сигнальных процессоров и специализированного программного обеспечения для реализации алгоритмов, автоматизации экспериментов, сохранения данных и их визуализации. На этом этапе проверяются показатели качества управления в условиях, максимально приближенных к реальным, однако такие исследования не требуют значительных временных затрат. Если исследуемый алгоритм обеспечивает требуемое качество процессов управления, то его реализация и дальнейшее тестирование осуществляется на используемом в серийном изделии управляющем контроллере, который, как правило, имеет меньшие счетные возможности, может использовать целочисленную арифметику и, соответственно, более сложен в программировании.

Методические аспекты проведения сравнительных исследований сложных нелинейных систем предполагают выбор базового объекта для сравнения и разработку методики тестирования так, чтобы исследования осуществлялись в идентичных для сравниваемых вариантов условиях. При ис-

следовании систем векторного управления АД общепринятой для сравнения является стандартная система косвенного векторного управления (IFOC – Indirect Field Oriented Control), практически реализованная во многих коммерческих изделиях, де-факто являющаяся промышленным стандартом и обладающая известными для специалистов характеристиками (см. анализ свойств в [7]). Один из возможных вариантов методики проведения сравнительных исследований систем векторного управления АД дан в [7]. В этой же работе представлены результаты полномасштабного сравнительного тестирования IFOC и улучшенного косвенного векторного управления (I-IFOC – Improved Indirect Field Oriented Control), которое впервые предложено авторами в [1,4,8]. Дальнейшее развитие общетеоретического результата [1,4,8] дано в [2]. Алгоритм грубого (робастного) косвенного векторного управления (R-IFOC – Robust Indirect Field Oriented Control) [2] эффективен не только при управлении механическими координатами (угловой скоростью и положением), но и моментом АД при отсутствии коррекции его заданного значения регуляторами внешних контуров управления.

В настоящей статье представлены результаты комплексного сравнительного исследования динамических показателей качества управления и свойств грубости в отношении вариаций активного сопротивления ротора систем косвенного векторного управления АД, построенных на основе алгоритмов IFOC [7] и R-IFOC [2].

Экспериментальные установки и методика тестирования. Тестирование алгоритмов векторного управления моментом АД, основанных на IFOC и R-IFOC, выполнено с использованием двух экспериментальных установок: 1) станции быстрого прототипного тестирования (с АД мощностью 0.75 кВт), построенной на базе 32-х разрядного цифрового сигнального процессора с плавающей запятой [3]; 2) экспериментального образца асинхронного электропривода мощностью 2.2 кВт, управляющий контроллер которого выполнен на основе 16-разрядного целочисленного сигнального процессора.

Параметры асинхронных двигателей, входящих в состав первой и второй установок, приведены в таблице (I_n – номинальный ток статора; p_n – число пар полюсов; R_{1n}, R_{2n} и L_1, L_2 – сопротивления и индуктивности статора и ротора соответственно; L_m – индуктивность намагничивающего контура; J_n – момент инерции двигателя).

P_n , кВт	I_n , А	p_n	R_{1n} , Ом	R_{2n} , Ом	L_1 , Г	L_2 , Г	L_m , Г	J_n , кг/м ²
0,75	2,1	1	11	5,51	0,95	0,95	0,91	0,003
2,2	5	2	3,2	2,5	0,28	0,28	0,271	0,015

Исследование точности отработки момента и потока ротора АД на станции быстрого прототипного тестирования производилось косвенным путем по динамическому поведению угловой скорости. Для этого алгоритм регулирования момента АД (16), (17), (18), (21) [2] был интегрирован в алгоритм регулирования скорости, то есть выход регулятора скорости формировал задание на момент M^* АД в виде

$$M^* = J(-k_{\omega}\tilde{\omega} + \hat{M}_c + \dot{\omega}^*), \quad \dot{\hat{M}}_c = -k_{\omega i}\tilde{\omega}, \quad (1)$$

где: $k_{\omega}, k_{\omega i}$ – коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих ПИ регулятора скорости; J – суммарный момент инерции; $\dot{\omega}^*$ – заданная угловая скорость вращения вала АД; $\tilde{\omega} = \omega - \omega^*$ – ошибка отработки скорости; \hat{M}_c – оцененный момент нагрузки.

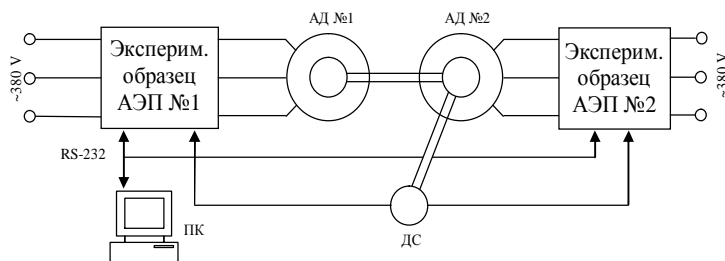


Рис. 1

При выполнении исследований использовался стандартный тест, включающий отработку заданной траектории изменения угловой скорости с последующим приложением ступенчатого момента нагрузки на участке движения с постоянной угловой скоростью.

Вторая серия тестов выполнена с использованием двух идентичных экспериментальных образцов векторно-управляемого асинхронного электропривода (АЭП). Управляющий контроллер АЭП реализован на целочисленном 16-разрядном цифровом сигнальном процессоре TMS320LF2406A [9]. Функциональная схема экспериментальной установки, на которой выполнялось тестирование, показанная на рис. 1, включает: два АД мощностью 2.2 кВт, валы которых связаны же-

стойкой муфтой; исследуемый АЭП №1, который работает в режиме регулирования момента и формирует момент нагрузки для АЭП №2; АЭП №2, работающий в режиме стабилизации угловой скорости с П-регулятором; фотоимпульсный датчик скорости (ДС) с разрешающей способностью 1024 имп/об; персональный компьютер (ПК) для визуализации протекающих процессов, а также для программирования контроллеров.

Для выполнения исследований были установлены: частота ШИМ инвертора 10 кГц, мертвое время – 3.2 мкс, которое компенсировалось с помощью алгоритма, рассмотренного в [6].

Для оценки точности обработки момента использовался косвенный метод, который заключается в следующем. Момент, создаваемый исследуемым АД №1, является моментом нагрузки для второй машины, работающей в режиме стабилизации скорости с П-регулятором (1), $k_{\omega i} = 0$. При этом ошибка обработки угловой скорости и моментный ток АЭП №2 в установившемся режиме являются величинами прямо пропорциональными развиваемому исследуемой машиной моменту и, поэтому, могут быть использованы для косвенной оценки показателей качества его обработки.

Результаты тестирования с использованием АД мощностью 0.75 кВт. При тестировании использовались следующие настройки алгоритмов IFOC [7] и R-IFOC [2]: коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих регулятора скорости — $k_{\omega} = 150$, $k_{\omega i} = 11250$; коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих регуляторов тока — $k_i = 700$, $k_{ii} = 122000$. Корректирующие коэффициенты подсистемы потока для R-IFOC приняты равными $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1$, коэффициент наблюдателя полевой компоненты тока статора — $k_1 = 700$.

Для сравнительного исследования использована стандартная последовательность операций управления [7]: – во время начального интервала времени $0 \div 0.25$ с машина возбуждается, траектория заданного потока начинается с $\psi^*(0) = 0.02$ Вб и достигает значения 0,92 Вб с первой производной, равной 3,52 Вб/с; – начиная с $t=0,6$ с двигатель без нагрузки разгоняется по заданной траектории скорости, которая имеет нулевое начальное значение и достигает 50 рад/с, с первой и второй производными, равными 714 рад/с² и 23810 рад/с³ соответственно; – в момент времени $t=0,8$ с к валу двигателя при-

кладывается постоянный момент нагрузки, равный номинальному значению.

Заданные траектории для скорости и потока показаны на рис. 2 сплошными линиями, а пунктирной линией показан профиль момента нагрузки.

Динамические характеристики. Динамическое поведение системы векторного управления при использовании R-IFOC в условиях отсутствия вариаций активного сопротивления ротора показано на рис. 3 для $\hat{\alpha} = \alpha_H = 5,8c^{-1}$. На рисунках индексы d и q используются для обозначения компонент вектора тока статора в системе координат (d-q), асимптотически ориентированной по вектору потокосцепления ротора, $\hat{\alpha} = \hat{R}_2 / L_2$ – оцененное значение, используемое в контроллере, $\alpha_H = R_{2H} / L_2$ – номинальное значение величины, обратной

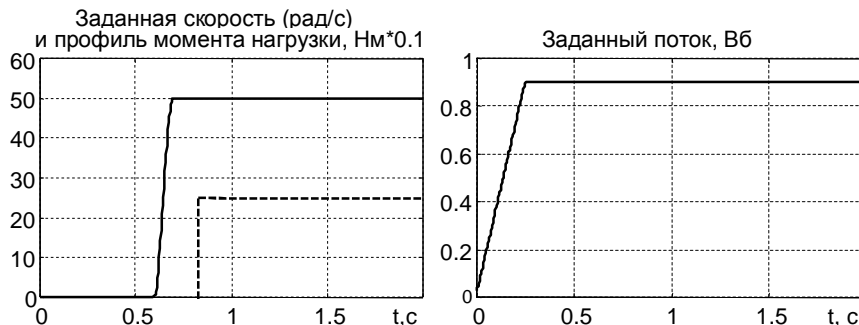


Рис. 2

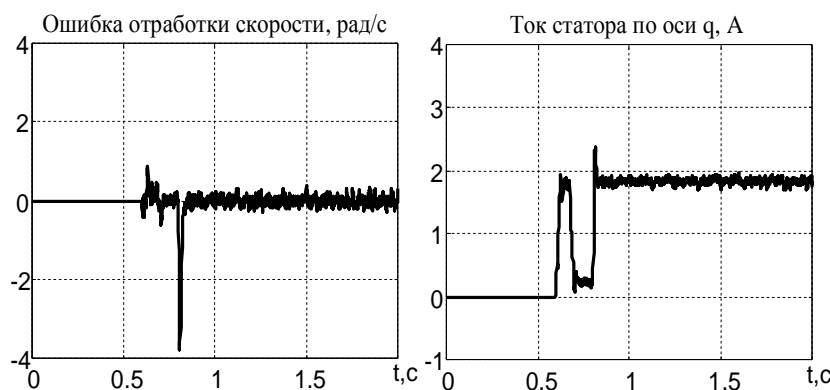


Рис. 3

постоянной времени роторной цепи.

Из рис. 3 видно, что при известных параметрах R-IFOC обеспечивает высокие показатели отработки заданных траекторий момента-потокосцепления, которые сопоставимы с полученными в работах [7], [4] для алгоритма I-IFOC, и являются более высокими по сравнению с достигаемыми при

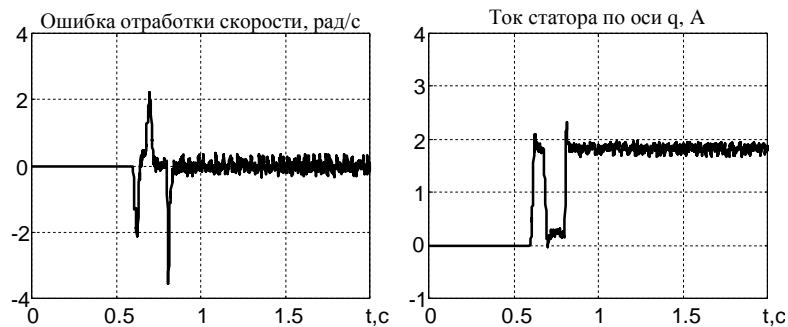


Рис. 4

с ошибкой, равной 2 рад/с, что, в основном, объясняется отсутствием заданного ускорения в регуляторе скорости (1). Динамическое поведение при компенсации постоянного номинального момента нагрузки одинаково для исследуемых вариантов.

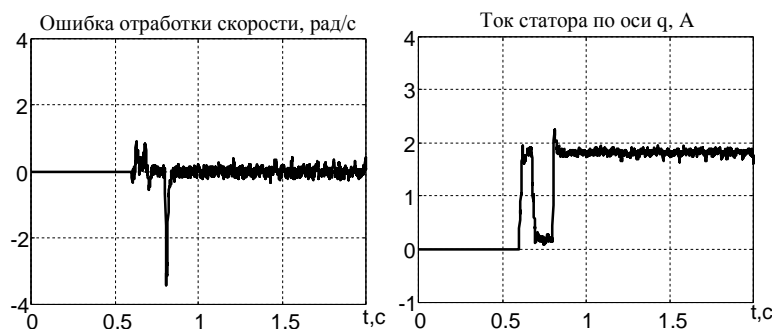


Рис. 5

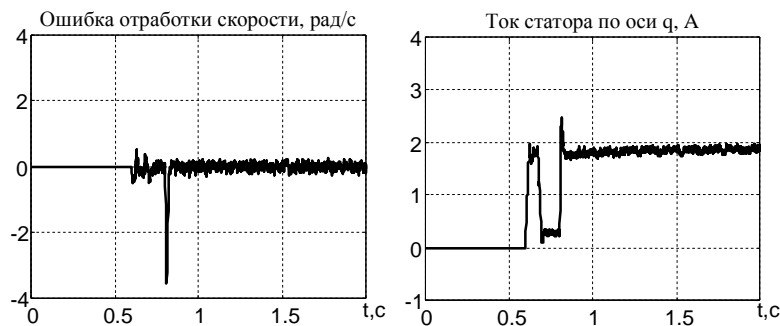


Рис. 6

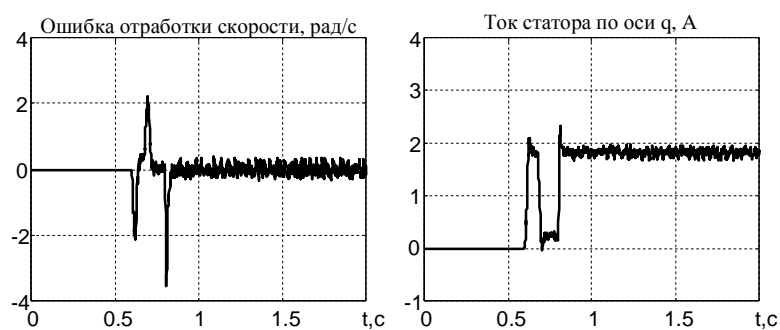


Рис. 7

IFOC в тех же условиях с $\hat{\alpha} = \alpha_H = 5,8c^{-1}$, (рис. 4). Ошибка отработки заданной траектории скорости при использовании R-IFOC находится примерно на нулевом уровне, максимальная динамическая ошибка отработки угловой скорости при набросе постоянного момента нагрузки составляет около 4 рад/с.

В условиях этого же теста при использовании IFOC отработка заданной траектории скорости происходит

Следующий набор тестов проводился для сравнения динамических характеристик исследуемых алгоритмов при вариации активного сопротивления ротора. Для этого изменялся параметр $\hat{\alpha}$ в управляющем контроллере. Результаты теста, полученные при $\hat{\alpha} = 2,5$ 1/с (43% от номинального значения, $\alpha_H = 5.8$) и $\hat{\alpha} = 10$ 1/с (172% от номинального значения) для R-IFOC показаны на рис. 5 и рис. 6, а для IFOC

– на рис. 7 и рис. 8 соответственно.

Из сравнения графиков переходных процессов при использовании R-IFOC, изображенных на рис. 3 и рис. 5, 6, видно, что как динамические показатели качества отработки угловой скорости, так и значения моментного тока АД практически не изменяются при указанных вариациях параметра $\hat{\alpha}$. В то же время для алгоритма IFOC при значении параметра $\hat{\alpha} = 10$ с⁻¹ наблюдается существенное ухудшение динамических показателей, а также увеличивается установившееся значение моментного тока статора примерно на 40% по сравнению со случаем номинальных параметров (рис. 4,7,8). При $\hat{\alpha} = 2,5$ 1/с существенных отличий по сравнению с переходными процессами при номинальном значении параметра $\hat{\alpha}$ не наблюдается за исключением некоторого

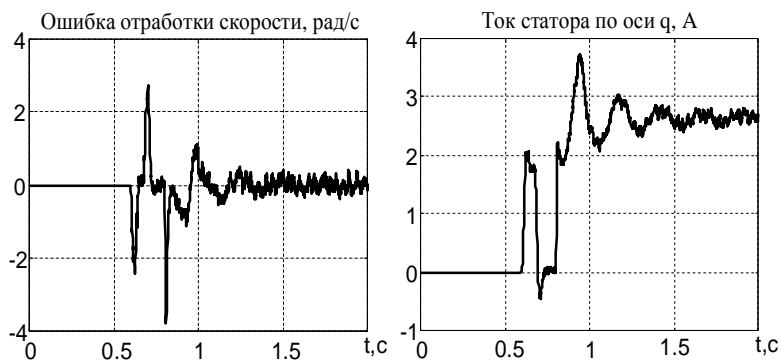


Рис. 8

ориентации по вектору потокосцепления ротора.

Следует также отметить, что показатели качества процессов, представленных на рис. 8 для ИФОС при $\hat{\alpha} = 10 \text{ 1/с}$, нельзя считать удовлетворительными для высокодинамических систем.

Исследование энергетических характеристик. Для сравнения энергетической эффективности процессов электромеханического преобразования энергии в установившемся режиме работы АД была проведена третья серия тестов. При изменении значения $\hat{\alpha}$ от 2.5 с^{-1} ($0,35 \alpha_H$) до 10 с^{-1} ($1,7 \alpha_H$) для каждого значения $\hat{\alpha}$ фиксировались установившиеся значения моментного тока i_q и выходной активной мощности инвертора при компенсации номинального момента нагрузки, что при скорости $\omega = 50 \text{ рад/с}$ соответствует механической мощности 125 Вт. Результаты экспериментов показаны на рис. 9, где ток i_q и активная мощность P_a , полученные при ИФОС, представлены пунктирной линией,

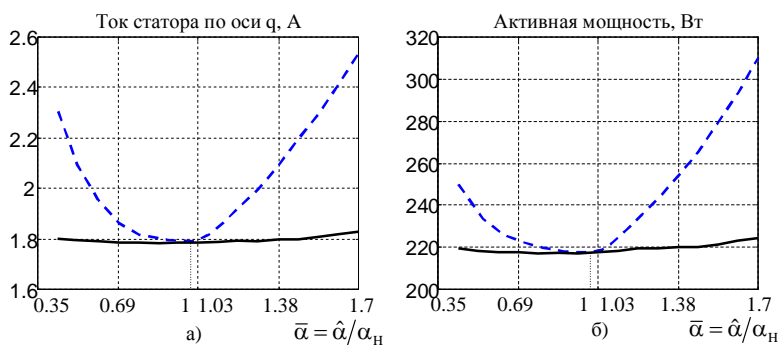


Рис. 9

а при R-ИФОС – непрерывной. Из приведенных графиков следует, что использование R-ИФОС даже при больших отклонениях параметра $\hat{\alpha}$ от номинального значения позволяет поддерживать моментную составляющую тока статора i_q на постоянном уровне, в то время как при ИФОС эта компонента значительно возрастает. Следовательно по сравнению со стандартным алгоритмом R-ИФОС гарантирует робастность регулирования вектора потокосцепления ротора (как по модулю так и по угловому положению). В результате этого в большинстве режимов работы для компенсации момента нагрузки необходим меньший ток. Как следует из рис. 9, б потери активной мощности в АД увеличиваются примерно в два раза для ИФОС при $\bar{\alpha} = 1.7$, в то время как при использовании R-ИФОС энергетическая эффективность практически сохраняется на номинальном уровне.

Результаты тестирования на экспериментальном образце АЭП мощностью 2.2 кВт.

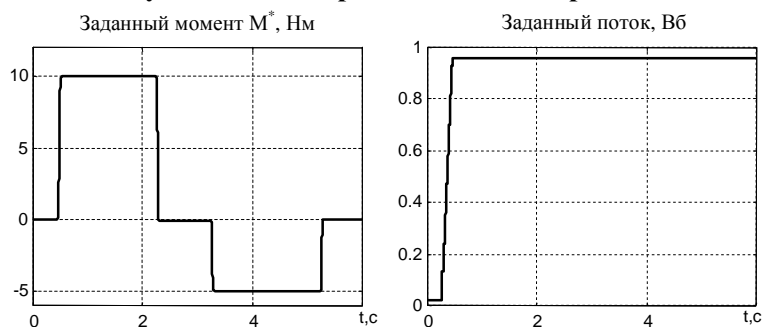


Рис.10

увеличения моментной составляющей тока для получения того же момента.

Как показано в [7], некорректное значение сопротивления ротора $\hat{\alpha} > \alpha_H$ приводит к уменьшению модуля вектора потокосцепления, в то время как при использовании $\hat{\alpha} < \alpha_H$ модуль вектора потокосцепления увеличивается, что приводит к насыщению магнитной системы АД, из-за чего АД работает почти с постоянным модулем магнитного потока, но с нарушением условий асимптотической

а при R-ИФОС – непрерывной.

Для тестирования применялась следующая последовательность управления АД: – угловая скорость стабилизируется системой векторного управления АД №2 на уровне 50 рад/с при отсутствии момента нагрузки; – в начальный момент времени происходит возбуждение АД №1 с использованием заданной траектории потокосцепления, начиная со значения

0,02 Вб и заканчивая 0,96 Вб, при этом задание на момент равно нулю;

– через 0,5 с после начала возбуждения от двигателя требуется отработать заданную траекторию момента АД с ограниченной первой производной.

Заданные траектории момента и потока показаны на рис. 10. Коэффициенты регуляторов для IFOC [7] и R-IFOC [2] установлены такими:

$k_i = 500$, $k_{ii} = 125000$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1$, $k_1 = 500$. Коэффициент пропорциональной составляющей регулятора скорости (1) АЭП №2 принят равным $k_{\omega} = 50$, ($k_{\omega i} = 0$).

Исследование динамических характеристик. Графики переходных процессов при R-IFOC с известными параметрами АД показаны на рис. 11. Отметим, что регулятор момента (17) [2], который входит в структуру как грубого R-IFOC, так и стандартного IFOC алгоритмов векторного управления, не зависит от активного сопротивления ротора. Следовательно, заданный моментный ток статора при вариациях активного сопротивления ротора остается неизменным, а поскольку он обрабатывается с помощью ПИ-регулятора тока, то динамика реального тока также остается примерно неизменной для каждого из алгоритмов управления. Поэтому оценить точность обработки момента по внутренним переменным (токам статора) при неизмеряемом магнитном потоке не представляется возможным.

Для косвенной оценки точности обработки момента АД на рис. 12,13 показаны зависимости ошибки обработки угловой скорости и моментного тока АД №2 (рис. 1), которые снимались при обработке положительного участка заданной траектории момента исследуемой машиной для трех случаев:

- а) $\hat{\alpha} = \alpha_H = 8,93c^{-1}$,
- б) $\hat{\alpha} = 0,5\alpha_H = 4,47c^{-1}$,
- с) $\hat{\alpha} = 2\alpha_H = 17,86c^{-1}$.

Как следует из рис. 12,а и рис. 13,а, при известных параметрах АД №1 $\hat{\alpha} = \alpha_H = 8,93c^{-1}$ установившиеся значения ошибок обработки скорости и моментных компонент тока статора АД №2 равны 16 рад/с и 3.2 А соответственно, а динамическое поведение переменных АД №2 мало отличаются для каждого из исследуемых алгоритмов.

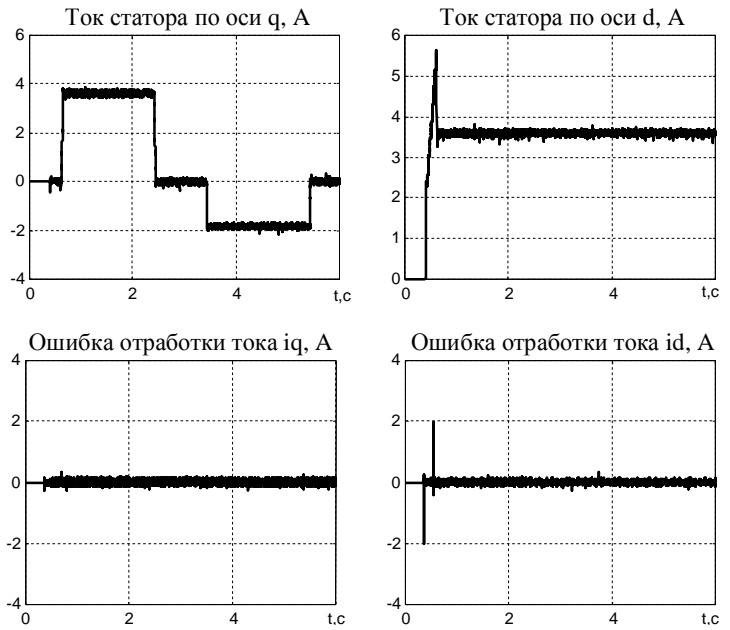


Рис. 11

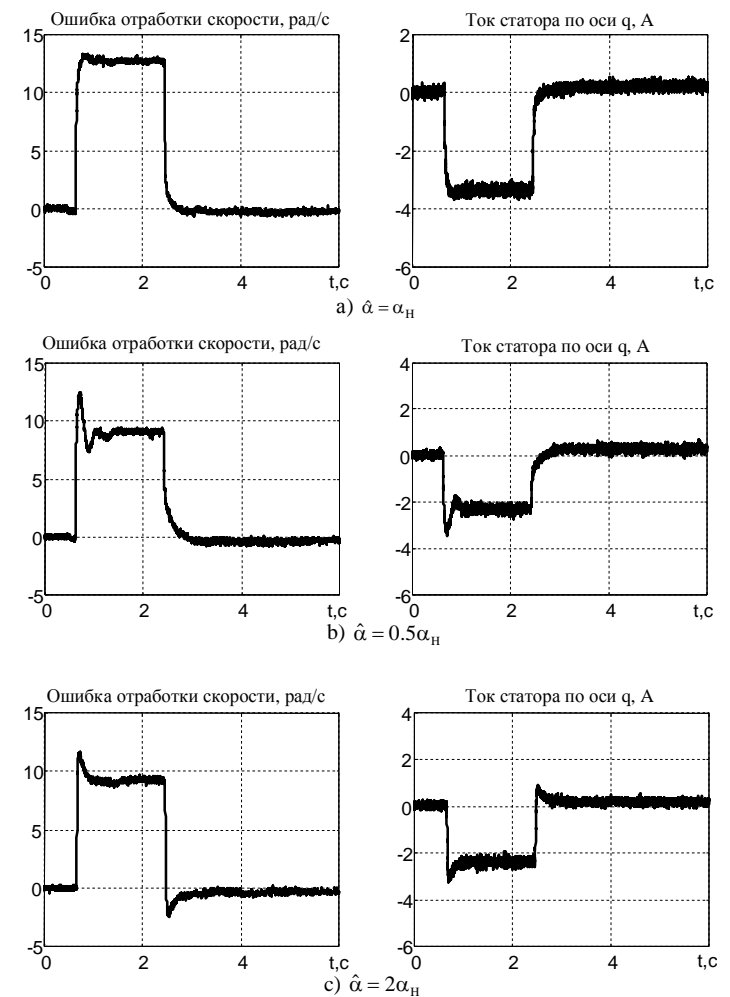


Рис. 12

Из сравнения графиков рис. 12, а, б, с видно, что при значениях параметра $\hat{\alpha} \neq \alpha_H$ показатели качества отработки момента существенно деградируют, в моменте АД появляются колебания, ошибка отработки момента составляет до 35% от заданного значения 10 Нм. В этих же условиях R-IFOC (рис. 13) гарантирует стабилизацию показателей качества регулирования момента и вектора потокосцепления ротора.

Статические характеристики. Для сравнения статической точности отработки момента при вариациях активного сопротивления ротора грубым и стандартным алгоритмами управления выполнена серия тестов по следующей методике:

– задавалась вариация активного сопротивления ротора в управляющем контроллере АЭП №1 в диапазоне $\bar{\alpha} = \hat{\alpha} / \alpha_H \in [0,5; 2]$; при $\bar{\alpha} = 1$ – в алгоритме управления АЭП №2;

– выполнялась серия тестов, описанных в предыдущем пункте;

– при отработке постоянного заданного момента, равного 10 Нм, фиксировались значения ошибок отработки скорости и значения моментной компоненты тока статора АД №2.

Зависимости моментной составляющей тока статора и ошибки отработки скорости АД №2 от вариации активного сопротивления ротора (параметра $\bar{\alpha}$) в контроллере исследуемой машины представлены на рис. 14, где зависимость для

IFOC представлена пунктирной линией, а для R-IFOC – сплошной.

Из анализа графиков, показанных на рис. 14, устанавливаем, что при известных параметрах АД №1 ($\bar{\alpha} = 1$), исследуемая машина развивает момент, соответствующий значению моментного тока АД №2, равного 3.2 А, как при использовании IFOC, так и R-IFOC.

В этом режиме момент АД отрабатывается без ошибки, поэтому коэффициент момента АД №2 равен $k_m = M^* / i_q = 10 / 3.2 = 3.125$ Нм/А. С

использованием этого коэффициента на рис. 15 показаны графики зависимости ошибки отработки момента исследуемого АД от вариации $\bar{\alpha}$ (IFOC – пунктирной линией, R-IFOC – сплошной). Как видно, в условиях вариаций активного сопротивления ротора на уровне +100% –50% от номинального значения ошибка отработки момента АД при использовании R-IFOC примерно в 6–7 раза меньше, чем в случае IFOC.

Выводы. Разработана методика тестирования алгоритмов векторного управления моментом и потокосцеплением АД, которая позволяет выполнять косвенную оценку точности отработки момента в статических и динамических режимах, а также исследовать свойства грубости к вариациям параметров роторной цепи АД.

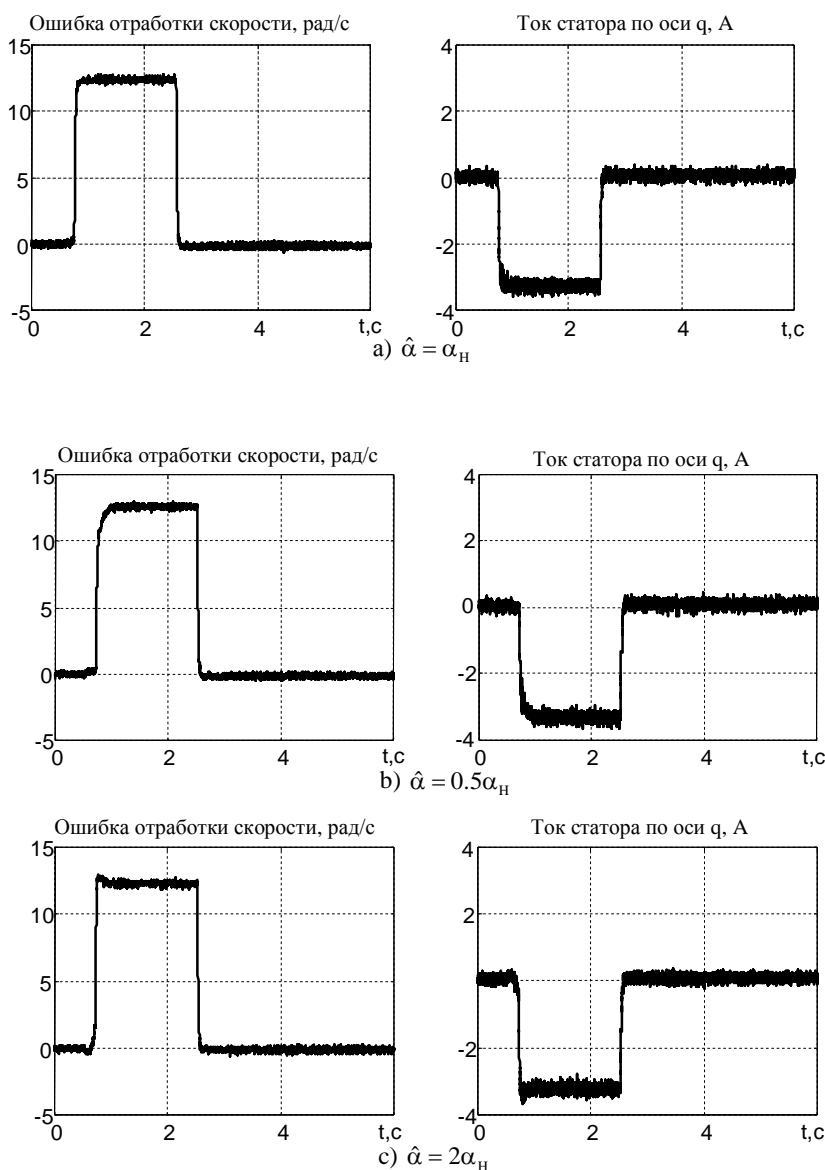


Рис. 13

ной цепи АД. На основании разработанной методики выполнено сравнительное экспериментальное тестирование двух алгоритмов векторного управления: стандартного [7] и грубого [2]. В результате

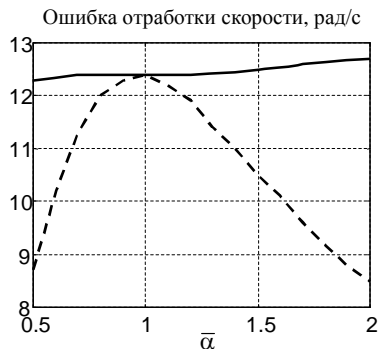


Рис. 14

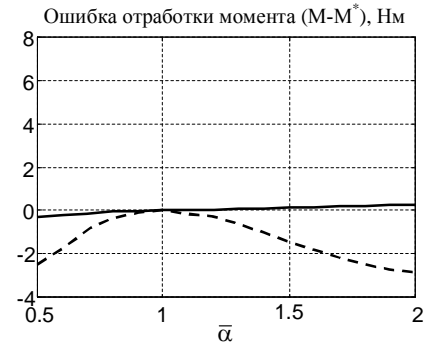
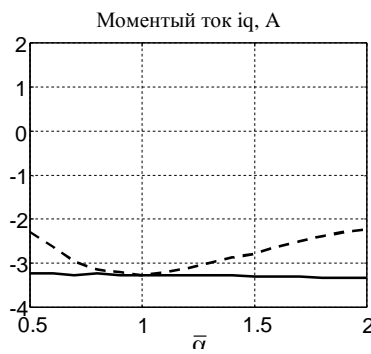


Рис. 15

тестирования установлено, что в условиях вариаций параметров роторной цепи АД грубый алгоритм векторного управления обеспечивает стабилизацию на номинальном уровне статических и динамических показателей качества регулирования момента-потокосцепления, в то время как использование стандартного алгоритма векторного управления приводит к возникновению существенных ошибок обработки регулируемых координат, которые могут быть недопустимыми для высокодинамических применений.

1. Пересада С.М. Обобщенная теория косвенного векторного управления асинхронным двигателем. Часть II. Синтез алгоритма обработки модуля потока и угловой скорости // Техн. електродинаміка. – 1999. – № 4. – С. 26–31.

2. Пересада С.М., Ковбаса С.Н., Бовкунович В.С. Грубое векторное управление моментом и потоком асинхронного двигателя // Техн. електродинаміка. – 2010. – № 1. – С. 60 – 66.

3. Пересада С., Ковбаса С., Тониелли А. Станция быстрого моделирования алгоритмов управления электроприводом // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – 1999. – С. 190–193.

4. Marino R., Peresada S., Tomei P. Adaptive observer-based control of induction motors with unknown rotor resistance // Int. Journal of Adaptive and Signal Processing. – 1996. – Vol.10. – Pp. 345–363.

5. Morici R, Rossi C, Tonielli A. Fast prototyping of nonlinear controllers for electric motors drives, IFAC 12th World Congress, Sydney, Australia, 1993.

6. Munoz A.R., Lipo T.A On-Line Dead-Time Compensation Technique for Open-Loop PWM-VSI Drives // IEEE Transactions on Power Electronics. – 1999. – Vol.14. – №.4. – Pp. 683–689.

7. Peresada S., Tilli A. and Tonielli A. Theoretical and experimental comparison of indirect field-oriented controllers for induction motors // IEEE Trans. on Power Electronics. – 2003. – Vol. 18. – №.1. – Pp. 151–163.

8. Peresada S., Tonielli A. and Tilli A. Indirect field-oriented control of induction motor: New design leads to improved performance and efficiency // Proc. Annual Conf. of the IEEE Industrial Electronics Society – IECON'98. – Aachen, Germany. – Sept. 1998. – Pp. 1609–1614.

9. TMS320LF/LC240xA. DSP Controllers Reference Guide. System and Peripherals. Literature Number: SPRU357B. Revised December 2001. Texas Instruments.

10. <http://www.dspaceinc.com>

Надійшла 29.09.2009

В.М.Михальський, канд.техн.наук, **В.М.Соболев**, канд.техн.наук, **В.В.Чопик**, **І.А.Шаповал**, канд.техн.наук (Інститут електродинаміки НАН України, Київ)

ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІЧНОГО СКЛАДУ ТА ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ ВИХІДНОЇ НАПРУГИ АІН ПРИ ЗАСТОСУВАННІ ДЛЯ ШИРОТНО-ІМПУЛЬСНОЇ МОДУЛЯЦІЇ ПЕРЕРВНИХ МОДУЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто методику визначення гармонічного складу вихідної напруги АІН при застосуванні для ШІМ різних методів перервної підмодуляції. Здійснено порівняльний аналіз показників якості кривих вихідної напруги.

Рассмотрена методика определения гармонического состава выходного напряжения АИН при использовании для ШИМ разных методов прерывистой подмодуляции. Осуществлен сравнительный анализ показателей качества кривых выходного напряжения.

Вступ. Основною проблемою при створенні методів широтно-імпульсної модуляції (ШІМ) в автономних інверторах напруги (АІН) є забезпечення високої якості кривих вихідної напруги з одночасним отриманням максимально можливого коефіцієнта використання напруги ланки постійного струму. Способи імплементації в модуляційні функції складових нульової послідовності, які направлені на вирішення цієї проблеми, можна розділити на дві основні категорії: перші передбачають неперервну модуляцію із застосуванням нульових стаціонарних векторів у всіх шестидесятиградусних секторах кожної із фаз вихідної напруги перетворювача, а другі задають закон модуляції, що передбачає почергову відсутність модуляції в кривих вихідної напруги. Вивченню способів модуляції протягом останніх десятиліть присвячено велику кількість досліджень [1–10]. Значна увага оцінці якості вихідної напруги при застосуванні ШІМ приділялася в [5–7]. В той же час потрібно зауважити, що для деяких методів підмодуляції [1], [5] аналіз якості вихідної напруги не проведено в зв'язку зі значною складністю такого аналізу.

Метою статті є визначення гармонічного складу та показників якості вихідної напруги АІН при застосуванні для отримання максимально можливого коефіцієнта передачі по напрузі перервних модуляційних функцій.

Для визначення якості вихідної напруги доцільне використання коефіцієнта гармонік THD, але цей параметр не характеризує однозначно якість кривих, які складаються з ШІМ-послідовності. Крива напруги містить, крім основної гармоніки, набір всіх гармонічних складових, кратних частоті модуляції. Оскільки, як правило, навантаження АІН має активно-індуктивний характер, то слід зазначити, що результуючий вплив на струм навантаження буде різним для різних гармонік напруги [5] з таких причин: $I_k = U_k / (k\omega_1 L)$, де $k = 2, 3, 4, \dots$

Звідси отримуємо вираз для коефіцієнта гармонік струму:

$$THD_i = \frac{1}{\omega_1 L} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k} \right)^2} . \quad (1)$$

Нормуючи останнє співвідношення по $U_1 / \omega_1 L$, отримуємо зважений загальний коефіцієнт гармонік напруги (Weighted Total Harmonic Distortion – WTHD):

$$WTHD = \frac{1}{U_1} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k} \right)^2} . \quad (2)$$

Як видно з останнього виразу, такий запис враховує якісний склад спектра напруги, а саме враховується місце, де розташована гармонічна на шкалі частоти, адже від цього залежить вплив цієї гармонічної на вихідний струм. Неважко помітити, що при наближенні сигналу завдання вихідної напруги інвертора до нуля відповідно буде зменшуватись амплітуда першої гармоніки у вихідній напрузі і, як наслідок, параметр WTHD буде нескінченно великим. Тому приймемо умовно коефіцієнт модуляції $m = 1$ і тоді амплітуда першої гармоніки у відносних одиницях буде дорівнювати одиниці, або $U_{dc}/2$.

Нормуючи вираз (2) по $U_{dc}/2$ замість U_1 , вводимо показник, який забезпечить об'єктивну порівняльну характеристику методів ШІМ [5] незалежно від глибини модуляції:

$$WTHD0 = \frac{2}{U_{dc}} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k}\right)^2}. \quad (3)$$

Для аналізу вихідної напруги інвертора, яка містить ШІМ-послідовність (тобто напруга, що сформована за допомогою ключів, які з деякою частотою підключають фази навантаження до шин ланки U_{dc}), потрібно знайти гармонічний склад цієї напруги. Гармонічний склад може бути знайдено за допомогою чисельних методів з використанням швидкого перетворення Фур'є. Але чисельні методи не гарантують достатньої точності та мають принципові недоліки у випадку використання їх для порівняння тих чи інших алгоритмів ШІМ. Аналітичний спосіб розв'язання цієї задачі полягає у використанні двох часових змінних [1]:

$$x(t) = \omega_{on}t + \theta_{on} \quad \text{та} \quad y(t) = \omega_{oux}t + \theta_{oux}, \quad (4)$$

де $\omega_{on} = 2\pi/T_{on}$ – колова частота опорного сигналу ШІМ; T_{on} – період опорного сигналу; $\omega_{oux} = 2\pi/T_{oux}$ – колова частота вихідної напруги U_{a0} ; T_{oux} – період вихідної напруги; θ_{on} , θ_{oux} – відповідні початкові фазові зсуви. При цьому зауважимо, що $\omega_{oux} \ll \omega_{on}$.

На рис. 1 показано умовне розташування двох змінних, які задають алгоритм керування.

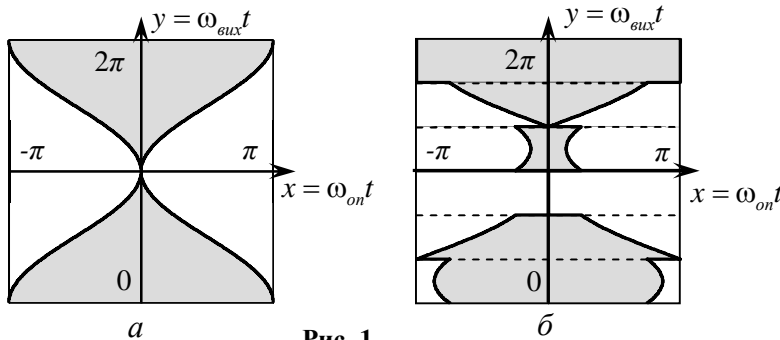


Рис. 1

Так, на рис. 1, а зображено формування сигналу завдання для модуляційної функції СИНШІМ, а на рис. 1, б показано формування сигналу завдання для модуляційної функції ПШІМО [1]. Відомо, що аналіз функцій ПШІМО, ПШІМ1, ПШІМ2, ПШІМ3 у світі раніше не проводився.

Змінні $x(t)$ та $y(t)$ відображують склад часових інтервалів для високочастотної модуляції кривої завдання, що окремо представлена на кожному періоді ШІМ.

У загальному випадку гармонічний ряд Фур'є має вигляд:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)]. \quad (5)$$

Коефіцієнти гармонічного ряду можуть бути знайдені з інтегралу Фур'є таким чином:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\omega t) dt; \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k\omega t) dt; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для функції з двома змінними вираз (5) запишеться так [5]:

$$f(x, y) = \frac{A_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{0n} \cos ny + B_{0n} \sin ny] + \sum_{r=1}^{\infty} [A_{r0} \cos rx + B_{r0} \sin rx] + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{rn} \cos(rx + ny) + B_{rn} \sin(rx + ny)], \quad (7)$$

$$\text{де} \quad A_{rn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos(rx + ny) dx dy, \quad B_{rn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin(rx + ny) dx dy, \quad (8)$$

n та r – номери компонент гармонічного ряду.

Для більш зручного використання вираз (8) можна записати в загальному комплексному вигляді:

$$A_m + jB_m = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{j(rx+ny)} dx dy. \quad (9)$$

Як видно з рис. 1, б, функція ПШІМО на інтервалі від 0 до 2π має кусково-неперервний характер, тобто вираз (9) має бути записаний інтервально на всьому періоді вихідної частоти. Границями внутрішнього інтегралу будуть модуляційні функції, вписані в проміжок від $-\pi$ до 0 зі знаком мінус та від 0 до π зі знаком плюс відповідно. Вираз для першого інтервалу модуляційної кривої ПШІМО

запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= -\frac{\pi}{2} \left[1 + m \cos(\omega_{\text{вих}} t) + \left(-1 - m \cos \left[\omega_{\text{вих}} t - \frac{4\pi}{3} \right] \right) \right]; \\ x_e(t) &= \frac{\pi}{2} \left[1 + m \cos(\omega_{\text{вих}} t) + \left(-1 - m \cos \left[\omega_{\text{вих}} t - \frac{4\pi}{3} \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Приймаючи $\omega_{\text{вих}} t$ як у та виконавши деякі тригонометричні перетворення, вираз (10) перепишеться так:

$$x_s = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right); \quad x_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right). \quad (11)$$

Інтегрування кусково-неперервних функцій на періодах основної гармоніки вихідної частоти і частоти ШІМ виконується шляхом додавання часткових інтегралів на інтервалах безперервності. Границі інтервалів у розглянутому випадку ПШІМ0 показано в табл. 1, де y_s , y_e і x_e , x_s – початкові та кінцеві границі інтервалів на періодах вихідної кутової частоти $\omega_{\text{вих}}$ і кутової частоти $\omega_{\text{он}}$ відповідно.

Таблиця 1

i	y_s	y_e	x_s	x_e
1	0	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right)$	
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y + \frac{\pi}{6} \right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y + \frac{\pi}{6} \right) + \pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos \left(y + \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi$	
3	$\frac{2\pi}{3}$	π	0	0
			$\Delta x = x_e - x_s = 0$	
4	π	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right) + \pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos \left(y - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi$	
5	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y + \frac{\pi}{6} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos \left(y + \frac{\pi}{6} \right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos \left(y + \frac{\pi}{6} \right)$	
6	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$-\pi$	π
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	

Загальна формула для коефіцієнтів ряду Фур'є розглянутої ПШІМ0

$$\begin{aligned} A_m + jB_m &= \frac{U_{dc}}{2\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \int_{x_{si}}^{x_{ei}} e^{j(rx+ny)} dx dy = \\ &= \frac{U_{dc}}{j2r\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \left(e^{jrx_{fi}} - e^{jrx_{ri}} \right) e^{jny} dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Послідовно визначаємо коефіцієнти для різних комбінацій r і n , а також номерів інтервалів i , і далі знаходимо сумарні значення на всіх інтервалах.

Для $r=n=0$

У цьому випадку формула для визначення коефіцієнтів може бути записана у вигляді:

$$A_{00} + jB_{00} = \frac{U_{dc}}{2\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \Delta x_i dy. \quad (13)$$

Застосовуємо цю формулу до конкретних інтервалів з табл. 1, знаходимо суму і отримуємо в результаті

$$A_{00} + jB_{00} = U_{dc}. \quad (14)$$

Для $r=0, n>0$

Запишемо формулу для визначення коефіцієнтів у вигляді:

$$A_{0n} + jB_{0n} = \frac{U_{dc}}{2\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \int_{x_{si}}^{x_{ei}} e^{jny} dx dy = \frac{U_{dc}}{2\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \Delta x_i e^{jny} dy. \quad (15)$$

Виходячи з даних табл. 1, проходимо той же шлях, що і у попередньому випадку, отримуючи:

$$\begin{aligned} &A_{0n} + jB_{0n} = \\ &= \frac{\sqrt{3}mU_{dc}}{4\pi} \left\langle \frac{e^{j(n+1)\frac{\pi}{3}} - 1}{j(n+1)} \left[1 + e^{j(n+1)\pi} \right] \left\{ e^{-j\frac{\pi}{6}} + e^{j\left[(n+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right]} \right\} + \frac{e^{j(n-1)\frac{\pi}{3}} - 1}{j(n-1)} \left[1 + e^{j(n-1)\pi} \right] \left\{ e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{j\left[(n-1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right]} \right\} \right\rangle + \end{aligned}$$

$$+ \frac{U_{dc}}{\pi} \frac{e^{jn\frac{\pi}{3}} - 1}{jn} \left(e^{jn\frac{\pi}{3}} + e^{jn\pi} + e^{jn\frac{5\pi}{3}} \right). \quad (16)$$

У формулі (16) складова $\frac{U_{dc}}{\pi} \frac{e^{jn\frac{\pi}{3}} - 1}{jn} \left(e^{jn\frac{\pi}{3}} + e^{jn\pi} + e^{jn\frac{5\pi}{3}} \right) = 0$ для всіх значень $n > 0$, крім $n=3(2s-1)=3,9,15,21,\dots$ ($s=1,2,3,\dots$), коли вона дорівнює:

$$6U_{dc}/jn\pi = -j6U_{dc}/n\pi. \quad (17)$$

Вираз $1 + e^{j(n\pm 1)\pi} = 0$ для всіх парних значень $n=2s$, тому

$$A_{0n} + jB_{0n}|_{n=2s} = 0. \quad (18)$$

Той самий співмножник для непарних значень $n=2s+1$ дорівнює 2.

З урахуванням цього для непарних значень n ліву частину виразу (16) у трикутних дужках можна привести до вигляду:

$$\begin{aligned} & A_{0n} + jB_{0n}|_{n=2s+1} = \\ & = \frac{\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left\langle \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}}{n+1} e^{j(n+1)\frac{\pi}{6}} \left\{ e^{-j\frac{\pi}{6}} + e^{j\left[\frac{(n+1)\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right]} \right\} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}}{n-1} e^{j(n-1)\frac{\pi}{6}} \left\{ e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{j\left[\frac{(n-1)\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right]} \right\} \right\rangle = \\ & = \frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6} \cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1} e^{j(n+1)\frac{\pi}{3}} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6} \cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1} e^{j(n-1)\frac{\pi}{3}} \right] = \\ & = \frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6} \cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1} \cos(n+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6} \cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1} \cos(n-1)\frac{\pi}{3} + \right. \\ & \left. + j \left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6} \cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1} \sin(n+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6} \cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1} \sin(n-1)\frac{\pi}{3} \right] \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

У результаті перетворення формули (16) отримано наступний вираз:

$$\begin{aligned} & A_{0n} + jB_{0n} = \\ & = \frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6} \cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1} \cos(n+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6} \cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1} \cos(n-1)\frac{\pi}{3} + \right. \\ & \left. + j \left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6} \cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1} \sin(n+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6} \cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1} \sin(n-1)\frac{\pi}{3} \right] \right\}_{n=2s+1} - \\ & - j \frac{6U_{dc}}{n\pi} \Big|_{n=6s-3=3,9,15,\dots}. \quad (20) \end{aligned}$$

Розглянемо окремий випадок $n=1$, при якому підстановка даного значення n у вираз (20) дає невизначеність (ділення 0 на 0). Шукана формула може бути отримана безпосередньо з (16):

$$A_{01} + jB_{01} = \lim_{n \rightarrow 1} (A_{0n} + jB_{0n}) = m \frac{U_{dc}}{2}. \quad (21)$$

Для $r > 0$

У даному діапазоні необхідно виходити із загальної формули (12):

$$\begin{aligned}
A_m + jB_m &= \frac{U_{dc}}{2\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \int_{x_{ri}}^{x_{fi}} e^{j(rx+ny)} dx dy = \frac{U_{dc}}{j2r\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \left(e^{jrx_{fi}} - e^{jrx_{ri}} \right) e^{jny} dy = \\
&= \frac{U_{dc}}{j2r\pi^2} \sum_{i=1}^6 \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \left(e^{jrx_{fi}} - e^{-jrx_{fi}} \right) e^{jny} dy
\end{aligned} \quad (22)$$

і співвідношень Якобі-Ангера з використанням функцій Беселя: $e^{\pm j\xi \cos \theta} = J_0(\xi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} j^{\pm k} J_k(\xi) \cos k\theta$.

Стосовно нашого випадку слід мати на увазі, що

$$e^{\pm jr \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \cos(y+\varphi)} = J_0\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} j^{\pm k} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \cos k(y+\varphi); \quad (23)$$

$$e^{\pm jr \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \cos(y+\varphi) + \pi \right]} = e^{\pm jr \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \cos(y+\varphi) \right]} e^{\pm jr\pi} = (-1)^r e^{\pm jr \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \cos(y+\varphi) \right]}; \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{U_{dc}}{jr\pi^2} \int_{y_{si}}^{y_{ei}} e^{jny} \sum_{k=1}^{\infty} (j^k - j^{-k}) J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \cos k(y+\varphi) dy &= \frac{2U_{dc}}{r\pi^2} \int_{y_{si}}^{y_{ei}} e^{jny} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{2} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \cos k(y+\varphi) dy = \\
&= \frac{U_{dc}}{r\pi^2} \int_{y_{si}}^{y_{ei}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{2} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \left\{ e^{j[(n+k)y+k\varphi]} + e^{j[(n-k)y-k\varphi]} \right\} dy = \frac{V_{dc}}{r\pi^2} \Lambda \Big|_{y_{si}}^{y_{ei}},
\end{aligned} \quad (25)$$

де

$$\Lambda = J_n\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) e^{-jn\varphi} y \Big|_{k=|n|} + \sum_{k=1}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \sin k \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{e^{j[(n+k)y+k\varphi]}}{j(n+k)} \Big|_{k \neq -n} + \frac{e^{j[(n-k)y-k\varphi]}}{j(n-k)} \Big|_{k \neq n} \right\}. \quad (26)$$

Розгляд за інтервалами згідно з табл. 1 і подальше додавання приводить до такого результату:

$$\begin{aligned}
A_m + jB_m &= \frac{2U_{dc}}{r\pi^2} J_n\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \frac{\pi}{3} [1 + (-1)^r] \cos n \frac{\pi}{6} + \\
&+ \frac{8U_{dc}}{r\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq -n)}}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \sin k \frac{\pi}{2} \frac{e^{j\left[(n+k)\frac{5\pi}{6} + r\pi\right]}}{\sin(n+k) \frac{\pi}{6} \cos(n+k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n+2k+3r) \frac{\pi}{6}} + \\
&+ \frac{8U_{dc}}{r\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \sin k \frac{\pi}{2} \frac{e^{j\left[(n-k)\frac{5\pi}{6} + r\pi\right]}}{\sin(n-k) \frac{\pi}{6} \cos(n-k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n-2k+3r) \frac{\pi}{6}}.
\end{aligned} \quad (27)$$

В остаточному вигляді даний вираз можна представити так:

$$\begin{aligned}
A_m + jB_m &= \frac{2U_{dc}}{r\pi^2} \frac{\pi}{3} [1 + \cos(r\pi)] \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cos n \frac{\pi}{6} J_n\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) + \frac{8U_{dc}}{r\pi^2} (1+j) \cos(r\pi) \times \\
&\times \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq -n)}}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{n+k} \cos(n+k) \frac{5\pi}{6} \sin(n+k) \frac{\pi}{6} \cos(n+k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n+2k+3r) \frac{\pi}{6} + \right. \\
&\left. + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{n-k} \cos(n-k) \frac{5\pi}{6} \sin(n-k) \frac{\pi}{6} \cos(n-k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n-2k+3r) \frac{\pi}{6} \right\}.
\end{aligned} \quad (28)$$

Покажемо можливості проведення аналогічного дослідження гармонічного складу вихідних напруг при застосуванні перервних модуляційних функцій ПШМ1, ПШМ2, ПШМ3 [1]. На рис. 2 показано умовне розташування змінних $x(t)$ та $y(t)$ для модуляційних функцій ПШМ1, ПШМ2, ПШМ3.

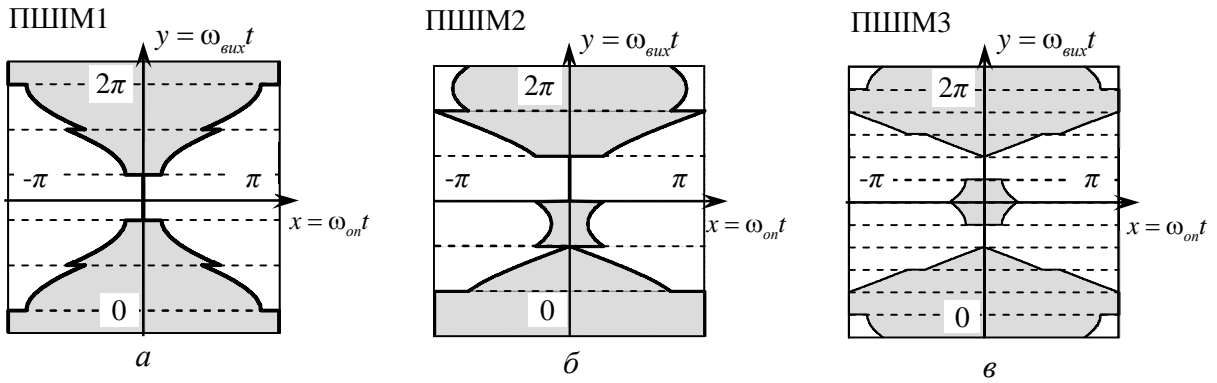


Рис. 2

В табл. 2 наведено границі інтегрування для функції ПШМ1.

Таблиця 2

i	y_s	y_e	x_s	x_e
1	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\pi$	π
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	
2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$	
3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) + \pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi$	
4	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	0	0
			$\Delta x = x_e - x_s = 0$	
5	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + \pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi$	
6	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$	
7	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$-\pi$	π
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	

Як видно з табл. 2, період вихідної напруги АІН при використанні модуляційної функції ПШМ1 складається з семи інтервалів, на відміну від періоду вихідної напруги, отриманої при реалізації модуляційної функції ПШМ0.

Причиною такої відмінності є те, що при використанні функції ПШМ1 відлік початку періоду вихідної напруги починається посередині інтервалу тривалістю $\pi/3$, протягом якого при комутаціях ключів АІН для реалізації нульового стаціонарного стану використовується під'єднання всіх фаз навантаження виключно до позитивної шини вхідного джерела живлення. Таким чином утворюється перший інтервал табл. 2 тривалістю $\pi/6$, після якого на періоді вихідної напруги розташовуються п'ять інтервалів тривалістю $\pi/3$ кожен (інтервали 2–6), і завершується період інтервалом 7 тривалістю $\pi/6$ [1].

Для випадку формування вихідної напруги за алгоритмом ПШМ1 вирази (14), (20), (21), (28) запишуться так:

$$A_{00} + jB_{00} = U_{dc}; \quad (29)$$

$$A_{0n} + jB_{0n} = \frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6} \cos(n+2)\frac{\pi}{6} \cos(n+1)\frac{\pi}{6}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6} \cos(n-2)\frac{\pi}{6} \cos(n-1)\frac{\pi}{6}}{n-1} \right]_{n=2s+1} + \frac{6U_{dc}}{n\pi} \cos(n+1)\frac{\pi}{2} \Big|_{n=6s-3=3,9,15\dots}; \quad (30)$$

$$A_{01} + jB_{01} = m \frac{U_{dc}}{2}; \quad (31)$$

$$A_m + jB_m = \frac{2U_{dc}}{r\pi^2} \frac{\pi}{3} [1 + \cos(r\pi)] \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cos n \frac{\pi}{6} J_n\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) + \frac{8U_{dc}}{r\pi^2} \cos(r\pi) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin(n+k) \frac{\pi}{6} \cos(n+k+r)\pi \cos(n+k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n+2k+3r) \frac{\pi}{6}}{n+k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k\left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m\right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin(n-k) \frac{\pi}{6} \cos(n-k+r)\pi \cos(n-k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n-2k+3r) \frac{\pi}{6}}{n-k} \right\}. \quad (32)$$

Таблиця 3

i	y_s	y_e	x_s	x_e
1	0	$\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	π
$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$				
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$	
3	$\frac{2\pi}{3}$	π	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) + \pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi$	
4	π	$\frac{4\pi}{3}$	0	0
$\Delta x = x_e - x_s = 0$				
5	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + \pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi$	
6	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$	

У табл. 3 показано границі інтегрування для перервної модуляційної функції ПШМ2. Ця функція відрізняється від модуляційної функції ПШМ0 тим, що при реалізації ПШМ2 на непарних інтервалах періоду вихідної напруги (інтервали 1,3,5) як нульовий стаціонарний стан використовується під'єднання всіх фаз навантаження до позитивної шини джерела живлення АІН, а на парних інтервалах (2,4,6) – під'єднання всіх фаз навантаження до негативної шини джерела живлення [1], в той час, як при реалізації ПШМ0 на інтервалах 1,3,5 використовується під'єднання до негативної шини, а на інтервалах 2, 4, 6 – до позитивної шини.

Для випадку формування за алгоритмом ПШМ2 вирази (14), (20), (21), (28) запишуться так:

$$A_{00} + jB_{00} = U_{dc}; \quad (33)$$

$$A_{0n} + jB_{0n} = \frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(n+1) \frac{\pi}{6} \cos(n+2) \frac{\pi}{6} \cos(n+1) \frac{2\pi}{3}}{n+1} + \frac{\sin(n-1) \frac{\pi}{6} \cos(n-2) \frac{\pi}{6} \cos(n-1) \frac{2\pi}{3}}{n-1} + \right.$$

$$\left. + j \left[\frac{\sin(n+1) \frac{\pi}{6} \cos(n+2) \frac{\pi}{6} \sin(n+1) \frac{2\pi}{3}}{n+1} + \frac{\sin(n-1) \frac{\pi}{6} \cos(n-2) \frac{\pi}{6} \sin(n-1) \frac{2\pi}{3}}{n-1} \right] \right\}_{n=2s+1} + j \frac{6U_{dc}}{n\pi} \Big|_{n=6s-3=3,9,15...} \quad (34)$$

$$A_{01} + jB_{01} = m \frac{U_{dc}}{2}; \quad (35)$$

$$A_m + jB_m = \frac{2U_{dc}}{r\pi^2} \frac{\pi}{3} [1 + \cos(r\pi)] \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cos n \frac{\pi}{6} J_n \left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \right) + \frac{8U_{dc}}{r\pi^2} (1+j) \cos(r\pi) \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k \left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin(n+k) \frac{\pi}{6} \cos(n+k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n+2k+3r) \frac{\pi}{6} \cos(n+k) \frac{7\pi}{6}}{n+k} + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k \left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin(n-k) \frac{\pi}{6} \cos(n-k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n-2k+3r) \frac{\pi}{6} \cos(n-k) \frac{7\pi}{6}}{n-k} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Таблиця 4

i	y_s	y_e	x_r	x_f
1	0	$\pi/6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$
4	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos(y - \pi/6)$	
2	$\pi/6$	$\pi/3$	$-\pi$	π
11	$5\pi/3$	$11\pi/6$	$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	
3	$\pi/3$	$\pi/2$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) + \pi$
6	$5\pi/6$	π	$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos(y + \pi/6) + 2\pi$	
5	$2\pi/3$	$5\pi/6$	0	0
8	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$\Delta x = x_e - x_s = 0$	
7	π	$7\pi/6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) - \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + \pi$
10	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos(y - \pi/6) + 2\pi$	
9	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$
12	$11\pi/6$	2π	$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m \cos(y + \pi/6)$	

У табл. 4 показано границі інтегрування для перервної модуляційної функції ПШМЗ. Ця функція відрізняється від модуляційних функцій ПШМ0, ПШМ1, ПШМ2 тим, що період вихідної напруги при її реалізації необхідно розбивати на 12 інтервалів тривалістю $\pi/6$ кожний. При цьому є можливість об'єднати ці інтервали в шість груп за ознакою ідентичності границь інтегрування (1 і 4, 2 і 11, 3 і 6, 5 і 8, 7 і 10, 9 і 12). Границі інтегрування для інтервалів з однієї групи формуються з одних і тих самих функцій.

Для випадку формування за алгоритмом ПШМЗ вирази (14), (20), (21), (28) запишуться

$$A_{00} + jB_{00} = U_{dc}; \quad (37)$$

$$A_{0n} + jB_{0n} = \frac{4\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi} \left[\begin{aligned} & \frac{\sin(n+1) \frac{\pi}{12} \cos(n+1) \frac{\pi}{4} \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \cos(n+2) \frac{\pi}{6}}{n+1} + \\ & + \frac{\sin(n-1) \frac{\pi}{12} \cos(n-1) \frac{\pi}{4} \cos(n-1) \frac{\pi}{2} \cos(n-2) \frac{\pi}{6}}{n-1} \end{aligned} \right]_{n=2s+1} - \frac{6U_{dc}}{n\pi} \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \Big|_{n=6s-3=3,9,15...}; \quad (38)$$

$$A_{01} + jB_{01} = m \frac{U_{dc}}{2}; \quad (39)$$

$$A_m + jB_m = 4 \frac{U_{dc}}{r\pi^2} \frac{\pi}{6} [1 + \cos(r\pi)] \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cos n \frac{\pi}{6} J_n \left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \right) \Big|_{k=n} + 16 \frac{U_{dc}}{r\pi^2} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k \left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin(n+k) \frac{\pi}{12} \cos(n+k) \frac{\pi}{4} \cos(n+k+r)\pi \cos(n+k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n+2k+3r) \frac{\pi}{6}}{n+k} + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} J_k \left(r \frac{\sqrt{3}\pi}{2} m \right) \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \sin(n-k) \frac{\pi}{12} \cos(n-k) \frac{\pi}{4} \cos(n-k+r)\pi \cos(n-k+r) \frac{\pi}{2} \cos(n-2k+3r) \frac{\pi}{6}}{n-k} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Для порівняння повних спектрів вихідної напруги U_{a0} , (U_{b0} , U_{c0}) (тобто, напруги між виходами інвертора і середньою точкою джерела живлення) [1] побудуємо спектрограми цієї напруги для різних методів модуляції, виходячи зі співвідношення $C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$ для амплітуд гармонік з номерами гармонік r та n за формул (20), (32), (36), (40). На рис. 3, *а* наведено двовимірну спектрограму вихідної напруги АІН при застосуванні ПШМ0, на рис. 3, *б* – спектрограму вихідної напруги при застосовуванні ПШМ1, на рис. 3, *в* – спектрограму вихідної напруги при застосуванні ПШМ2 і на рис. 3, *г* – спектрограму при застосуванні ПШМ3.

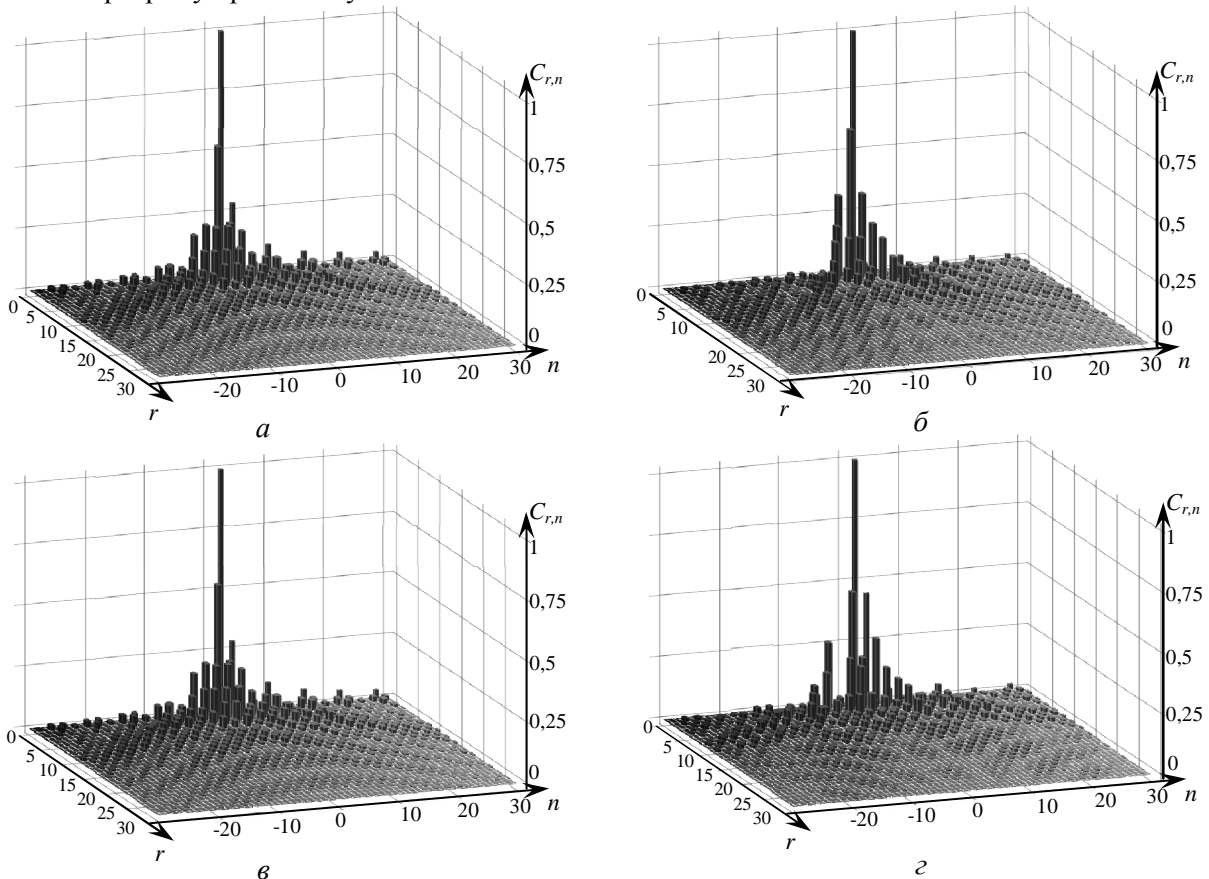


Рис. 3

На рис. 4–рис. 7 показано одновимірні спектри напруг між виходами інвертора і середньою точкою джерела живлення (U_{a0} , U_{b0} , U_{c0}) (рис. 4, *а*, 5, *а*, 6, *а*, 7, *а*) та напруг на фазах навантаження (U_{aN} , U_{bN} , U_{cN}) (рис. 4, *б*; 5, *б*; 6, *б*; 7, *б*) для різних методів перервної модуляції: рис. 4 – ПШМ0, рис. 5 – ПШМ1, рис. 6 – ПШМ2 та рис. 7 – ПШМ3. Спектри побудовано за умов: $f_{on} = 1050$ Гц; $f_{вух} = 50$ Гц; $r = 1, 2, \dots, 180$; $n = -180, -179, \dots, 0, 1, \dots, 180$; співвідношення частот $f_{on} / f_{вух} = 21$; модуляційний індекс $m = 1$.

Висновки. Порівнюючи спектрограми на рис. 3 та рис. 4–7, можна зробити висновок, що застосування для керування АІН перервних модуляційних функцій ПШМ0 та ПШМ2 забезпечує однакові значення нормованого зваженого загального коефіцієнта гармонік напруги $WTHD0$ вихідних напруг U_{a0} , U_{b0} , U_{c0} ($WTHD0 = 9,389\%$ як для ПШМ0, так і для ПШМ2) та напруг на фазах навантаження U_{aN} , U_{bN} , U_{cN} ($WTHD0 = 2,539\%$ для ПШМ0 і ПШМ2). Це можна пояснити однаковістю підходів до формування нульових стаціонарних станів при керуванні АІН із застосуванням цих модуля-

ційних функцій. Спектри напруг U_{aN} , U_{bN} , U_{cN} відрізняються від спектрів напруг U_{a0} , U_{b0} , U_{c0} (рис. 4–7) відсутністю складових, кратних трьом, тобто складових нульової послідовності.

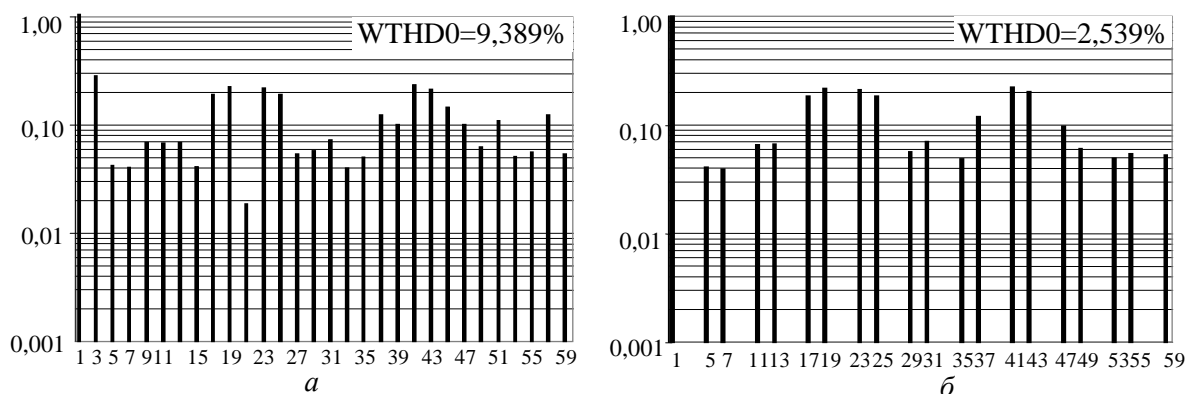


Рис. 4

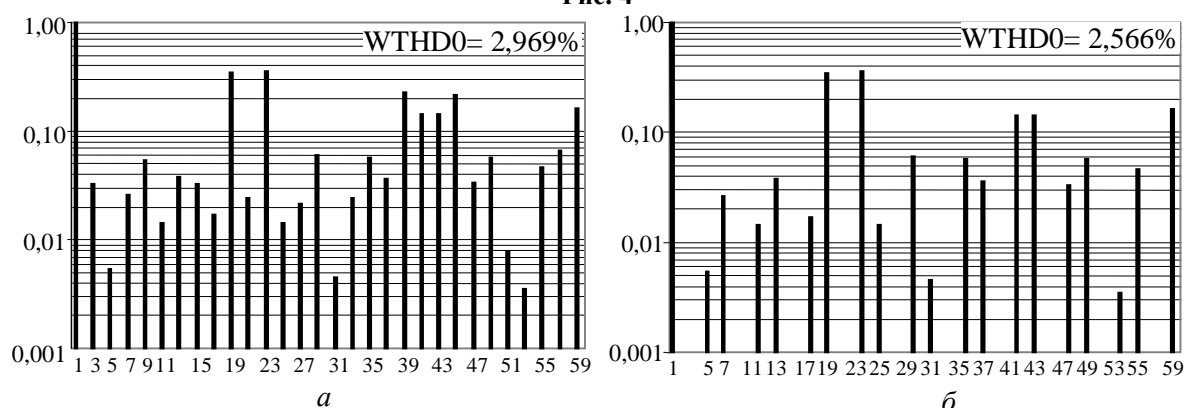


Рис. 5

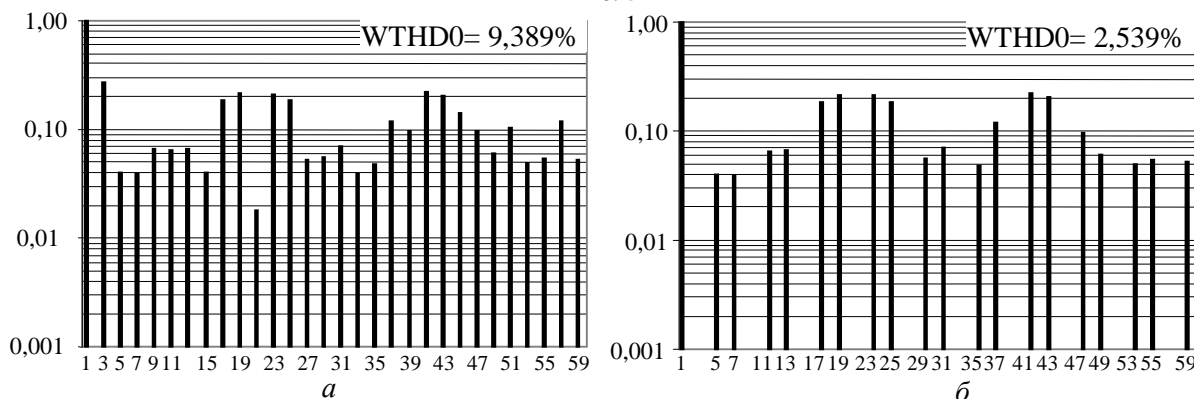


Рис. 6

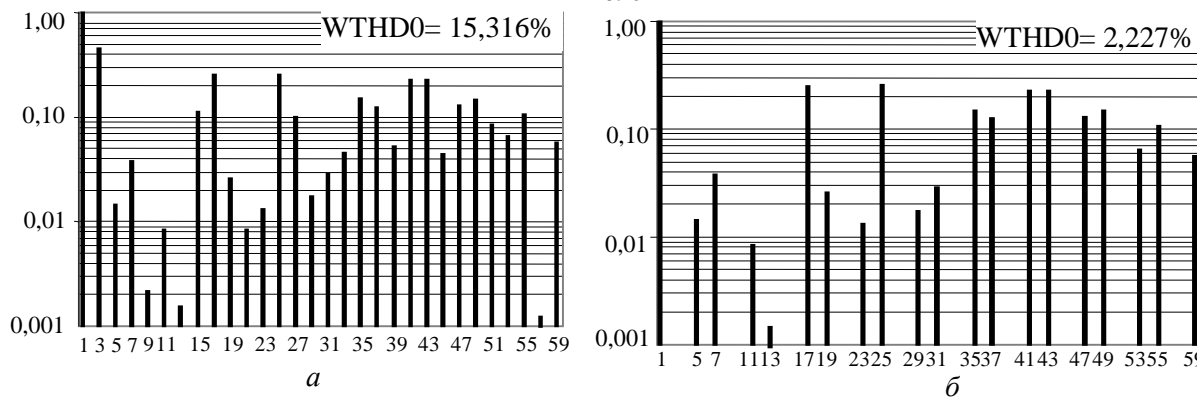


Рис. 7

Для вибраного співвідношення частоти ШІМ f_{on} та вихідної частоти $f_{вих}$ ($f_{on} / f_{вих} = 21$) згадана нульова послідовність містить тільки складові з кратністю $n=6s-3=3, 9, 15, \dots$ по відношенню до першої гармонічної вихідної напруги, але теоретично при довільних співвідношеннях $f_{on} / f_{вих}$ до складу нульової послідовності можуть входити також інші гармонічні, кратні трьом.

Порівнюючи коефіцієнти WTHD0 для напруг U_{a0}, U_{b0}, U_{c0} при застосуванні різних методів перервної модуляції, можна відзначити, яку важливу роль відіграє саме якісний склад спектрів напруг. Наприклад, для методу ПШІМ1 коефіцієнт WTHD0 напруги U_{a0} дорівнює лише 2,969% саме з причини малих амплітуд третьої та п'ятої гармонічних, чий внесок в сумарний коефіцієнт гармонік найбільш вагомий. В той же час, при застосуванні методу ПШІМ3 коефіцієнт WTHD0 напруги U_{a0} досягає значення 15,316% також саме з причини значної амплітуди третьої гармоніки в спектральному складі цієї напруги (рис. 7, а).

Для практичного ж застосування більш важливими є частотний спектр та значення коефіцієнта WTHD0 для напруг на фазах навантаження U_{aN}, U_{bN}, U_{cN} (рис. 4, б; 5, б; 6, б; 7, б), адже саме ці показники визначають якість вихідного струму АІН при використанні різних методів підмодуляції в модуляційних функціях, в той час як частотний спектр та значення WTHD0 вихідних напруг U_{a0}, U_{b0}, U_{c0} лише дозволяють опосередковано оцінити гармонічний склад та амплітудні значення складових підмодулюючих функцій.

1. Михальський В.М., Соболев В.М., Чоник В.В., Шаповал І.А. Керування автономними інверторами напруги із забезпеченням максимального коефіцієнта модуляції при неспотворюючому формуванні вихідної напруги засобами модифікованої ШІМ // Техн. електродинаміка. – 2010. – №1. – С. 49–59.
2. Чаплыгин Е.Е. Двухфазная широтно-импульсная модуляция в трехфазных инверторах напряжения // Электричество. – 2009. – №8. – С. 56–61.
3. Шрейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000. – 654 с.
4. Bowes S.R., Yen-Shin Lai The relationship between space-vector modulation and regular-sampled PWM // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – Oct 1997. – Vol.44. – No.5. – Pp. 670–679.
5. Holmes D.G., Lipo T.A. Pulse Width Modulation for Power Converters - Principle and Practice. – New York, USA: IEEE Series on Power Engineering, IEEE Press/Wiley InterScience, 2003. – 744 p.
6. Holmes D.G. The general relationship between regular-sampled pulse-width-modulation and space vector modulation for hard switched converters // Proc of the Conf. IEEE-IAS Annual Meeting. – 1992. – Pp. 1002–1009.
7. Holtz J. Pulsewidth modulation for electronic power conversion // Proc. of IEEE. – Aug 1994. – Vol. 82. – Pp. 1194–1214.
8. Moynihan J.F., Egan M.G., Murphy J.M.D. Theoretical spectra of space-vector-modulated waveforms // IEE Proc. Electr. Power Applications. – Jan 1998. – Vol. 145. – No.1. – Pp. 14–24.
9. Van der Broeck H.W. Analysis of the harmonics in voltage fed converter drives caused by PWM schemes with discontinuous switching operation // Conf. Rec. European Power Electronics Conf. (EPE), Florence. – 1991. – Pp. 3:261–3:266.
10. Zhou K., Wang D. Relationship between space-vector modulation and three-phase carrier-based PWM: a comprehensive analysis // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2002. – Vol. 49. – No.1. – Pp. 186–196.

Надійшла 22.12.2009

Б.І.Приймак, канд.техн.наук, В.В.Токарчук (Нац. техн. ун-т України “КПІ”, Київ)

ВИЗНАЧЕННЯ УМОВ МОНОТОННОГО ХАРАКТЕРУ ПЕРЕХІДНОЇ ФУНКЦІЇ СИСТЕМИ З МОДИФІКОВАНИМ РЕГУЛЯТОРОМ ПОЛОЖЕННЯ

Отримано умову монотонного характеру перехідної функції електропривода підпорядкованої структури з модифікованим регулятором положення. Відсутність перерегулювання в реакції на завдання вимагається від систем керування положенням промислових роботів, металообробних верстатів та ін.

Получено условие монотонного характера переходной функции электропривода подчиненной структуры с модифицированным регулятором положения. Отсутствие перерегулирования в реакции на задание требуется в системах управления положением промышленных роботов, металлообрабатывающих станков и др.

Вступ. У промислових роботах чи металообробних верстатах, як відомо, від систем автоматичного регулювання (САР) положення поряд з достатньо високою швидкістю та точністю керування вимагається забезпечення відсутності перерегулювання при відпрацюванні завдання. Для функціонування системи у лінійній зоні останнє, вочевидь, буде досягнуто при монотонній перехідній функції САР за завданням.

На сьогодні електромеханічні системи (ЕМС) регулювання положення часто будуються за принципом підпорядкованого керування. При цьому в комплектних електроприводах високої якості зазвичай контур швидкості налаштовується на симетричний оптимум (СО), а підпорядкований йому контур регулювання струму – на модульний оптимум (МО) [1,2]. Для таких систем у [3] представлено процедуру синтезу модифікованого регулятора положення (МРП), який, на відміну від налаштованого на МО традиційного регулятора, дозволяє поліпшити динамічні та точнісні показники САР. Проте перехідні функції САР з такими регуляторами мають перерегулювання, хоч і невелике.

Метою статті є виявлення умов отримання монотонної перехідної функції за завданням в САР положення з МРП.

Визначення умови монотонності перехідної функції САР. Узагальнену структуру САР положення ЕМС показано на рис.1, де ω , φ – кутові або лінійні швидкість та положення ЕМС; ω^* , φ^* – завдання швидкості та положення відповідно; ε – помилка системи; M_H – момент навантаження двигуна; $W_\omega(p)$ – передатна функція (ПФ) замкненого контуру регулювання швидкості; $W_{reg}(p)$ – ПФ регулятора положення; k_φ – коефіцієнт передачі давача положення. Якщо контур струму налаштувати на МО, а контур швидкості – на СО, то, згідно з [1], останній в замкненому стані можна описати ПФ

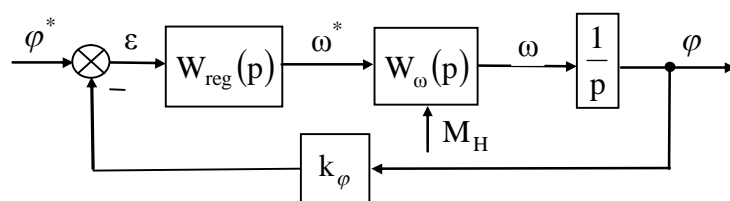


Рис.1

де T_μ – мала некомпенсована стала часу у контурі струму; k_ω – коефіцієнт передачі давача швидкості.

На основі [3] для МРП можна записати ПФ

$$W_\omega(p) = k_\omega^{-1} (8T_\mu p + 1) / (64T_\mu^3 p^3 + 32T_\mu^2 p^2 + 8T_\mu p + 1), \quad (1)$$

$$W_{reg}(p) = K_{reg} d^{-1} B_{reg}(p) / A_{reg}(p), \quad (2)$$

де $K_{reg} = k_{\omega} / 8T_{\mu} k_{\varphi}$ – номінальний коефіцієнт передачі регулятора; $A_{reg}(p) = 8bT_{\mu}^2 p^2 + (8+b)T_{\mu} p + 1$; $B_{reg}(p) = 16T_{\mu}^2 p^2 + 4T_{\mu} p + 1$; b – встановлюваний при синтезі регулятора параметр, d – деяке число, що буде змінюваним параметром в даному дослідженні, ($d > 0$). Параметр b по суті визначає ступінь відповідності між ідеалізованим та реальним (фізично реалізованим) варіантами регулятора, де ПФ ідеалізованого МРП визначається з (2) при $b=0$. Критерії вибору значення b ґрунтуються на отриманих у [3] аналітичних та графічних залежностях від b таких показників якості перехідного процесу як час регулювання, час наростання та перерегулювання у замкненій САР. Аналіз цих залежностей дає рекомендовані межі вибору параметра $0,1 \leq b \leq 1,2$.

Для регулятора (2) з використанням (1) знайдемо ПФ замкненої САР, схема якої зображена на рис. 1, у вигляді

$$W_{\varphi}(p) = k_{\varphi}^{-1} / (32dbT_{\mu}^3 p^3 + 8d(4+b)T_{\mu}^2 p^2 + 8dT_{\mu} p + 1). \quad (3)$$

Знаменник (3) є характеристичним поліномом замкненої системи. Оскільки поліном має 3-й степінь, то для дослідження САР можна застосувати розширену діаграму Вишнеградського [2]. Ця діаграма дозволяє виявити зони параметрів системи, де забезпечується потрібний характер перехідних процесів. Тут варто зазначити, що даний метод стосується власного руху системи, яким є відпрацювання нею ненульових початкових умов. Поряд з цим на характер вимушеного руху САР за зовнішньою дією можуть впливати і її нулі, якими є корені чисельника ПФ за цією дією. В нашій задачі йдеться саме про вимушений рух при відпрацюванні завдання. Проте, завдяки відсутності в ПФ (3) нулів, цей вимушений рух матиме характер вільного руху САР. Звідси ясно, що необхідна монотонність перехідної функції системи за завданням буде отримана при монотонному чи аперіодичному характері її власного руху.

Із знаменника ПФ (3) отримаємо перетворене характеристичне рівняння

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0, \quad \text{де } C_1 = (4+b) / 4bT_{\mu}; \quad C_2 = 1 / 4bT_{\mu}^2; \quad C_3 = 1 / 32dbT_{\mu}^3.$$

Параметри Вишнеградського X та Y визначатимуться як $X = C_1 / \sqrt[3]{C_3}$; $Y = C_2 / \sqrt[3]{C_3^2}$.

Розкриваючи ці вирази, маємо

$$X = (4+b) \sqrt[3]{4db} / 2b; \quad Y = \sqrt[3]{(4db)^2} / b. \quad (4)$$

У площині $X - Y$ на рис. 2 показана діаграма зон параметрів САР положення. На ньому крива 1 є гіперболою Вишнеградського, що описується рівнянням $XY = 1$. Ця крива поділяє всю площину на зони I–III, де система стійка ($XY > 1$), та на зону IV, де система нестійка ($XY < 1$). Кривою 2 виокремлюється зона II, що є зоною монотонних перехідних процесів в САР. У зоні III процеси коливальні, а у зоні I, що обмежується кривими 2 та 3, – перехідні процеси в САР аперіодичні. Крива 3 описується рівнянням

$$4(X^3 + Y^3) - 18XY - X^2 Y^2 + 27 = 0. \quad (5)$$

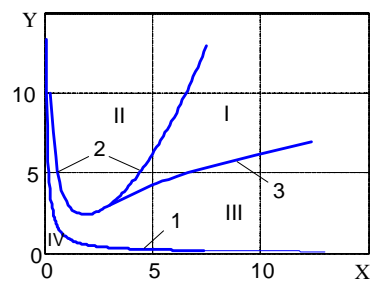


Рис. 2

Підставляючи у (5) вирази (4), отримаємо рівняння для визначення критичного (мінімально можливого) значення d_0 параметра d у вигляді

$$d_0^2 [128b - 8(4+b)^2] + d_0 [4(4+b)^3 - 72b(4+b)] + 54b^2 = 0. \quad (6)$$

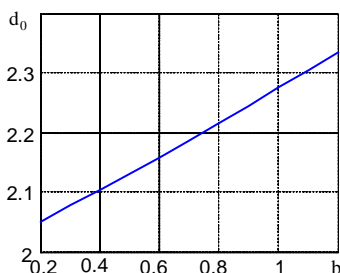


Рис.3

На рис. 3 показана крива $d_0 = f(b)$, що отримана розв'язуванням (6) для $b \in [0,2, 1,2]$. Застосувавши метод поліноміальної апроксимації до цієї кривої, одержимо її аналітичний опис

$$d_0 = 0,025b^2 + 0,25b + 2. \quad (7)$$

З формули (7) та рис. 3 можна зробити висновок, що $\lim_{b \rightarrow 0} d_0 = 2$. Рівність $d = d_0$ відповідатиме кривій 3 на рис. 2, що є межею зон I та III.

Отже, ми отримали умову забезпечення відсутності перерегулювання в перехідній функції САР положення ЕМС з МРП. Ця умова полягає у тому, що визначений при синтезі системи номінальний коефіцієнт передачі регулятора K_{reg} слід зменшити в $d \geq d_0$ раз, де d_0 визначається за графіком на рис. 3 або за виразом (7) як функція параметра b регулятора.

Треба відзначити, що в разі істотних варіацій параметрів САР може статися так, що реальні значення X та Y на рис. 2 переміщуватимуться в зону коливальних процесів III. Для уникнення такого результату слід вибирати $d = d_0 + \Delta d$, де $\Delta d > 0$ – коефіцієнт запасу. У цьому випадку при проектуванні системи рекомендується попередньо провести дослідження натурної або математичної моделі САР при максимально можливих варіаціях її параметрів і визначити потрібне для забезпечення монотонності перехідної функції значення Δd . Приклад такого дослідження наведено нижче.

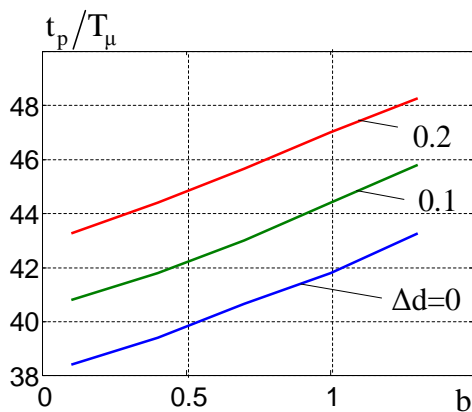


Рис. 4

Чисельні дослідження. Для виявлення деяких важливих характеристик системи було проведено чисельні дослідження шляхом математичного моделювання. На рис. 4 показано залежності часу регулювання t_p САР положення з МРП, що описується ПФ (3) та має монотонну перехідну функцію, від параметра b регулятора та коефіцієнта запасу Δd . При цьому під час моделювання в (3) задавалося $d = d_0 + \Delta d$, а значення $d_0 = f(b)$ визначалося за (7). Аналіз рис. 4 виявляє тенденцію до монотонного зростання часу регулювання t_p при збільшенні b , а також засвідчує збільшення t_p внаслідок зростання Δd .

Другим завданням чисельних досліджень було отримання оцінки реальних значень коефіцієнта запасу Δd при визначенні $d = d_0 + \Delta d$ для забезпечення монотонності перехідної функції САР в разі варіацій її параметрів. Для цієї задачі було вибрано об'єкт регулювання (ОР) у вигляді двигуна постійного струму з незалежним збудженням, якірне коло якого живиться від напівпровідникового перетворювача напруги. Структурна схема ОР показана на рис. 5, де u – керувальна дія, що задає напругу на виході перетворювача; I – струм якоря двигуна; M , M_H – електромагнітний момент двигуна та момент його навантаження відповідно; ω , φ – кутові швидкість та положення привода. САР положення побудована за принципом підпорядкованого керування. При цьому у контурі регулювання струму якоря застосовано ПІ-регулятор із налаштуванням на МО, а у контурі регулювання швидкості привода – ПІ-регулятор із налаштуванням на СО.

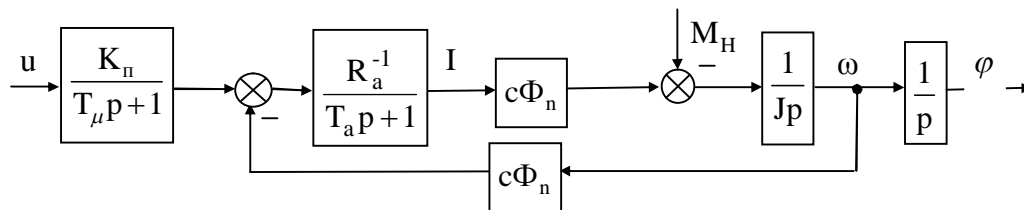


Рис. 5

Тобто замкнений контур швидкості тут описувався ПФ (1). У контурі регулювання положення привода застосовано МРП з ПФ (2). Номінальні значення параметрів ОР дорівнюють (у відповідних одиницях системи СІ): $K_H = 42,5$; $L_a = 0,046$; $R_a = 0,61$; $T_a = L_a / R_a = 0,0754$; $c\Phi_n = 3,67$; $J = 1$; $T_\mu = 0,005$. При дослідженні впливу варіацій параметрів на властивості системи параметри

об'єкта відхилялися у більшу або меншу сторону від своїх номінальних значень, а всі регулятори були налаштовані на номінальні параметри ОР. Варіація ΔX деякого параметра X обчислювалася як $\Delta X = [(X - X_n) / X_n] \times 100\%$, де X , X_n – реальне та номінальне значення варійованого параметра.

На першому етапі дослідження ставилося за мету визначити діапазони варіацій параметрів, де зберігається монотонний характер перехідної функції САР без введення коефіцієнта запасу, тобто при $\Delta d = 0$. Для активного опору обмотки якоря двигуна R_a та сумарного моменту інерції привода J отримано такі діапазони їхніх варіацій ΔR_a та ΔJ при $b = 0.1$ ($b = 1.2$): $-90\% \leq \Delta R_a \leq +160\%$ ($-135\% \leq \Delta R_a \leq +167\%$); $-20\% \leq \Delta J \leq +47\%$ ($-25\% \leq \Delta J \leq +49\%$). Як видно, допустимі межі змін параметрів при нульовому коефіцієнті запасу є досить істотними, причому вони розширюються при зростанні b .

На другому етапі дослідження, результати якого наведено в таблиці, розглядався варіант, коли варіації параметру виходили за межі, що допустимі при нульовому коефіцієнті запасу, а монотонність перехідної функції САР забезпечувалася шляхом вибору відповідного $\Delta d > 0$. Зокрема

ΔJ	b			
	0.1	0.4	0.8	1.2
-40%	$\frac{0.3}{48}$	$\frac{0.27}{42.8}$	$\frac{0.23}{40.6}$	$\frac{0.18}{40.2}$
+60%	$\frac{0.26}{43.2}$	$\frac{0.25}{44.4}$	$\frac{0.22}{45.4}$	$\frac{0.17}{46}$

тут малося на меті для варіацій $\Delta J = -40\%$ та $\Delta J = +60\%$ визначити Δd та t_p у залежності від параметра b .

Отримані дані представлено у таблиці у вигляді дроби, де чисельником є величина Δd , а знаменником – відносне значення часу регулювання t_p / T_μ . Аналізуючи

табличні дані, можна відзначити тенденцію до зменшення Δd при збільшенні b . Що стосується часу регулювання, то при додатній варіації J має місце аналогічне рис. 4 зростання t_p при збільшенні b . Проте, що цікаво, при від'ємній варіації J спостерігається зворотна тенденція. При цьому для деяких значень b час регулювання є меншим для варійованого об'єкту, ніж для не варійованого. Наприклад, з рис. 4 при $b = 1.2$, $\Delta d = 0$ отримуємо $t_p / T_\mu = 42.8$, а з таблиці при $\Delta J = -40\%$, $b = 1.2$ маємо $t_p / T_\mu = 40.2$.

Підсумки. Визначено умову монотонного характеру перехідної функції електропривода підпорядкованої структури з модифікованим регулятором положення шляхом використання розширеної діаграми Вишнеградського. Проведено чисельні дослідження впливу варіацій параметрів об'єкта на властивості системи. Забезпечення монотонності в реакції на завдання є важливим для систем автоматичного керування положенням промислових роботів, маніпуляторів та металообробних верстатів.

1. Михайлов О.П. Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов : учебник для вузов. – М. : Машиностроение, 1990. – 304 с.

2. Попович М.Г. Теорія автоматичного керування : підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл. – К. : Либідь, 2007. – 656 с.

3. Приймак Б.І. Модифікований регулятор положення для електроприводів підпорядкованої структури з типовим налаштуванням контурів // Праці Ін-ту електродинаміки НАН України. – 2008. – № 1 (19). – С. 70–73.

Надійшла 10.09.2009

УДК 621.313.32

Ю.В.Васьковський, докт.техн.наук, А.А.Гераскин (Нац. техн. ун-т України «КПІ», Київ)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В КОРТКОЗАМКНУТОМ АСИНХРОННОМ ДВИГАТЕЛЕ С ПОВРЕЖДЕННОЙ ОБМОТКОЙ РОТОРА

Сформирована математическая модель для анализа электромагнитных полей в короткозамкнутых асинхронных двигателях при наличии поврежденной обмотки ротора. Показано, что сравнительный анализ спектрограмм магнитной индукции позволяет проводить эффективную диагностику характера поврежденной обмотки ротора.

Сформовано математичну модель для аналізу електромагнітних полів в короткозамкнених асинхронних двигунах при наявності ушкоджень обмотки ротора. Показано, що порівняльний аналіз спектрограм магнітної індукції дозволяє проводити ефективну діагностику характеру ушкоджень обмотки ротора.

Введение. Мощные асинхронные двигатели (АД) с короткозамкнутой обмоткой ротора типа «беличья клетка» широко применяются для привода механизмов собственных нужд ТЭС и АЭС, на электро-транспорте и в ряде ответственных технологических систем. Условия эксплуатации таких двигателей, как правило, характеризуются высоким уровнем нагрузок, частыми пусками, быстрыми изменениями режимов работы, высоким уровнем вибраций, повышенным нагревом и другими факторами, снижающими надежность их функционирования и обуславливающими повышенную повреждаемость.

Одним из наиболее нагруженных узлов конструкции АД является короткозамкнутая обмотка ротора. Повреждения обмотки ротора в двигателях собственных нужд и тяговых двигателях составляют около 80% всех повреждений, связанных с ротором АД [8]. Разрушение конструкции обмотки ротора возникает не только из-за первичных технологических дефектов ее изготовления (некачественная пайка стержней и короткозамыкающих колец, наличие пустот, каверн и трещин в материале), но и в результате постепенной деградации конструкции в условиях высоких нагрузок. Постепенное ослабление крепления стержней в пазах ротора ведет к увеличению их вибрации, образованию и быстрому росту трещин и затем – к обрыву стержней. Поломка хотя бы одного стержня ведет к нарушению симметрии параметров обмотки ротора и, как следствие, к существенному ухудшению всех эксплуатационных показателей АД. При этом, как показано в работе [3], возникают условия для дальнейшего ускоренного разрушения обмотки ротора и внезапного аварийного отказа АД.

Известен ряд методов непрерывного контроля и диагностики дефектов обмотки ротора АД. Среди них следует выделить методы вибрационной диагностики [7] и спектрального анализа тока обмотки статора [6,8]. Эти методы основаны на регистрации изменений вибраций или токов обмотки статора, возникающих при появлении в клетке дефектных стержней.

Известно, что повреждение «беличьей клетки» ведет к нарушению симметрии распределения токов в стержнях клетки и, как следствие, к деформации магнитного поля в воздушном зазоре. При этом интенсивность и характер деформации поля зависит от объема и характера повреждений клетки. Поэтому достоверный анализ электромагнитного поля короткозамкнутого АД методами математического моделирования позволяет не только идентифицировать вид повреждения обмотки его ротора, но и служит основой для систем контроля и диагностики технического состояния АД. Алгоритмы диагностики основаны на сравнительном анализе результатов расчета электромагнитного поля в АД при различных повреждениях обмотки ротора и текущих экспериментальных данных по измерению магнитного поля в воздушном зазоре.

В статье сформирована математическая модель и приведены результаты моделирования магнитного поля АД при наличии поврежденных стержней обмотки ротора.

Математическая модель. Общее векторное уравнение для расчета распределения электромагнитного поля в активной зоне АД в статорной системе координат имеет следующий вид [1]:

$$\Delta \bar{A} - \mu\gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \mu\gamma\omega_R (\bar{R} \times \text{rot } \bar{A}) = -\mu \bar{J}_{\text{стоп}} + \mu\gamma \text{grad } \varphi, \quad (1)$$

где \bar{A} – векторный магнитный потенциал; μ, γ – магнитная проницаемость и электропроводность среды; $\bar{J}_{\text{стоп}}$ – плотность посторонних токов; ω_R – угловая скорость вращения ротора, \bar{R} – радиус-вектор произвольной точки; $\text{grad } \varphi$ – градиент скалярного электрического потенциала. Для величин, периодически изменяющихся во времени с угловой частотой ω , для двумерных полей в декартовых координатах уравнение (1) преобразуется в следующее скалярное уравнение относительно комплексной амплитуды единственной аксиальной составляющей векторного магнитного потенциала \dot{A}_z :

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} - j\omega\mu\gamma \dot{A}_z - \mu\gamma\omega_R \left(x \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} + y \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} \right) = -\mu \dot{J}_{\text{зстоп}} + \mu\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

В тех случаях, когда рассмотрение задачи ведется в роторной системе координат, принимаем $\omega = \omega_1 s$, $\omega_R = 0$ и из (2) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} - j\omega_1 s \mu\gamma \dot{A}_z = -\mu \dot{J}_{\text{зстоп}} + \mu\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3)$$

где ω_1 – угловая частота вращения поля статора, s – скольжение ротора.

Как показано в [4], использование роторных координат в большинстве случаев является предпочтительным. Слагаемое $\mu\gamma \partial\varphi/\partial z$ в правой части характеризует источники поля, обусловленные появлением свободных электрических зарядов на торцах ротора из-за несимметричности конструкции клетки ротора. Например, если один из стержней клетки отсоединился от короткозамыкающего кольца и ток по нему не протекает, то в любой момент времени суммарное сопротивление клетки для токов одного направления не равно ее сопротивлению для токов другого (обратного) направления. В результате при протекании тока на торцах ротора накапливаются свободные заряды, которые влияют на распределение поля в активной зоне. При этом предполагается, что оторванный стержень не имеет электрического контакта с магнитопроводом ротора. Приближенно предполагая $\partial\varphi/\partial z \approx \Delta\varphi/\Delta z = \Delta\varphi/L_R$, где L_R – активная длина ротора, при решении уравнений (2), (3) следует задать разность потенциалов $\Delta\varphi$ между торцами ротора. Заранее эта величина неизвестна, и для ее задания необходимо использовать условие непрерывности тока. Адекватное решение задачи должно удовлетворять следующему требованию: сумма интегралов плотностей токов j_k по сечению всех стержней клетки N_R должна равняться нулю

$$\sum_{k=1}^{k=N_R} \int_{S_{Rk}} j_k ds = 0, \quad (4)$$

т.е. суммарный ток, протекающий в одном направлении поперечного сечения ротора, равен суммарному току, текущему в обратном направлении. Условие (4) автоматически соблюдается для симметричной конструкции клетки, при которой $\Delta\varphi = 0$. При наличии поврежденных стержней величина $\Delta\varphi$ подбирается методом последовательных приближений до соблюдения условия (4) с заданной погрешностью. Следует подчеркнуть, что в связи с нелинейностью зависимостей $\mu(A_z)$ для ферромагнитных сердечников статора и ротора нелинейное уравнение (3) решается итерационными методами, т.е. итерации должны одновременно совершаться как по μ , так и по $\Delta\varphi$.

Расчетной областью является поперечное сечение АД (рис.1, а). Уравнение (3) дополняется граничными условиями, в качестве которых задаются однородные граничные условия первого рода

на внешней поверхности ярма (внешней границе расчетной области G): $\dot{A}_z \Big|_G = 0$. Принятие этого граничного условия означает пренебрежение магнитными потоками рассеяния из ярма статора во внешнее пространство.

На рис. 1, *a* показана общая картина электромагнитного поля АД-5000 в номинальном режиме при наличии двух расположенных рядом поврежденных стержней ротора, а на рис.1, *б* – фрагмент картины поля в зоне поврежденных стержней.

Из рис. 1, *б* видно, что силовые линии поля глубоко проникают в ротор в месте его повреждения, поскольку в этом месте отсутствуют токи, вытесняющие поле в зазор. При этом силовые линии вначале пересекают зазор со стороны статора в направлении ротора, а затем, вытесняясь токами целых стержней (закрашены темным цветом), пересекают воздушный зазор в обратном направлении. В результате над поврежденным участком ротора вектор магнитной индукции не только резко меняет свою величину, но даже изменяет свое направление (знак). Это хорошо видно из приведенных далее кривых распределения нормальной составляющей магнитной индукции вдоль длины воздушного

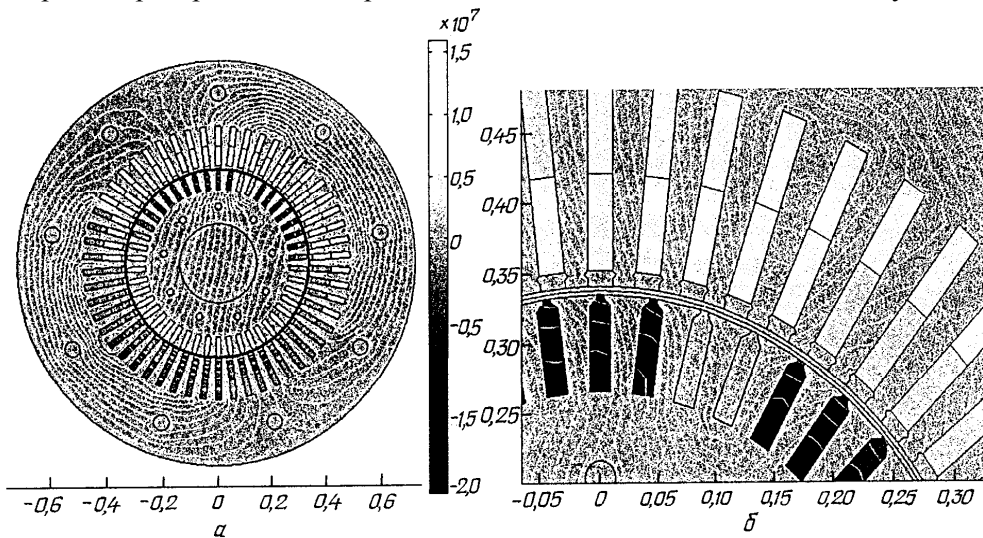


Рис. 1

зазора.

Моделирование поврежденных стержней клетки ротора осуществляется заданием значения электропроводности $\gamma = 0$ в тех пазах ротора, в которых находятся поврежденные стержни. Токи в них не протекают. В остальных пазах с неповрежденными стержнями задается реальная электропроводность материала клетки (алюминий

или медь). Такой способ позволяет моделировать различные варианты повреждений клетки ротора, в том числе различное количество поврежденных стержней ротора и разное их положение.

Основными источниками электромагнитного поля являются плотности сторонних токов в пазах статора, в которых уложены три фазы обмотки статора,

$$\dot{J}_{A\text{стор}} = I_m / S_{II},$$

$$\dot{J}_{B\text{стор}} = -I_m [\cos(-2\pi/3) - j \sin(-2\pi/3)] / S_{II}, \quad (5)$$

$$\dot{J}_{C\text{стор}} = -I_m [\cos(-4\pi/3) - j \sin(-4\pi/3)] / S_{II},$$

где I_m – амплитуда тока в фазе статора; S_{II} – площадь сечения паза статора.

После решения задачи (3)–(5) анализируются особенности распределения электромагнитного поля в активной зоне двигателя, а также кривая распределения магнитной индукции вдоль длины воздушного зазора. С помощью быстрого дискретного преобразования Фурье [1,5] выполняется спектральный анализ кривых индукции, полученных для разных расчетных вариантов.

Результаты моделирования АД с поврежденными стержнями ротора на примере двигателя собственных нужд электростанций типа АД-5000. Двигатель имеет следующие данные: мощность $P=5000$ кВт; номинальное линейное напряжение $U_{\text{нл}}=6000$ В; номинальный фазный ток $I_{\text{нф}}=314,59$ А; число полюсов $2p=2$; воздушный зазор $\delta=6$ мм; число пазов статора и ротора $Z_1=54$, $Z_2=46$; номинальное

скольжение $S=0,005$; материал стержней ротора – медь. Численная реализация модели (3)–(5) выполнена с помощью метода конечных элементов в пакете программ COMSOL 3.4.

Для получения адекватного численного решения уравнения (3) при несимметричной клетке ротора необходимо правильно задать разность электрических потенциалов $\Delta\varphi$ между торцами ротора. Результаты численных экспериментов по выбору $\Delta\varphi$ отображены на рис. 2, на котором даны расчетные

зависимости невязки полного тока ротора в выражении (4) от величины $\Delta\varphi$ для различного числа поврежденных стержней ротора (1,2 или 3). Поврежденные стержни были выбраны из группы стержней, в которых в расчетный момент времени протекают токи отрицательного знака. При этом для выполнения условия (4) величина $\Delta\varphi$ должна также иметь отрицательное значение, чтобы усилить влияние токов отрицательного знака в оставшихся неповрежденных стержнях (скомпенсировать отсутствующие токи ротора отрицательного знака). Из рис. 2 видно, что минимум невязки полного тока ротора для любого числа поврежденных стержней ротора достигается при $\Delta\varphi \approx -0,01$ В. Такое малое значение $\Delta\varphi$ объясняется малым собственным сопротивлением стержней ротора. При $\Delta\varphi = -0,01$ В результирующая невязка не превышает 0,1...0,3 % от величины суммарного тока ротора всех стержней одного знака (расположенных под одним полюсом), т.е. в реальных расчетах условие (4) выполняется с весьма малой погрешностью.

На рис. 3, а показано распределение индукции для АД с неповрежденным ротором, а на рис. 3, б, в и 3, г – распределение индукции при наличии соответственно одного, двух и трех поврежденных стержней. Неравномерное распределение локальных экстремумов на кривой индукции для неповрежденного АД вдоль полюсного деления обусловлено результатом наложения зубцовых гармоник разных частот, соответствующих числам $Z_1=54$, $Z_2=46$.

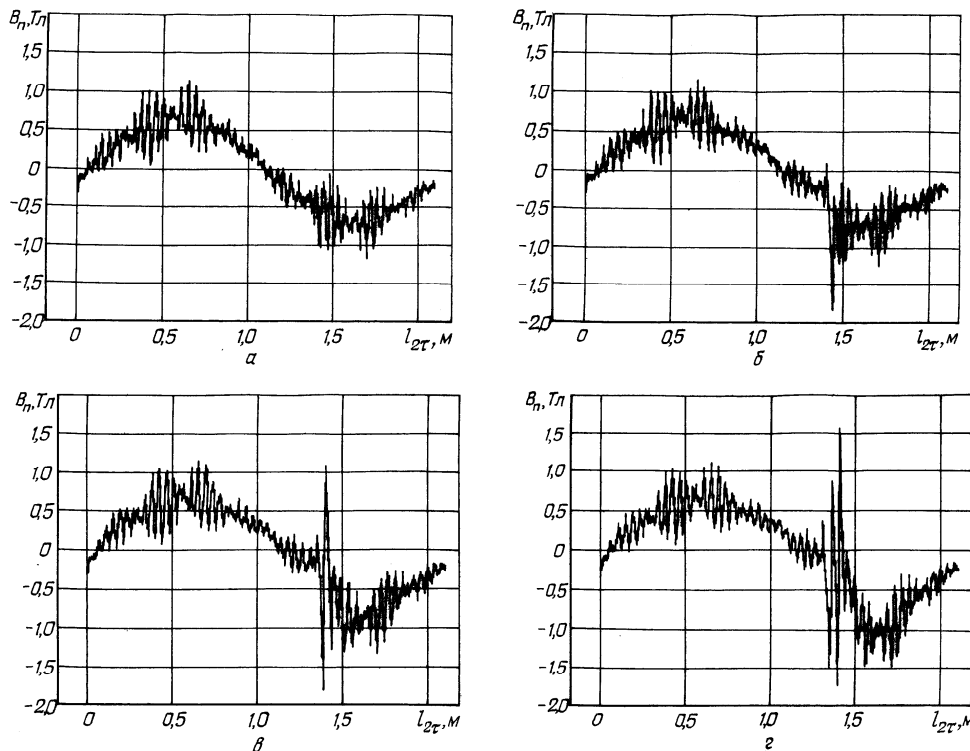


Рис. 3

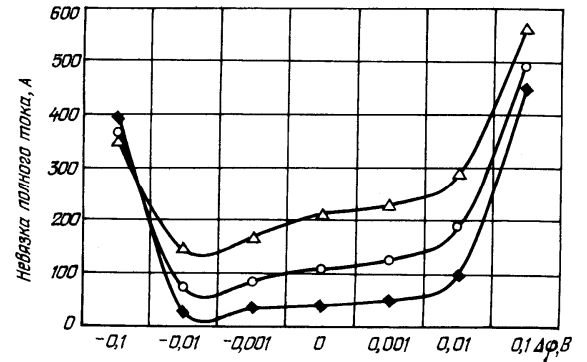


Рис.2

На рисунках хорошо видна локальная деформация магнитного поля в воздушном зазоре над поврежденным участком ротора. Причем интенсивность деформации возрастает с увеличением количества поврежденных стержней. Такую деформацию поля несложно выявить экспериментально с помощью соответствующей системы датчиков.

Локальное возмущение магнитной индукции пульсирует в роторе с частотой скольжения $f_2 = f_1 s$ по мере того, как токи ротора перемещаются относительно повреж-

денного участка клетки. Например, при расположении поврежденных стержней в середине токового полюса ротора искажение индукции максимально. В момент времени, когда стержни располагаются между токовыми полюсами ротора, возмущение практически отсутствует. Локальное возмущение индукции перемещается вместе с ротором и индуцирует в фазах неподвижной обмотки статора дополнительную ЭДС. При одном поврежденном стержне ротора эта ЭДС имеет импульсный характер с длительностью импульса $t_u = T_1 p / Z_2$, где T_1 – период колебания основной частоты тока статора, p – число пар полюсов, Z_2 – число зубцов ротора. Частота следования импульсов равна $f_u = f_1(1-s)$, а амплитуда ЭДС модулирована частотой скольжения. Характер этой ЭДС сложным образом зависит от типа повреждения клетки, числа полюсов АД и других факторов. Измерение дополнительной ЭДС и соответствующих ей токов лежит в основе метода диагностики повреждений ротора, основанного на анализе тока обмотки статора.

Локальные деформации магнитного поля в воздушном зазоре АД изменяют также характер и интенсивность действующих на статор вибровозмущающих сил электромагнитного происхождения, что изменяет вибрацию сердечника статора. Анализ изменений вибраций статора используется в методах вибрационной диагностики повреждений клетки ротора.

Для повышения эффективности диагностики повреждений клетки ротора АД целесообразно выполнять спектральный анализ приведенных кривых магнитной индукции. На рис. 4, а показана спектрограмма кривой магнитной индукции для АД с неповрежденным ротором, а на рис. 4, б, в, г –

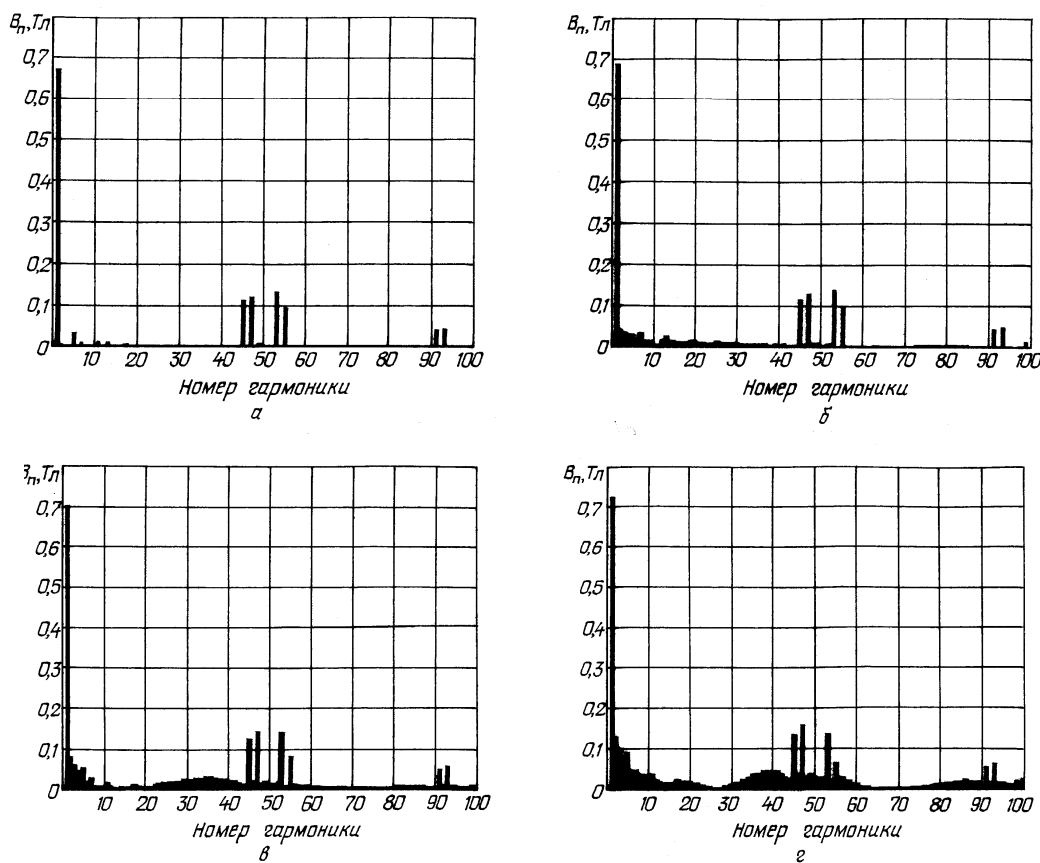


Рис. 4

спектрограммы магнитной индукции соответственно при наличии в клетке одного, двух и трех поврежденных стержней. Из сравнительного анализа спектрограмм видно, что с увеличением числа поврежденных стержней ротора в спектрах магнитной индукции появляется большое количество высших гармоник, которые свидетельствуют о наличии дефекта. Идентификация и эффективная диагностика дефектов должна базироваться на анализе разностных спектрограмм, полученных

вычитанием спектрограмм поврежденного и целого АД. При этом отсеиваются шумы и остаются лишь характерные для данного дефекта вновь появившиеся гармоники, которые используются в качестве диагностического признака для идентификации повреждений обмотки ротора. Анализ особенностей распределения электромагнитного поля в АД с поврежденной клеткой ротора показывает, что однажды возникнувший дефект клетки способствует дальнейшему быстрому разрушению клетки и аварийному выходу двигателя из строя. В частности, в целых стержнях ротора, которые примыкают к поврежденному участку клетки, существенно увеличивается плотность тока и

джоулевы потери. Так, при наличии одного поврежденного стержня в соседних целых стержнях плотность тока возрастает в 1,3 раза, а потери – в 1,69 раза. При наличии двух расположенных рядом поврежденных стержней ротора увеличение плотности тока и потерь в целых соседних стержнях составляет 1,51 и 2,28 раза, а при трех поврежденных стержнях – соответственно 1,71 и 2,92 раза. В результате из-за различного нагрева отдельных стержней клетки в ней возникает существенная неравномерность термомеханических деформаций и последующее ее быстрое разрушение.

Основное преимущество разработанной полевой модели и соответствующей ей расчетной методики состоит в том, что они позволяют рассчитать электромагнитное поле АД и спектрограммы магнитной индукции в воздушном зазоре для любого варианта повреждений клетки ротора, в том числе и при наличии нескольких поврежденных стержней, расположенных в различных местах клетки. При этом можно установить взаимнооднозначное соответствие конкретного вида дефекта с конкретным видом спектрограммы магнитной индукции и использовать ее при проведении мониторинга и диагностики технического состояния ротора ответственных АД. Такой подход позволяет повысить чувствительность методов диагностики для выявления повреждений «беличьей клетки» ротора на ранних стадиях их развития, что повышает надежность работы АД.

Выводы. 1. Предложена полевая математическая модель для анализа электромагнитных процессов в короткозамкнутых АД при наличии поврежденных стержней «беличьей клетки» ротора. Модель учитывает влияние скалярного электрического потенциала между торцами ротора и позволяет выполнить анализ электромагнитного поля АД при произвольных повреждениях ротора.

2. Показано, что при наличии дефектов ротора наблюдаются деформации магнитного поля в воздушном зазоре АД, интенсивность и характер которых существенно зависят от объема и характера повреждений ротора.

3. Установлено взаимнооднозначное соответствие между изменением нормальной составляющей магнитной индукции в воздушном зазоре и изменениями ее спектров. По этим изменениям можно судить не только о наличии поврежденных стержней «беличьей клетки», но и об их количестве и даже об их взаимном положении в клетке.

5. Показано, что при появлении поврежденного стержня возникает существенный перегрев целых стержней, примыкающих к поврежденному участку ротора. При этом появляется неравномерность термомеханических деформаций клетки и ее ускоренное дальнейшее разрушение.

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
2. Васьковський Ю.М. Польовий аналіз електричних машин. – Київ, НТУ України «КПІ», 2007. – 191 с.
3. Васьковський Ю.М., Гайдєнко Ю.А. Дослідження методами теорії поля характеристик асинхронних двигунів при несиметрії параметрів ротора // Електротехніка і електромеханіка. – 2007. – №3. – С.19–22.
4. Васьковський Ю.М., Гайдєнко Ю.А. Принцип относительности и выбор системы координат при анализе электромагнитного поля в электрических машинах // Електротехніка і електромеханіка. – 2008. – №2. – С.11–14.
5. Оптенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.
6. Петухов В.С., Соколов В.А. Диагностика состояния электродвигателей. Метод спектрального анализа потребляемого тока // Новости электротехники. – 2005. – № 1(31). – С. 50–52.
7. Русов В.А. Спектральная вибродиагностика, www.vibrocenter.ru/book8.htm, 1996.
8. Савельев В.А., Назарычев А.Н., Скоробогатов А.А. Оценка потребности в ремонте асинхронного электродвигателя с учетом контроля его состояния и конструктивных особенностей // Вестник ИГЭУ – Иваново, ИГЭУ, 2005. – Вып. 1. – С. 89–91.

Надійшла 16.09.2009

И.А.Орловский, канд. техн. наук (Запорожский национальный технический университет)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИЗЕЛЯ И СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА ТЯГОВОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА ДИЗЕЛЬ-ПОЕЗДА НА НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Разработаны структуры и получены общие расчётные зависимости для весовых коэффициентов функциональной рекуррентной нейронной сети (ФРНС), предназначенной для представления моделей синхронного генератора и дизеля с системой управления тягового электропривода дизель-поезда по их известной математической модели и по данным режима работы оборудования. Выполнено исследование методом имитационного моделирования разработанных моделей в виде ФРНС и из их весовых коэффициентов идентификация внутренних параметров оборудования.

Розроблені структури та отримані загальні розрахункові залежності вагових коефіцієнтів функціональних рекуррентних нейронних мереж (ФРНМ), що призначені для представлення моделей синхронного генератора та дизеля з системою керування тягового електроприводу дизель-потягу за їх відомими математичними моделями та за даними режиму роботи обладнання. Виконано дослідження методом імітаційного моделювання розроблених моделей у вигляді ФРНМ та за їх вагових коефіцієнтів ідентифікація внутрішніх параметрів обладнання.

Для удовлетворения современных требований к комфорту, скорости движения, экономичности перевозок с 2004 года холдинговая компания “Лугансктепловоз” приступила к разработке и производству новых дизель-поездов (ДП) серии ДЭЛ с асинхронным тяговым электроприводом (АТЭП). Трудности создания надёжной и экономичной системы управления (СУ) такого тягового привода вызваны рядом факторов: сложностью математического описания совместной работы дизеля, генератора и АТЭП; отсутствием математических моделей, с высокой точностью описывающих работу тягового привода в изменяющихся условиях работы ДП и внутренних параметров оборудования.

В научно-технической литературе математические модели узлов тягового привода рассмотрены в ряде работ с различной степенью детализации. Так в [5] подробно рассматривается система регулирования частоты вращения вала дизель-генератора, приводятся общие выражения его математической модели. В [3] показана возможность снижения расхода топлива до 10% тепловоза 2ТЭ116 за счет повышения коэффициента полезного действия дизеля при совпадении тепловозной характеристики дизеля с его экономичной характеристикой. В [1, 6] описано устройство ДП ДЭЛ-02 и математические модели СУ поездом, синхронного генератора (СГ), АТЭП и механической системы с учётом диссипативных сил. В [4, 7] предложена математическая модель усовершенствованной СУ тяговым приводом ДП, часть структурной схемы которой показана на рис. 1. Принцип работы этой системы следующий: сначала машинист запускает дизель до угловой скорости (скорости холостых оборотов) и на выходе СГ возникает соответствующий уровень напряжения. Сигнал задания скорости поезда $V_{зад}$ от контролера машиниста КМ поступает на векторные СУ каждого асинхронного тягового двигателя. Силовые электрические преобразователи, векторные СУ, асинхронные двигатели и механическая часть ДП обозначена блоком "АТЭП и механическая часть ДП". Датчик мощности ДМ определяет мощность нагрузки дизеля P_D . Нелинейное звено (НЗ) формирует сигнал корректировки задания скорости дизеля в соответствии с рабочей характеристикой дизеля [7]. При возрастании нагрузки СГ (например, при включении отопления, при трогании поезда с места или движении на гору) увеличивается потребляемый ток, возрастает уровень сигнала P_D , который НЗ преобразует в сигнал корректировки задания скорости дизеля $\Delta\omega_D$, что приводит к увеличению скорости дизеля и его мощности. В такой системе обратная связь по мощности нагрузки СГ определяет необходимую текущую мощность дизеля, что не требует ручного поддержания скорости ДП машинистом и исключает работу дизеля в недогруженном режиме. Для обеспечения экономичной работы дизеля по схемам, предложенным в [4, 7], требуется во время работы подстройка СУ скоростью дизеля при изменении внутренних параметров оборудования.

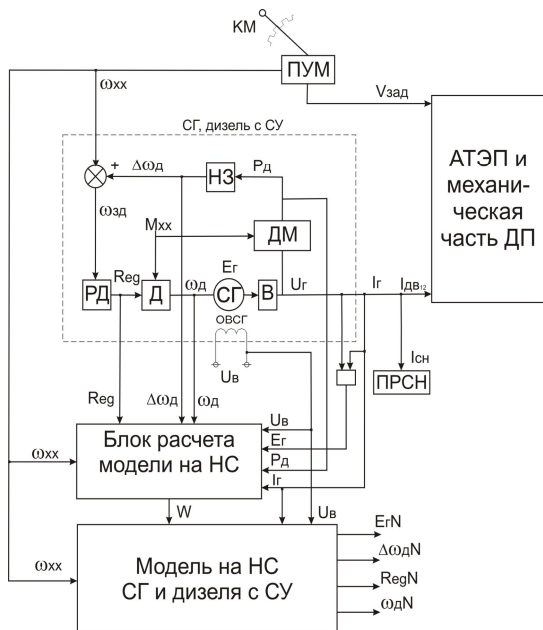


Рис. 1

Для реализации моделей объектов в последнее время широко используются искусственные нейронные сети (НС), способные обучаться и обладающие возможностями универсальных аппроксиматоров [2, 13]. Снижения времени поиска структуры модели на НС и внутренних её параметров можно достигнуть, максимально используя уже известную информацию о структуре математической модели объекта. Перспективно создавать модель на рекуррентных НС со структурой, подобной структуре объекта. В [8] разработана общая методика построения моделей нелинейного объекта на полиномиальных рекуррентных НС (ПРНС) по его известной математической модели и исследованы полученные модели методом математического моделирования. Весовые коэффициенты ПРНС могут быть найдены непосредственно расчётом из математической модели объекта [8, 9, 11], поиском с помощью градиентных алгоритмов обучения [10] или расчётом этих коэффициентов из данных режима работы объекта [9–11]. При "прозрачности" модели имеется возможность по весовым коэффициентам НС идентифицировать значения внутренних параметров объекта [11, 12].

Анализ научно-технической литературы показал, что разработка с учётом усовершенствованного управления общей модели на НС процессов в дизеле и СГ тягового привода ДП, расчёт этой модели в процессе работы и идентификация внутренних параметров рассматриваемого оборудования из полученной модели является актуальной задачей, решение которой в настоящее время отсутствует.

Целью статьи является разработка методики расчёта на рекуррентной НС математической и имитационной моделях СГ и дизеля с СУ в тяговом приводе ДП с усовершенствованным управлением дизеля (как из известных значений внутренних параметров, так и из данных режима работы оборудования), а также идентификация внутренних параметров СГ, дизеля, регулятора скорости дизеля и НЗ из весовых коэффициентов их моделей на НС.

Математическая модель СГ и дизеля с СУ. В [7,8] предложена математическая модель усовершенствованной СУ дизелем и СГ. В этой модели используются следующие допущения: момент сопротивления холостого хода на валу дизеля M_{XX} принимается известным и постоянным; рабочая характеристика дизеля принимается неизменной (не зависит от температуры, качества топлива, износа деталей и других факторов); выпрямление тока идеальное, пульсации тока, вызванные работой выпрямителя и инверторов принимаются равными нулю; принимается в установившемся режиме пропорциональная зависимость ЭДС генератора E_G от частоты вращения и магнитного потока; передаточные функции дизеля и СГ по возмущению и управлению представляются в виде инерционных звеньев [5].

Управляющим воздействием на дизель является положение h_p рейки топливного насоса дизеля, возмущающим — момент сопротивления M_{CD} , выходным сигналом — скорость дизеля ω_D . Управляющими сигналами СГ являются скорость дизеля ω_D и напряжение возбуждения U_B , возмущающее воздействие — статорный ток генератора I_G , выходной сигнал — напряжение на зажимах генератора U_G . Общую математическую модель дизеля и СГ каждого моторного вагона можно представить в следующем виде [7]:

$$I_G = I_{D12} + I_{CH}, \quad U_G = \frac{\omega_D \cdot k_B \cdot U_B}{T_B p + 1} - I_G R, \quad P_D = (U_G + I_G R) \cdot I_G + M_{XX} \cdot \omega_D, \quad \Delta \omega_D = \frac{k_{H3}(P_D)}{T_{H3} p + 1},$$

$$\omega_{3D} = \omega_{XX} + \Delta \omega_D, \quad \omega_{3D} = h_p \cdot k_\mu, \quad M_{CD} = P_D / \omega_D, \quad \omega_D = h_p \frac{k_\mu}{T_\mu p + 1} - M_{CD} \frac{k_\lambda}{T_\lambda p + 1}, \quad (1)$$

где k_B — коэффициент цепи возбуждения СГ (для упрощения модели принят постоянным); T_μ и T_λ — постоянные времени дизеля по управляющему и возмущающему воздействиям соответственно; k_μ и

k_λ – коэффициенты передачи дизеля по управлению и возмущению соответственно; $\omega_{3Д}$ – задание скорости дизеля; $\omega_{ХХ}$ – скорость вала дизеля на холостом ходу; $T_{НЗ}$ – постоянная времени НЗ; R – активное сопротивление обмотки статора СГ; T_B – постоянная времени обмотки возбуждения СГ; $I_{Д12}$ – суммарное значение потребляемых токов двух асинхронных двигателей, приведенные к току СГ; $I_{СН}$ – ток оборудования собственных нужд. Характеристика НЗ в установившемся режиме $\Delta\omega_D = k_{НЗ}(P_D)$, вычисленная из характеристики дизеля [1], приведена в табл. 1 [7].

Таблица 1

P_D , кВт	25	45	75	115	160	225	300	430	505
$\Delta\omega_D$, об/мин	0	150	300	450	600	750	900	1100	1200

Согласно последнему уравнению системы (1), скорость дизеля представлена в виде разности составляющих, вызванных положением рейки топливного насоса ω_h и моментом нагрузки дизеля ω_M

$$\left. \begin{aligned} \omega_D = \omega_h - \omega_M, \quad \omega_h = h_p \frac{k_\mu}{T_\mu p + 1}, \quad \omega_M = M_{сд} \frac{k_\lambda}{T_\lambda p + 1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Второе уравнение системы (2) описывает управление скоростью дизеля без использования регулятора скорости, хотя на практике применяется ПИ регулятор скорости дизеля. Если обозначить выход регулятора скорости переменной $Re\ g2$, тогда вместо второго уравнения системы (2), с учётом имеющегося в регуляторе ограничения, используются следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_h = \frac{Re\ g2}{T_\mu p + 1}, \quad Re\ g1 = (h_p k_\mu - \omega_D)(k_{II} + k_i/p), \quad Re\ g2 = sat(Re\ g1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где k_{II} и k_i – пропорциональный и интегральный коэффициенты ПИ регулятора скорости дизеля; $Re\ g1$ – выход регулятора скорости дизеля до блока ограничения; $sat()$ – функция ограничения сигнала сверху и снизу. Введение двух переменных $Re\ g1$ и $Re\ g2$ необходимо для точного расчёта моделей на НС.

Во втором уравнении системы (1) первым членом является ЭДС генератора E_G

$$E_G = \frac{\omega_D \cdot k_B \cdot U_B}{T_B p + 1} \quad (4)$$

Ограничения задания системы вращения дизеля осуществляются ограничением выхода НЗ. Для осуществления более простой и точной идентификации нелинейности НЗ (табл. 1) обозначим сигнал до ограничения через $\Delta\omega_{1Д}$, а сигнал после ограничения – через $\Delta\omega_{2Д}$. При этом $\Delta\omega_{2Д} = \Delta\omega_D$.

С учётом сделанных обозначений систему (1) представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E_G = \frac{\omega_D \cdot k_B \cdot U_B}{T_B p + 1}, \quad \Delta\omega_{1Д} = \frac{k_{НЗ}(P_D)}{T_{НЗ} p + 1}, \quad Re\ g1 = (h_p k_\mu - \omega_D)(k_{II} + k_i/p), \quad \omega_h = \frac{Re\ g2}{T_\mu p + 1}, \\ \omega_M = M_{сд} \frac{k_\lambda}{T_\lambda p + 1}, \quad \omega_D = \omega_h - \omega_M, \quad P_D = E_G \cdot I_G + M_{ХХ} \cdot \omega_D, \quad I_G = I_{ДВ12} + I_{СН}, \\ \omega_{3Д} = \omega_{ХХ} + \Delta\omega_{2Д}, \quad \omega_{3Д} = h_p \cdot k_\mu, \quad M_{сд} = P_D / \omega_D, \quad Re\ g2 = sat(Re\ g1), \quad \Delta\omega_{2Д} = sat(\Delta\omega_{1Д}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Последние два уравнения системы (5) описывают имеющиеся ограничения сигналов. Входными сигналами модели являются: U_B , I_G , $\omega_{ХХ}$. Переменными вектора состояния системы являются: E_G , $\Delta\omega_{2Д}$, $Re\ g2$, ω_h , ω_M . При вычислении модели из данных режима работы измеряются следующие величины: ω_D , I_G , $\Delta\omega_{2Д}$, $Re\ g1$, $Re\ g2$, $M_{ХХ}$. Далее считаем известной ЭДС генератора E_G , которая вычисляется из второй формулы системы (1).

Расчет модели на НС СГ и дизеля с СУ. Построение структуры модели на НС выполняется согласно системе уравнений (5), в которой первые пять уравнений являются дифференциальными.

Переменные в этих уравнениях могут быть выражены через входные сигналы, элементы вектора состояния и их производные, используя остальные уравнения системы (5). Для получения модели в дискретном виде преобразуем дифференциальные уравнения из операторной во временную форму записи. Преобразование третьего уравнения системы (5) имеет вид

$$\operatorname{Re} g_1 = (h_P k_\mu - \omega_D) k_\Pi + \int k_i (h_P k_\mu - \omega_D) dt + HY, \quad (6)$$

где HY – начальные условия интегратора. Продифференцируем полученное выражение

$$\frac{d \operatorname{Re} g_1}{dt} - k_\Pi k_\mu \frac{dh_P}{dt} + k_\Pi \frac{d\omega_{2D}}{dt} = k_i (h_P k_\mu - \omega_D) + \frac{d(HY)}{dt}. \quad (7)$$

С учётом девятого и десятого уравнений системы (5) $h_P = k_\mu^{-1}(\omega_{XX} + \Delta\omega_D)$, тогда

$$\frac{dh_P}{dt} = \frac{d[k_\mu^{-1}(\omega_{XX} + \Delta\omega_{2D})]}{dt} = \frac{k_\mu^{-1} d\Delta\omega_{2D}}{dt}. \quad (8)$$

При выводе уравнений (7) и (8) принято, что не изменяются во времени ω_{XX} , k_Π и k_μ . В результате система дифференциальных уравнений из системы (5) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_\Gamma}{dt} &= -\frac{E_\Gamma}{T_B} + \frac{\omega_D \cdot k_B U_B}{T_B}, & \frac{d(\Delta\omega_{1D})}{dt} &= -\frac{\Delta\omega_{1D}}{T_{H3}} + \frac{k_{H3}(P_D)}{T_{H3}}, \\ \frac{d \operatorname{Re} g_1}{dt} &= k_\mu^{-1} k_\Pi \frac{d(\Delta\omega_{2D})}{dt} - k_\Pi \frac{d\omega_D}{dt} + k_\mu^{-1} k_i \omega_{xx} + k_\mu^{-1} k_i \Delta\omega_{2D} - k_i \omega_D + \frac{d(HY)}{dt}, \\ \frac{d\omega_h}{dt} &= -\frac{\omega_h}{T_\mu} + \frac{\operatorname{Re} g_2}{T_\mu}, & \frac{d\omega_M}{dt} &= -\frac{\omega_M}{T_\lambda} + \frac{M_{CD} k_\lambda}{T_\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из уравнений системы (5) выражение для момента сопротивления имеет вид

$$M_{CD} = \frac{P_\Gamma}{\omega_D} + M_{XX} = \frac{E_\Gamma I_\Gamma}{\omega_D} + M_{XX}. \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в пятое уравнение системы (9) и введя обозначения производных

$$D_{\Delta\omega_{Dn-1}} = (\Delta\omega_{2Dn} - \Delta\omega_{2Dn-1})/T, \quad D_{\omega_{Dn-1}} = (\omega_{Dn} - \omega_{Dn-1})/T, \quad (11)$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений в разностном виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{\Gamma n} &= E_{\Gamma n-1} - \frac{TE_{\Gamma n-1}}{T_B} + \frac{T\omega_{Dn-1} k_B U_{Bn}}{T_B}, \\ \Delta\omega_{1Dn} &= \Delta\omega_{1Dn-1} - \frac{T \cdot \Delta\omega_{1Dn-1}}{T_{H3}} + \frac{Tk_{H3}(P_{Dn-1})}{T_{H3}}, \\ \operatorname{Re} g_{1n} &= \operatorname{Re} g_{1n-1} + Tk_\mu^{-1} k_i \Delta\omega_{2Dn-1} + Tk_\mu^{-1} k_i \omega_{xxn} + Tk_\mu^{-1} k_\Pi D_{\Delta\omega_{Dn-1}} - \\ &\quad - Tk_\Pi D_{\omega_{Dn-1}} - Tk_i \omega_{Dn-1} + HY, \\ \omega_{hn} &= \omega_{hn-1} - \frac{T\omega_{hn-1}}{T_\mu} + \frac{T \operatorname{Re} g_2}{T_\mu}, \\ \omega_{Mn} &= \omega_{Mn-1} - \frac{T\omega_{Mn-1}}{T_\lambda} + \frac{TE_{\Gamma n-1} I_\Gamma k_\lambda}{\omega_{Dn-1} T_\lambda} + \frac{TM_{XX} k_\lambda}{T_\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где T – такт счёта, n – номер такта счёта.

Система уравнений (12) имеет пять дифференциальных уравнений и, следовательно [8, 9, 13], её модель на рекуррентной НС имеет 5 нейронов рекуррентного слоя. Нелинейность элементов системы может быть реализована функциональным преобразованием входных сигналов, сигналов вектора состояния и их производных.

При получении моделей нелинейных элементов, имеющих в математическом описании динамики конкретных объектов, можно поступать следующим образом. Если известно только, от каких величин имеется нелинейность, а математическое описание этой нелинейности не известно, тогда эта нелинейность представляется в виде полинома и может быть реализована на ПРНС. Если из ранее проведённых исследований известна структура математических выражений, описывающих нелинейность элементов, тогда для обеспечения более ясной (близкой к физическому представлению этих нелинейных зависимостей) структуры модели целесообразно не представлять нелинейность полино-

мом, а применить известную структуру математического описания для рассматриваемой нелинейности. В этом случае предлагается представлять модель в виде функциональной рекуррентной НС (ФРНС) (рис. 2). Входом блока функционального преобразования сигналов (рис. 2) является вектор Y , состоящий из входных сигналов u_1, \dots, u_m и сигналов вектора состояния x_1, \dots, x_q . Выходом этого блока является вектор h . При необходимости возможно объединение рассмотренных выше способов реализации нелинейного элемента, когда одни нелинейности реализуются полиномами, а другие — в виде известных нелинейных зависимостей. Рекуррентная НС, выполненная по такой структуре, как отмечалось выше, может быть названа ФРНС, частным случаем которой является ПРНС. В пакете Simulink структура ФРНС, представляющая модель СГ и дизеля с СУ, согласно системе уравнений (12), показана на рис. 3. Коэффициент НЗ k_{H3} реализуется на рис. 3 блоком "Calc_polynom", в котором вычисляется полином

$$k_{H3}(P_D) = k_{0H3} \cdot P_D^0 + k_{1H3} \cdot P_D^1 + \dots + k_{rH3} \cdot P_D^r, \quad (13)$$

где r — последний член полиномиального разложения. Блок "Calc_Pg" вычисляет мощность нагрузки P_D на валу дизеля.

Общие выражения расчёта весовых коэффициентов моделей на НС СГ и дизеля с СУ из данных режима работы оборудования. Для упрощения записи системы уравнений (12) при расчёте весовых коэффициентов ФРНС выполним обозначения присутствующих в уравнениях функциональных преобразований сигналов

$$\begin{aligned} G_{1n-1} &= \omega_{Dn-1} U_{Bn}, & G_{2n-1} &= \Delta\omega_{2Dn-1} + \omega_{XXn}, \\ G_{3n-1} &= E_{\Gamma n-1} I_{\Gamma n} / \omega_{Dn-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Составим вектор h_i , содержащий известные значения элементов вектора состояния, элементов входных сигналов, их производных и переменные, полученные функциональным преобразованием сигналов, следующим образом:

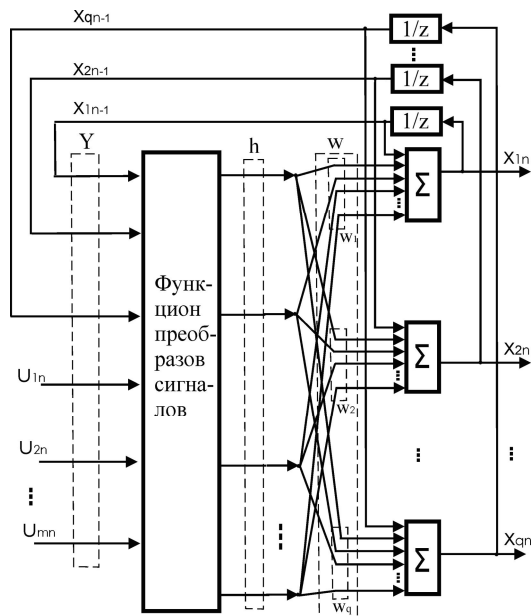


Рис. 2

$$h = [E_{\Gamma}, \Delta\omega_{1D}, \Delta\omega_{2D}, \text{Re } g_1, \text{Re } g_2, \omega_h, \omega_M, U_B, I_{\Gamma}, \omega_{XX}, D_{\Delta\omega_D}, D_{\omega_D}, \omega_D, G_1, G_2, G_3, 1, P_D]. \quad (15)$$

Переменные в дифференциальных уравнениях системы (12) будем размещать в той же последовательности, как и элементы вектора h . Введём обозначения весовых коэффициентов НС, при этом в обозначении первым индексом является номер уравнения в системе (12), а второй индекс, через запятую, есть номер переменной в векторе h , согласно табл. 2.

Таблица 2

E_{Γ}	$\Delta\omega_{1D}$	$\Delta\omega_{2D}$	$\text{Re } g_1$	$\text{Re } g_2$	ω_h	ω_M	U_B	I_{Γ}	ω_{XX}	$D_{\Delta\omega_D}$	D_{ω_D}	ω_D	G_1	G_2	G_3	1	P_D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	11	12	13	14	15	16	17	18

Выражения для вычисления весовых коэффициентов НС согласно системе уравнений (12) с учётом обозначений системы (14) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w_{1,1} &= -T/T_B, & w_{1,14} &= Tk_B/T_B, & w_{2,2} &= -T/T_{H3}, & w_{i,2,18} &= Tk_{H3}/T_{H3}, (i=0, \dots, r), \\ w_{3,11} &= Tk_{\mu}^{-1} k_{\Pi}, & w_{3,12} &= -Tk_{\Pi}, & w_{3,13} &= -Tk_i, & w_{3,15} &= Tk_{\mu}^{-1} k_i, & w_{4,5} &= -w_{4,6} = T/T_{\mu}, \\ w_{5,7} &= -T/T_{\lambda}, & w_{5,16} &= Tk_{\lambda}/T_{\lambda}, & w_{5,17} &= Tk_{\lambda} M_{XX}/T_{\lambda}. \end{aligned} \quad (16)$$

С учётом выполненных обозначений система (12) примет вид

$$\left. \begin{aligned}
 E_{\Gamma n} &= E_{\Gamma n-1} + w_{1,1} E_{\Gamma n-1} + w_{1,14} G_{1n-1}, \\
 \Delta \omega_{\Delta n} &= \Delta \omega_{\Delta n-1} + w_{2,2} \Delta \omega_{\Delta n-1} + w_{0,2,18} P_{\Delta n-1}^0 + w_{1,2,18} P_{\Delta n-1}^1 + \dots + w_{r,2,18} P_{\Delta n-1}^r, \\
 \operatorname{Re} g_{1n} &= \operatorname{Re} g_{1n-1} + w_{3,11} D_{\Delta \omega_{\Delta n-1}} + w_{3,12} D_{\omega_{\Delta n-1}} + w_{3,13} \omega_{\Delta n-1} + w_{3,15} G_{2n-1}, \\
 \omega_{hn} &= \omega_{hn-1} + w_{4,5} \operatorname{Re} g_{2n-1} + w_{4,6} \omega_{hn-1}, \\
 \omega_{Mn} &= \omega_{Mn-1} + w_{5,7} \omega_{Mn-1} + w_{5,16} G_{3n-1} + w_{5,17}.
 \end{aligned} \right\} (17)$$

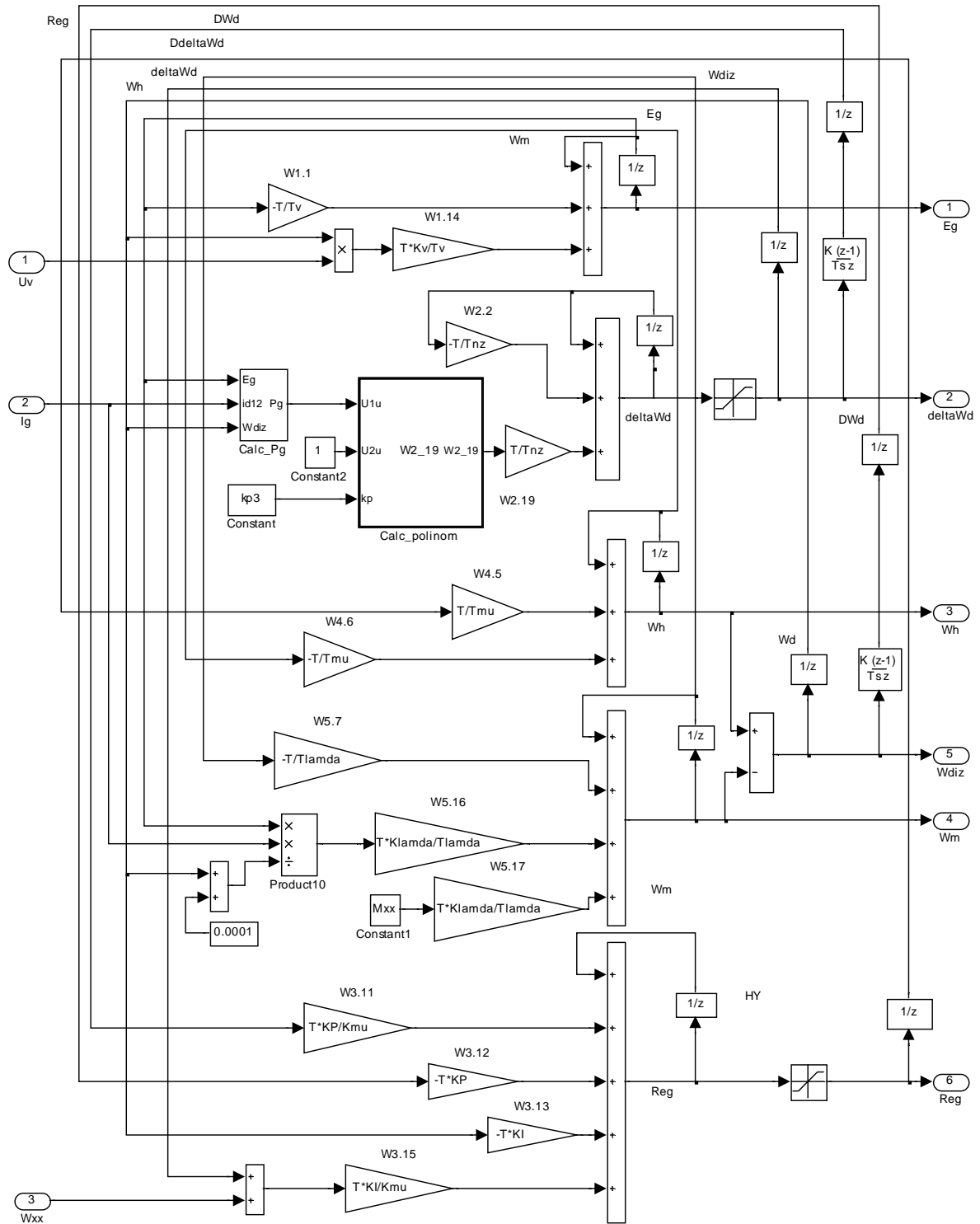


Рис. 3

Определение весовых коэффициентов выполняется расчётом минимального среднеквадратичного отклонения для всех уравнений с помощью псевдообратных матриц $(h_i^*)^+$ по выражению, аналогичному используемому в работах [9–11]

$$w_i^* = \Delta x_{in}^* (h_i^*)^+ . \quad (26)$$

Если принятое выше условие равенства друг другу T_μ и T_λ не выполняется, то расчёт искомым весовых коэффициентов может выполняться численными методами решения системы (17) для имеющихся M измерений.

Общие выражения для расчёта внутренних параметров СГ и дизеля с СУ по весовым коэффициентам их моделей на НС. После получения модели на НС дизеля и СГ из данных режима работы выполняется идентификация их внутренних параметров по весовым коэффициентам НС. Используя уравнения системы (16), значения внутренних параметров вычисляются так:

$$\begin{aligned} T_B &= -T/w_{1,1}, \quad k_B = T_B w_{1,12}/T, \quad T_{H3} = -T/w_{2,2}, \quad k_{H3,i} = T_{H3} w_{i,2,18}/T, \quad (i = 0, \dots, r), \\ k_{II} &= -T/w_{3,12}, \quad k_\mu = T k_{II} / w_{3,11} \text{ либо } k_\mu = T k_i / w_{3,15}, \quad k_i = -T/w_{3,13}, \\ T_\mu &= T/w_{4,5}, \text{ либо } T_\mu = -T/w_{4,6}, \quad T_\lambda = -T/w_{5,7}, \quad k_\lambda = w_{5,16} T_\lambda / T, \quad M_{XX} = w_{5,17} T_\lambda / (T k_\lambda). \end{aligned} \quad (27)$$

Значения параметров T_μ , T_λ , k_λ и k_μ можно использовать для коррекции пропорциональной и интегральной составляющих регулятора скорости дизеля. Значения T_{H3} , k_{H3} и других внутренних параметров позволяют корректировать параметры НЗ для обеспечения работы дизеля на экономичной характеристике. Значения параметров T_B , и k_B позволяют корректировать параметры регулятора тока возбуждения СГ (при его использовании).

Создание имитационных моделей и результаты их исследования. Исследование разработанных моделей СГ и дизеля с СУ выполнялось в пакете Simulink системы Matlab. Общая структура программы исследования состоит из пяти блоков: блока 1, реализующего модель АД с векторной СУ и механическую часть тягового привода ДП; блока 2, реализующего модель СГ и дизеля с СУ, выполненной согласно системе уравнений (5); блока 3 — модели СГ и дизеля с СУ, выполненной на НС (далее обозначенной НС_{НМ}), весовые коэффициенты которой рассчитаны из математических моделей оборудования по выражению (16); блока 4 — модели СГ и дизеля с СУ, выполненной на НС (далее обозначенной НС_{Ехр}), весовые коэффициенты которой рассчитаны по формуле (26) из данных режима работы блока 2; блока 5 — программы расчета весовых коэффициентов НС и внутренних параметров оборудования.

При моделировании использовались следующие значения внутренних параметров дизеля 12V183DE и СГ ГС 530У2, установленных на ДП: $T_\mu = 3с$; $T_\lambda = 3с$; $k_\mu = 1$; $k_\lambda = 0,1 \text{ Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$; $T_{H3} = 0,01с$; $R = 0,216 \text{ Ом}$; $T_B = 0,5с$; $M_{C0} = 473,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Параметры НЗ приведены в табл. 1, значения параметров регулятора скорости дизеля следующие: $k_{II} = 11,86$; $k_i = 1,98$. Расчет моделей выполнялся с фиксированным тактом счёта T , равным 0,001с.

Моделировалась следующая последовательность работы оборудования: разгон дизеля до холостого хода (700 об/мин), включение на второй секунде канала потокосцепления асинхронных двигателей. При достижении заданного значения магнитного потока — подача на АТЭП задания скорости АД (70 рад/сек) и осуществление разгона ДП. При этом дизель увеличивает обороты до максимальных (1900 об/мин). По окончании разгона в момент времени $t=50с$ обороты дизеля уменьшаются до 1500 об/мин. В момент времени $t=70с$ увеличивается ток собственных нужд I_{CH} с 10А до 100А, что приводит к возрастанию оборотов дизеля до 1800 об/мин.

На рис. 4 показаны: результаты отработки вектора состояния СГ и дизеля с СУ блоками 2–4 и ошибки отработки координат — рис. 4,а; ЭДС генератора — рис. 4,б; сигнала корректировки задания скорости дизеля — рис. 4,в; выхода регулятора скорости дизеля — рис. 4,г; составляющих скорости дизеля ω_h и ω_m (соответственно рис. 4,д и рис. 4,е). Ошибки отработки соответствующих координат объекта моделями НС вычисляются по выражениям

$$\begin{aligned} Err \omega_D NM &= \omega_D - \omega_D NM, & Err \omega_D NE &= \omega_D - \omega_D NE, \\ Err E_\Gamma NM &= E_\Gamma - E_\Gamma NM, & Err E_\Gamma NE &= E_\Gamma - E_\Gamma NE, \\ Err \Delta \omega_D NM &= \Delta \omega_D - \Delta \omega_D NM, & Err \Delta \omega_D NE &= \Delta \omega_D - \Delta \omega_D NE, \\ Err Re g 2 NM &= Re g 2 - Re g 2 NM, & Err Re g 2 NE &= Re g 2 - Re g 2 NE, \\ Err \omega_h NM &= \omega_h - \omega_h NM, & Err \omega_m NM &= \omega_m - \omega_m NM. \end{aligned} \quad (28)$$

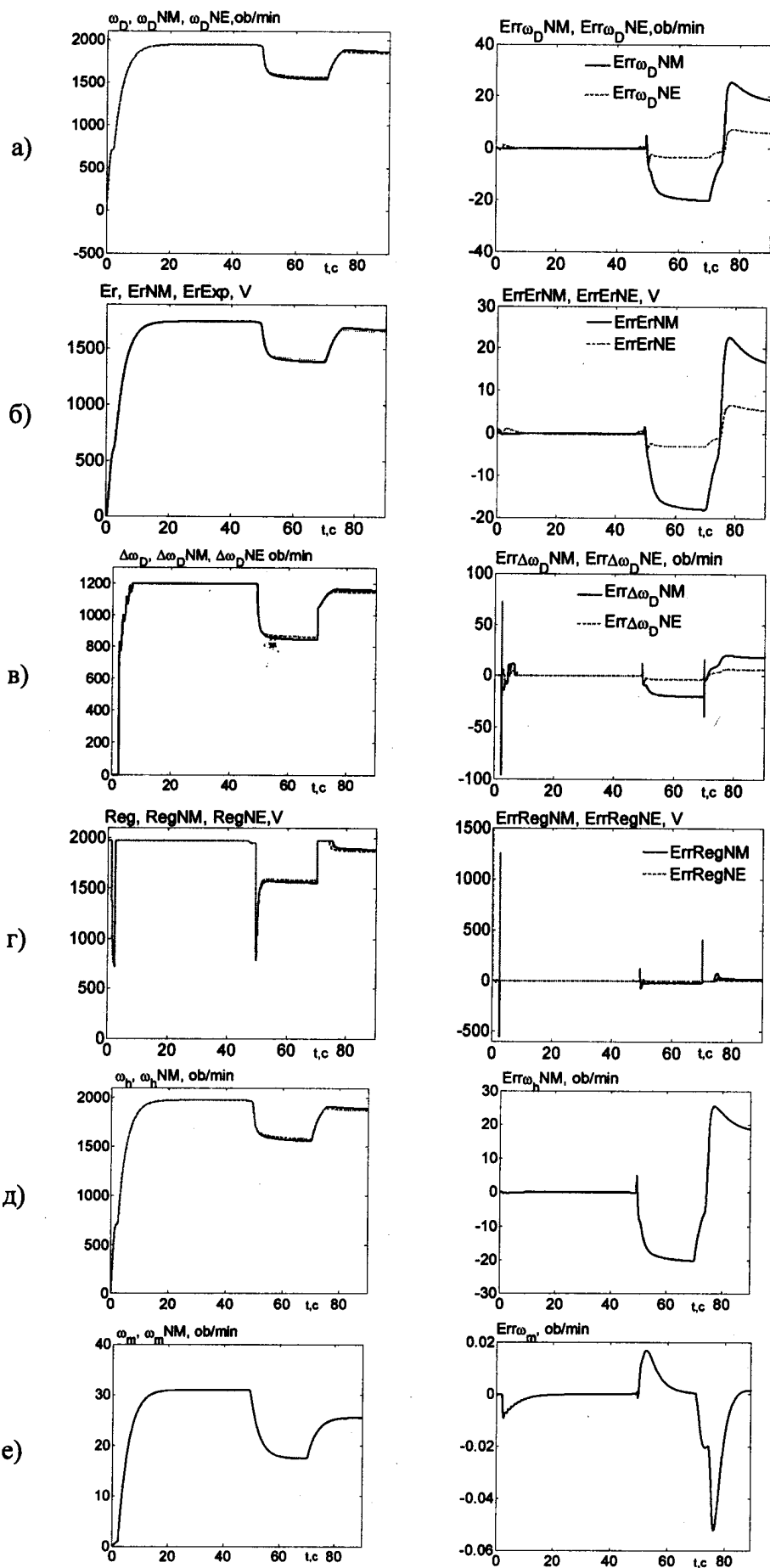


Рис. 4

Из-за отсутствия в программе Matlab букв русского алфавита на графиках рис. 4 и рис. 5 в обозначении индексов сигналов вместо буквы «Д» используется латинская буква «D». В обозначениях выходных сигналов модели HCNM имеются в конце буквы «NM». Для сигналов модели HCExp в конце обозначений имеются буквы «NE». Значения весовых коэффициентов HCNM, рассчитанных по системе уравнений (16), и HCExp представлено соответственно во втором и третьем столбцах табл. 3.

Расчёт весовых коэффициентов HC из данных режима работы оборудования выполнялся для разной длины временного промежутка и в разных начальных точках. На рис. 4 показаны результаты работы HCExp, рассчитанной на 1000 тактах, начиная с 10-го. Из графиков ошибок (правый столбец рис. 4) видно, что результаты работы всех моделей достаточно близкие. Кривые на графиках практически совпадают. Так, при изменении скорости дизеля от 0 до 1900 об/мин максимальные ошибки отработки скорости дизеля моделями HCNM и HCExp составили 25 об/мин и 7 об/мин. Максимальные значения ошибок отработки координат моделями на HC приведены в табл. 4.

По значениям весовых коэффициентов

тов НСExp, приведенным в третьем столбце табл. 3, по формулам (27) выполнена идентификация внутренних параметров объекта. Результаты идентификации приведены в третьем столбце табл. 5. Представление НЗ в HCNM выполнено согласно уравнению (13) в виде полинома третьей степени k_{H3_mat} , а в НСExp — полиномом третьей степени k_{H3_Exp} , рассчитанного из данных режима оборудования

$$\left. \begin{aligned} k_{H3_mat} &= -106,2 \cdot P_D^0 + 5,826 \cdot P_D^1 - 0,01066 \cdot P_D^2 + 8,327e-006 \cdot P_D^3, \\ k_{H3_Exp} &= -88,95 \cdot P_D^0 + 5,598 \cdot P_D^1 - 0,009843 \cdot P_D^2 + 7,471e-006 \cdot P_D^3. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Таблица 3.

Весов. коэф.	Коэф-ты для HCNM	Коэф-ты для НСExp
w _{1,1}	-0,002	-0,0019996
w _{1,14}	0,0017895	0,0017855
w _{2,2}	-0,1	-0,086741
w _{02,18}	-10,621	-14,8424
w _{12,18}	0,58258	0,51976
w _{22,18}	-0,0010659	-0,0008979
w _{32,18}	8,3268e-007	6,607e-007
w _{3,11}	0,011856	0,011855
w _{3,12}	-0,011856	-0,011855
w _{3,13}	-0,001976	-0,001976
w _{3,15}	0,001976	0,001976
w _{4,5}	0,00033333	+0,00033333
w _{4,16}	-0,00033333	-0,00033333
w _{5,7}	-0,00033333	—
w _{5,16}	3,3333e-005	-3,4607e-005
w _{5,17}	0,0004386	-0,00060482

Таблица 4.

Элементы вектора состояния	Макс. значе-ние сигнала	Макс. значение ошибки HCNM		Макс. значение ошибки НСExp	
		Абсолютное	Относит., %	Абсолютное	Относит., %
E_T (В)	1800	22	1,22	7	0,4
$\Delta\omega_{2D}$ (об/мин)	1200	20	1,7	5	0,4
Re g 2 (В)	2000	80	4,0	40	2,0
ω_h (об/мин)	2000	25	1,25	—	—
ω_M (об/мин)	31	0,02	0,07	—	—
ω_D (об/мин)	2000	25	1,25	7	0,35

На рис. 5 показаны вычисленные характеристики НЗ: сплошной линией — характеристика НЗ согласно табл. 1; точками — характеристика в виде полинома третьей степени (первое уравнение системы 29); штриховыми линиями — характеристика, вычисленная (идентифицируемая) из данных режима работы оборудования (рис. 5,а — при расчете НСExp на 1000 тактах (второе уравнение системы 29), рис. 5,б — при расчете НСExp на 20000 тактах). Для последнего случая ошибка не превышала 1%. Ошибка идентификации нелинейности объясняется небольшим изменением мощности дизеля в данных, используемых для расчета НС.

Таблица 5

Внутр. параметры	Установл. значения	Расчетные значения из НСExp	Ошибки идентификации, %
T_μ , с	3	3,0	0
k_μ	1	0,9999	0,1
k_λ / T_λ , с ⁻¹	0,0333	0,0346	3,9
T_{H3} , с	0,01	0,0115	15
T_B , с	0,5	0,5001	0,02
M_{XX} , Нм	13,2	17,5	32,6
k_V	0,895	0,893	0,21
k_{II}	11,856	11,855	0,01
k_I	1,98	1,976	0,2

включаются в соответствующие места его модели на НС.

Заключение. Предложенные структуры и полученные аналитические зависимости для расчёта ФРНС, представляющих модели нелинейных объектов, подтверждены путём создания с их помощью нелинейных моделей СГ и дизеля с СУ. Результаты моделирования показали, что для НС, вычисленных по математической модели объекта и из данных режима работы оборудования, максимальные ошибки отработки вектора состояния объекта не превышают 4% и 2%, соответственно (табл. 4).

Для обеспечения высокой точности расчёта и "прозрачности" модели на НС объекта, имеющего блоки ограничения сигналов, необходимо измерение сигналов до и после этих блоков. После расчёта НС, имеющиеся в объекте блоки ограничения под-

Ошибка идентификации большинства внутренних параметров объекта по весовым коэффициентам его модели на НС для рассматриваемого примера не превышает 5% (табл. 2).

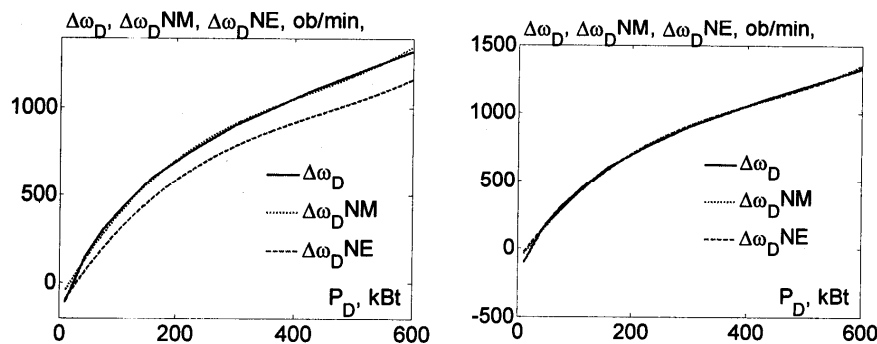


Рис. 5.

1. Басов Г.Г. Прогнозування розвитку дизель-поїздів для залізниць України. – Ч.1–Харків: "Апекс+", 2004. – 240 с.

2. Бодянский Е.В., Руденко О.Г. Искусственные нейронные сети: архитектуры, обучение, применения. – Харьков: ТЕЛЕТЕХ, 2004. – 372 с.

3. Бычков Д.А. Снижение эксплуатационного расхода топлива тепловозами 2ТЭ116 путем применения микропроцессорной системы управления дизель-генератором. /Дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. – М.: РГБ, 2006. – 181 с.

4. Волков А.В., Орловский И.А. Математическая модель многодвигательного частотно-регулируемого асинхронного электропривода дизель-поезда с векторной системой управления// Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2008. – Ч.6. – С. 31–36.

5. Луков Н.М. Автоматизация тепловозов, газотурбовозов и дизель-поездов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

6. Носков В.И., Дмитриенко В.Д., Заповольский Н.И., Леонов С.Ю. Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов. – Харьков: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с.

7. Орловский И.А., Страколист Е.В. Математическая модель частотно-регулируемого асинхронного тягового электропривода дизель-поезда с усовершенствованной системой управления //Сб. науч. тр. Днепро-дзержинского гос.техн. ун-та. Тем. вып. «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика».– Днепро-дзержинск: ДГТУ, 2007. – С. 261–264.

8. Орловский И.А. Расчёт моделей нелинейных электромеханических объектов на полиномиальных рекуррентных нейронных сетях из их известных математических моделей // Техн. електродинаміка. – 2009. – №1. – С. 20 – 31.

9. Орловский И.А., Синяевский А.А. Расчёт и обучение моделей нелинейных электромеханических объектов на полиномиальных рекуррентных нейронных сетях// Искусственный интеллект. – 2008. – №3. – С. 579 – 590.

10. Орловский И.А., Синяевский А.А. Расчёт моделей тиристорного электропривода постоянного тока на полиномиальных рекуррентных нейронных сетях // Електротехніка та електроенергетика. – 2008. – №2. – С. 7 – 20.

11. Орловский И.А. Расчёт моделей тягового асинхронного двигателя на полиномиальных рекуррентных нейронных сетях// Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. тр. «Проблемы автоматизированного привода. Теория и практика». – Харьков. – 2008. – С. 582–585.

12. Орловский И.А. Идентификация внутренних параметров тиристорного электропривода постоянного тока по его моделям на рекуррентных нейронных сетях. // Техн. електродинаміка. – 2007. – №5. – С. 19 – 24.

13. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2006. – 1104 с.

Надійшла 06.04.09

УДК 621.314.1.027

А.В.Журахівський, докт.техн.наук, **Ю.А.Кенс**, канд.техн.наук, **А.Я.Яцейко**, канд.техн.наук, **Р.Я.Масляк** (Національний університет «Львівська політехніка», Львів)

ФЕРОРЕЗОНАНСНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРОМЕРЕЖАХ 10 КВ З РІЗНОТИПНИМИ ТРАНСФОРМАТОРАМИ НАПРУГИ

Досліджено ферорезонансні процеси в електромережах 10 кВ з ізольованою нейтраллю за наявності в них різнотипних трансформаторів напруги. Наведено деякі результати розрахунків.

Исследованы феррорезонансные процессы в электросетях 10 кВ с изолированной нейтралью при наличии в них разнотипных трансформаторов напряжения. Приведены некоторые результаты расчетов.

Постановка проблеми. Відомо, що в Україні та країнах СНД електропостачання споживачів у більшості випадків здійснюється електромережами 6–10–35 кВ з так званою ізольованою нейтраллю. Ці ж мережі ще називають мережами з малими струмами замикання на землю [6].

Вагомим недоліком таких мереж є можливість виникнення в них ферорезонансних процесів (ФРП), що можуть призводити до пошкодження електрообладнання підстанцій і, в першу чергу, трансформаторів напруги. Справа у тому, що для контролю ізоляції сучасних електромереж 6–35 кВ, а також для вимірювань, обліку електроенергії, роботи пристроїв сигналізації, релейного захисту та автоматики понад 90 % встановлених трансформаторів напруги (ТН) є ТН типів НТМИ та ЗНОМ. У трансформаторах типу НТМИ три первинні (високовольтні) обмотки з'єднуються в зірку, нуль якої заземлюється. У ТН типу ЗНОМ заземлюється кожна фаза окремо, тому ці мережі ще називають мережами з умовно ізольованою нейтраллю (що більше відповідає суті). Нейтраль мережі в дійсності заземлена, щоправда через велику нелінійну індуктивність ТН, оскільки потужність трансформаторів напруги невелика і становить від 0,6 кВА до 1,0 кВА для напруг від 6 кВ до 35 кВ.

Згадані ТН мають вагомий недолік – після обриву «землі» в мережі, за певних співвідношень параметрів ТН і мережі, вони самі є фактично збурювачами незатухаючих ФРП, які й можуть пошкоджувати ці ж трансформатори. А вихід з ладу трансформатора напруги може призводити до різних негативних наслідків зі значними збитками для енергопостачальних компаній та й народного господарства в цілому. Тому для усунення вказаних недоліків як трансформаторів напруги, так і самих мереж запропоновано різноманітні рішення.

Основні серед них: розробка та впровадження в експлуатацію пристроїв захисту ТН від пошкоджень ФРП; розробка нових трансформаторів напруги, так званих антирезонансних, типів НАМИ, НАМИТ; і зовсім радикальний засіб – реконструкція існуючих мереж з ізольованою нейтраллю в мережі з глухозаземленою нейтраллю або заземленою через резистор [6,8,9].

Аналіз останніх досліджень. На сьогодні фактично єдиним реально працюючим засобом захисту ТН від пошкоджень ФРП є пристрій, запропонований в [1]. На даний час в експлуатацію електромереж України впроваджено біля 100 таких пристроїв. Суть роботи пристрою полягає в тому, що він виявляє наявність ФРП в мережі та, під'єднуючи гасильний резистор до обмотки розімкненого трикутника ТН, зриває ферорезонанс за частки секунди і відновлює нормальну роботу обладнання підстанції.

Що стосується другого способу уникнення пошкоджень трансформаторів напруги, а саме розробки антирезонансних ТН, то останні дійсно відносно рідше пошкоджуються, ніж трансформатори типу НТМИ чи ЗНОМ. Справа у тому, що в цих антирезонансних ТН залишається зв'язок через електромагнітний

нелінійний елемент з землею, а це означає, що рано чи пізно наступить таке співвідношення параметрів ТН й електромережі, за якого виникатиме ферорезонанс з усіма негативними наслідками цього явища.

Оскільки, все ж таки антирезонансні ТН поступово впроваджуються в електромережі України, то постала нагальна проблема дослідження сумісної їх роботи з існуючими ТН типу НТМИ та ЗНОМ.

Стосовно третього способу уникнення пошкоджень трансформаторів напруги ферорезонансними процесами – перетворення мереж в мережі з заземленою нейтраллю, то й самі автори цієї стратегії розуміють та говорять про необхідність величезних капітальних витрат, необхідність зміни концептуальних засад побудови електромереж тощо. Тобто, мова може йти поки що про окремі випадки або про будівництво (розширення) нових електромереж.

Задачею досліджень є аналіз на математичних (цифрових) моделях режимів електромереж з різнотипними трансформаторами напруги та оцінка можливості та ефективності їх сумісної роботи.

Основний матеріал. Аналіз режимів електромереж спочатку доцільно проводити на математичних (цифрових) моделях [2,7], оскільки натурні випробування – це достатньо громізка та витратна процедура, яку не завжди можна реалізувати на діючих підстанціях. В разі крайньої необхідності підтвердження чи спростування деяких результатів розрахунків можна (доцільно) провести окремі натурні випробування, що не пов'язані з можливими непередбачуваними наслідками. Комп'ютерну симуляцію ферорезонансних процесів (ФРП) виконано для електромережі 10 кВ, де найбільш широко застосовуються різнотипні ТН.

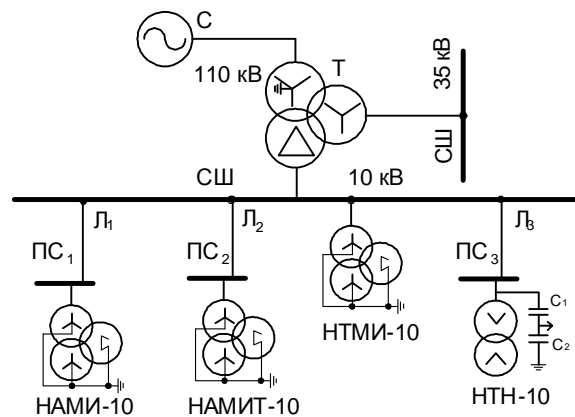


Рис. 1

На рис. 1 показана принципова схема типової електромережі 10 кВ, де встановлено різнотипні трансформатори напруги. Тут С – система живлення; СШ – секція шин; ПС₁–ПС₃ – підстанції; Т – силовий трансформатор, що живить СШ-10 та СШ-35 кВ; НТМИ, НАМИ, НАМИТ, НТН – типи трансформаторів напруги.

На рис. 2 показано принципові схеми сполучень первинних обмоток вказаних вище трансформаторів напруги. Тут ДОТ – додатковий однофазний трансформатор напруги; К – ключ; С₁–С₂ – ємнісний дільник. Схеми наведено для кращого розуміння процесів, що відбуваються на підстанціях під час появи та обриву землі в мережі.

Дослідження режимів роботи такої електричної мережі виконуємо на цифровій моделі, яку сформовано

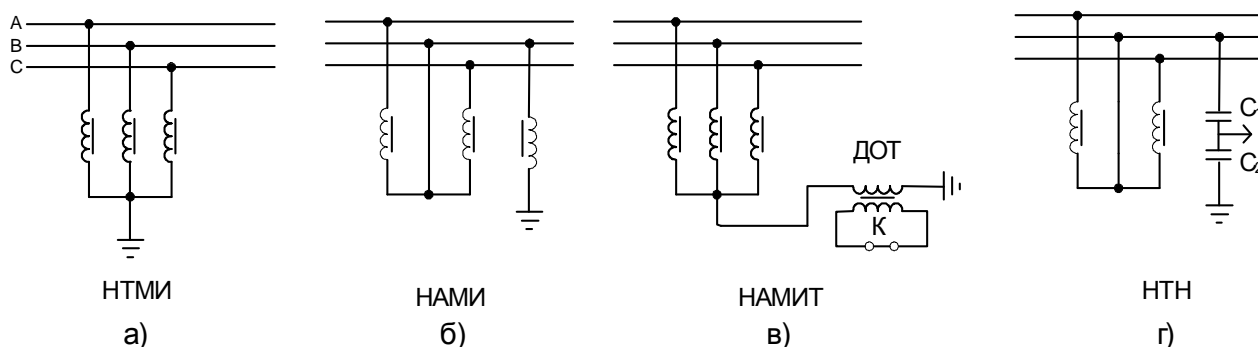


Рис. 2

в цифровому комплексі RE [2]. У свою чергу комплекс RE формує математичну модель у методі контурних координат,

$$\overset{\vee}{\Gamma} \begin{vmatrix} \overset{\vee}{L} \\ \overset{\vee}{K_T} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{\vee}{K'_T} \\ -\overset{\vee}{R_M} \end{vmatrix} \overset{\vee}{\Gamma}_t \left(\frac{d\vec{i}_K}{dt}, \frac{d\vec{\psi}}{dt} \right) = \overset{\vee}{\Gamma} \left(\vec{e} - \overset{\vee}{r} \vec{i} - \vec{u}_c, 0 \right);$$

$$(\vec{i}, \vec{\psi}) = \overset{\vee}{\Gamma}_t(\vec{i}_K, \vec{\psi}_K); \quad \overset{\vee}{C} d\vec{u}_c/dt = \vec{i},$$

де $\overset{\vee}{\Gamma}$ та $\overset{\vee}{\Gamma}_t$ – пряма та транспонована матриці головних контурів, взаємозв'язаних електричних та магнітних кіл; $\vec{i}, \vec{e}, \vec{u}_c$ – відповідно вектори струмів, ЕРС та напруг на ємностях електричних кіл; $\vec{\psi}$ – вектор потокозчеплень магнітних віток схеми; $\overset{\vee}{r} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – діагональна матриця активних опорів віток розрахункової схеми заміщення електричних кіл; $\overset{\vee}{C} = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ – діагональна матриця ємностей схеми; $\overset{\vee}{L}$ – матриця власних та взаємних індуктивностей; $\overset{\vee}{K}_T$ – матриця коефіцієнтів зв'язку між вітками електричних та магнітних кіл; $\overset{\vee}{R}_M = \text{diag}(R'_{M1}, R'_{M2}, \dots, R'_{Mn})$ – діагональна матриця зведених до одного витка диференційних магнітних опорів, для якої кожний елемент матриці визначається як $R'_{Mn} = R_{Mn}/W^2$, де R_{Mn} – диференційний магнітний опір вітки, а W – кількість витків обмотки, до якої зведено потокозчеплення цієї вітки.

Оскільки досліджуються ферорезонансні процеси, а основними елементами, що провокують їх появу в електромережі, є трансформатори напруги, то особливу увагу слід приділити формуванню адекватних моделей ТН. Модель кожного з типів трансформаторів напруги сформовано відповідно до електричної схеми з'єднань обмоток, конструктивного виконання та режиму його роботи. Вимірювальний трансформатор напруги в розрахункову схему вводиться наступними параметрами: активними опорами та індуктивностями розсіювання кожної з обмоток; динамічною нелінійною індуктивністю по шляху основного магнітного потоку, якій відповідає вебер-амперна характеристика; коефіцієнтами трансформації; параметрами ємнісного дільника C_1 – C_2 тощо.

У цифровому комплексі [2] параметри кусково-лінійної апроксимації кривої намагнічування трансформатора, що характеризує динамічні індуктивності ($L\mu$), задані 10–16 точками, в інтервалі між якими лінеаризовані ділянки нелінійної індуктивності змінюють своє значення, а взаємне спряження лінійних відрізків кусково-лінійної апроксимації вольт-амперної характеристики намагнічування трансформатора в цифровому комплексі здійснюється автоматично.

Узагальнена розрахункова модель для принципової схеми (рис. 1) показана рис. 3. У ній всі різнотипні ТН умовно під'єднані до спільної секції шин. Під час дослідження ферорезонансних процесів це допустимо, оскільки спади напруг на ЛЕП, по яких протікають відносно невеликі ферорезонансні струми (2–3 А), практично не призводять до спотворення фазних та лінійних напруг на виводах трансформаторів напруги.

Нами було досліджено можливість виникнення ФРП в електромережі за появи та подальшого обриву замикання фази на землю. Причому, розглядалися варіанти під'єднання до електромережі декількох різнотипних трансформаторів напруги та встановлено діапазони ємнісних струмів в мережі, за яких в них виникають незгасаючі ФРП. Результати розрахунків наведено в таблиці, а на рис. 4 показано розрахункові осцилограми параметрів режиму схеми (рис. 1) для випадку паралельної роботи всіх типів ТН. Тут: 1 – еквівалентна розрахункова схема ЕРС енергосистеми з первинною обмоткою силового трансформатора Т з втратами в обмотці, баку, оливі, повітрі тощо; 2 – еквівалентна розрахункова схема вторинної обмотки силового трансформатора, з'єднаної в зірку, що живить навантаження 35 кВ; 3 – третинна обмотка силового трансформатора, з'єднана в трикутник, що живить шини 10 кВ; 4 – еквівалентна електрична схема магнітної системи силового трансформатора; 5 – еквівалентні схеми первинних обмоток відповідних трансформаторів напруги; 6 – еквівалентні електричні схеми магнітопроводів відповідних ТН; 7 – еквівалентні розрахункові схеми вторинних обмоток ТН з навантаженням та вітками, що імітують втрати в обмотках, баці, оливі, повітрі тощо; 8 – розрахункові схеми вторинних обмоток ТН, з'єднаних у розімкнений трикутник, з навантаженням; 9 – обмотка фази В ТН типу НАМИ з еквівалентною його магнітною системою; 10 – первинна обмотка, вторинна обмотка з ключем та своєю магнітною системою додаткового ТН, ввімкненого в нейтраль основного ТН типу НАМИТ; C_1 – C_2 – ємнісний дільник, що використовується в НТН, замість електромагнітного ТН фази В.

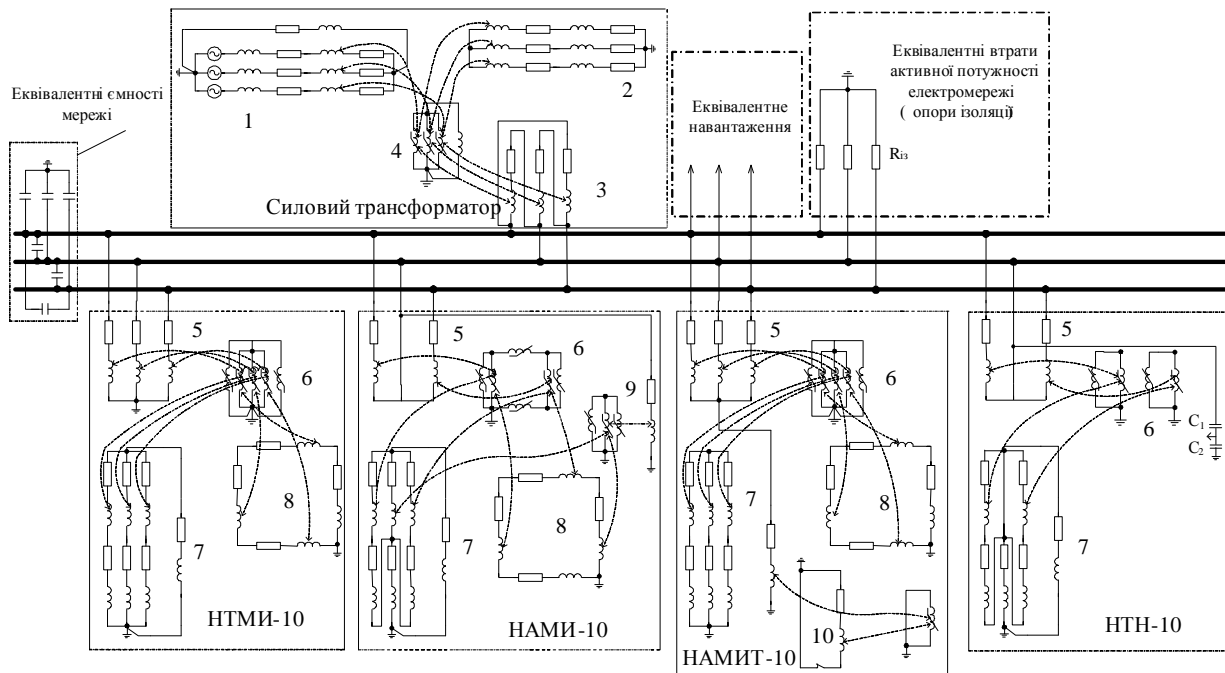


Рис. 3

Комбінації під'єднання ТН	Діапазон ємнісних струмів замикання на землю, А	Величини струмів первинної обмотки ТН, А			
		НТМИ		НАМИ	
НТМИ+НАМИ	від 0,6А до 2,5А	1	0,002		
2×НТМИ+НАМИ	від 1 А до 5,2 А	1,13	0,002		
3×НТМИ+НАМИ	від 1,3 А до 7,8 А	1,11	0,0014		
2×НАМИ+НТМИ	від 0,1 А до 2,6 А	1,17	0,0011		
3×НАМИ+НТМИ	від 0,1 А до 2,6 А	1,2	0,0014		
НТМИ+НАМИТ	від 0,8 А до 2,9 А	0,807	0,1397		
2×НТМИ+НАМИТ	від 0,9 А до 5,6 А	1,06	0,159		
3×НТМИ+НАМИТ	від 1,5 А до 8,1 А	1,13	0,163		
НТМИ+НТН	від 0,5 А до 2,5 А	НТМИ	НТН	0,0057	
2×НТМИ+НТН	від 0,9 А до 5,2 А	1,13		0,0057	
3×НТМИ+НТН	від 1,3 А до 7,8 А	1,17		0,0057	
НАМИ+НТН	від 0,7 А до 1,4 А	НАМИ	НТН	0,0064	
2×НАМИ+НТН	від 1,3 А до 2,8 А	1,48		0,0057	
НАМИТ+НТН	0,4	НАМИТ	НТН	0,009	
2×НАМИТ+НТН	0,8	0,594		0,009	

Як видно із осцилограм, у мережі виникає класичний ферорезонансний процес з частотою напруги u_0 в нейтралі мережі 25 Гц, при цьому в первинних обмотках ТН типу НТМИ протікають струми, що перевищують допустимі значення більш, ніж на порядок. Напруги фаз відносно землі на шинах підстанції спотворені накладанням напруги u_0 нейтралі мережі на фазні напруги мережі частотою 50 Гц, в результаті чого діючі значення напруг фаз відносно землі стають приблизно рівними ефективним значенням лінійних напруг електромережі. Такі напруги призводять до протікання підвищених струмів у первинних обмотках ТН типу НАМИТ, оскільки він за замкненою вторинної обмотки ДОТ (рис. 2, в) практично ідентичний ТН типу НТМИ і за своїми параметрами вони близькі між собою. Що стосується трансформаторів типів НАМИ та НТН, то струми в їхніх первинних обмотках залишаються практично незмінними порівняно з нормальним режимом, оскільки залишаються практично незмінними лінійні напруги на шинах підстанцій.

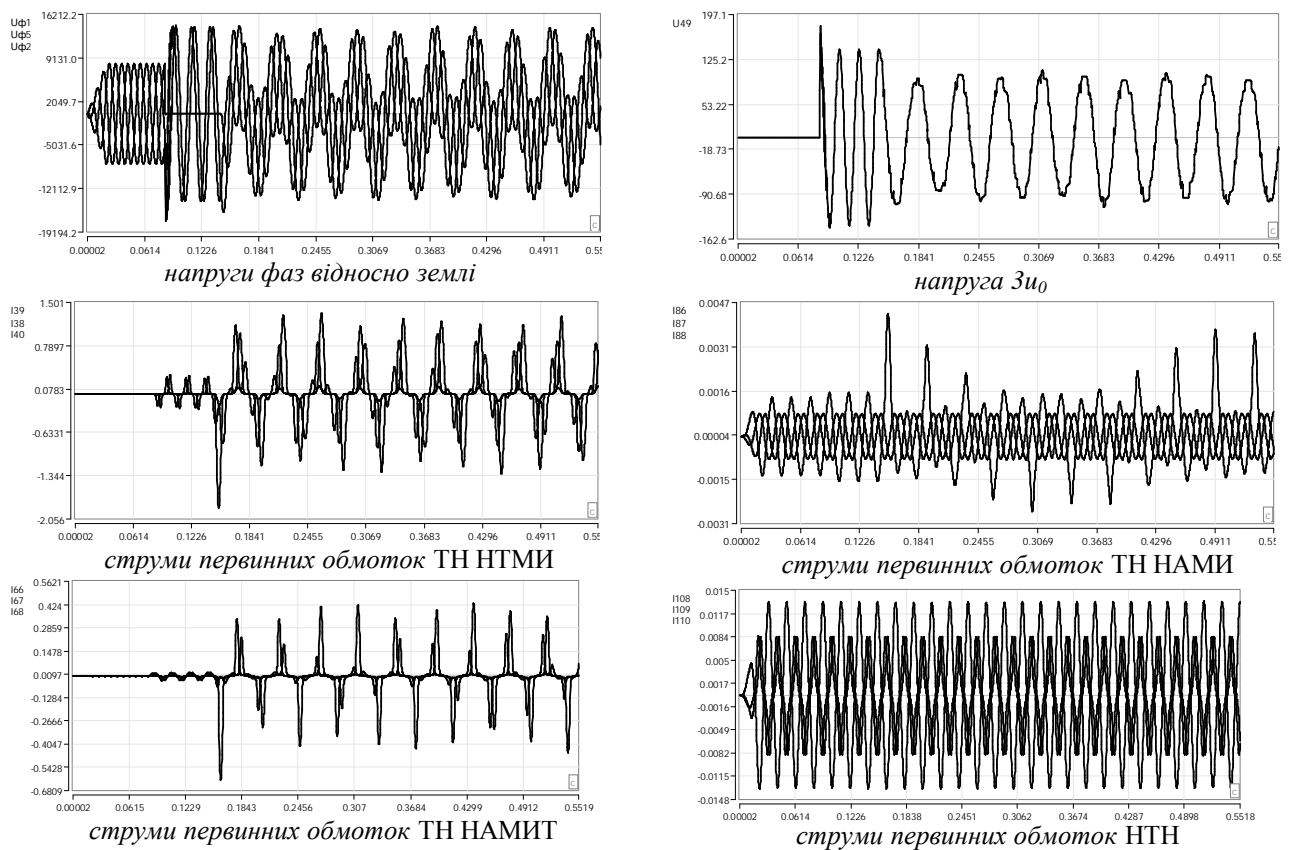


Рис. 4

Отже, визначальними з точки зору збурення ферорезонансних процесів в електромережі є ТН типу НТМИ (частково і НАМИТ), а кількість антирезонансних трансформаторів практично не впливає на загальну картину процесів для типової електромережі 10 кВ.

Висновки. Дослідження, проведені на запропонованій узагальненій розрахунковій математичній моделі електромережі 10 кВ з трансформаторами напруги НТМИ, НАМИ, НАМИТ і НТН показують, що визначальними для появи ФРП в мережах є ТН типу НТМИ, незалежно від кількості антирезонансних (нерезонуючих) ТН.

1. Журахівський А.В., Кенс Ю.А., Голяк О.Ю. Захист трансформатора напруги від пошкоджень при ферорезонансних процесах у мережах з ізолюваною нейтраллю. // Вісник ДУ "Львівська політехніка" "Електромеханічні та електроенергетичні системи". – 1997. – №340. – С. 40–47.
2. Равлик О., Гречин Т., Іванюк В. Цифровий комплекс для аналізу роботи та проектування пристроїв релейного захисту й автоматики // Вісник ДУ „ЛП”. – 1997. – №340. – С. 96–101.
3. Степанов Ю.А., Овчинников А.Г. Трансформатори напруги контролю ізоляції 6–10 кВ. Сравнительный анализ моделей. // Новости электротехники. – 2006. – №6(24). – С. 1–6.
4. Стогний Б.С., Масляник В.В., Назаров В.В. и др Способы заземления нейтрали электрических сетей 3–35 кВ // Энергетика и электрификация. – 2002. – №2. – С. 23–27.
5. ГКД 34.20.507 – 2003. Технічна експлуатація електричних станцій і мереж. Правила. – Вид-во ДП "НТУКЦ" АсЕлЕнерго. – Київ, 2003. – 598 с.
6. Правила устройства электроустановок/Минэнерго СССР. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 648 с.
7. Программа моделирования электрических цепей FASTMEAN. www.fastmean.ru.
8. Трансформатор типа НАМИ – 10. ИАЯК.671241. 008 ТО.
9. Трансформатор типа НАМИТ – 10 – 2. УХЛ2. ИБЛТ. 671241. 021 ПС.

29.09.2009

Надійшла

УДК 621.317

А.М.Саволюк, канд.техн.наук (Ин-т электродинамики НАН Украины, Киев)

ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ АЛГОРИТМОВ ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕЙСА ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО МОДУЛЯ НИЖНЕГО УРОВНЯ МНОГОПАРАМЕТРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены особенности построения многопараметрических измерительных систем с применением графических жидкокристаллических индикаторов.

Розглянуто особливості побудови багатопараметричних вимірювальних систем із застосуванням графічних рідиннокристалічних індикаторів.

Введение. Актуальной в последнее время является задача построения измерительных систем, организованных по сетевому принципу, которые позволяют эффективно решать ряд задач по сбору данных и управлению, строить недорогие функционально гибкие комплексы для контроля технологических процессов, мониторинга и диагностики в медицине и сложных технических объектах. Анализ взаимосвязанных динамических процессов представляется очень важным как в технической, так и в других, в частности, медицинской сферах. К таким задачам относятся, например, исследование сигналов активности сердца, головного мозга, пульсовых кривых артериального давления, ряда других динамических показателей состояния организма человека.

При большом количестве информации и для анализа быстропеременных процессов отдельные базовые измерительные терминалы снабжаются одним или несколькими вспомогательными измерительно-информационными модулями – модулями нижнего уровня, работающими под управлением контроллера базового модуля верхнего уровня [1– 4], в качестве которого может быть использован как центральный процессор, так и компьютер. Этот модуль, реализуя один измерительный канал с тем или иным типом датчика, включает в себя измерительные преобразователи и АЦП с необходимыми чувствительностью и быстродействием. Он содержит также собственный микроконтроллер и запоминающее устройство, позволяющие по команде основного контроллера выполнять процедуры измерения, накапливать массивы данных и передавать их для последующей обработки в основной контроллер. Если необходимо контролировать несколько параметров, то таких модулей нижнего уровня может быть несколько.

При разработке систем передачи данных многопараметровых информационно-измерительных систем важным является вопрос быстрого и визуально удобного представления отображаемой информации. В ряде случаев оператор должен быстро принимать решения в случае мгновенных изменений параметров сигналов. Для решения таких задач перспективным является применение графических жидкокристаллических индикаторов (ЖКИ). Однако даже широко распространенные приборы такие, как цифровые осциллографы [5], не совсем удобны для непрерывного наблюдения сигналов и регистрации редких артефактов, так как информация в них выводится в виде отдельных групп выборок, которые при быстрой смене утомляют зрение оператора при длительном времени наблюдения. Более предпочтительным во многих случаях является режим отображения сигналов в виде непрерывно ”движущейся” картинке, позволяющий гораздо легче их наблюдать и незаменимый в некоторых специфических областях (например, при диагностике кардосигналов). Для решения таких задач перспективным является применение ЖКИ. Поскольку такой режим работы недостаточно изучен, необходимо разрабатывать соответствующие алгоритмы для управления ЖКИ.

Модуль нижнего уровня по стандартному интерфейсу RS-232 связан с микропроцессорным блоком модуля верхнего уровня МВУ и состоит из входного согласующего устройства ВСУ, инструментального усилителя ИУ, микроконтроллера МК, запоминающего устройства ЗУ, аналого-цифрового преобразователя АЦП, графического ЖКИ (рис. 1). Выбор количества отсчетов и управление режимами записи или чтения осуществляются командами, вырабатываемыми в контроллере. В микроконтроллере также может осуще-

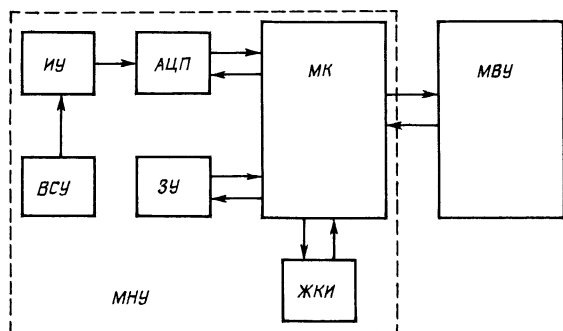


Рис. 1

При обнаружении стартового бита интерфейса RS-232 и подтверждения номера блока осуществляется переход на подпрограмму обработки принимаемого сообщения. Производится анализ информации и в соответствии с разработанным алгоритмом устанавливается требуемый режим работы блока. Затем программа переходит на основной рабочий цикл. Производится чтение данных из АЦП с помощью соответствующей подпрограммы обработки данных, идет передача данных по линии связи RS-232 на МВУ. После этого активизируется ЖКИ, на котором отображается передаваемая информация и установленный режим работы. Затем снова идет опрос АЦП и так по циклу. После посылки очередного запроса от МВУ программа уходит на прерывание и прием данных RS-232 (см. блок-схему) и затем возвращается на основной цикл работы.

Разработка алгоритмов и программного обеспечения для работы с графическими ЖКИ предполагает решение ряда задач, например, разработку алгоритма поиска экстремальных значений. Непрерывный поиск этих значений необходим не только для определения параметров сигнала, но и для автоматического выбора пределов измерений индикатора. Для поиска экстремумов каждое следующее значение отсчета АЦП последовательно сравнивается со значением регистров A_{max} и A_{min} . В случае превышения или уменьшения в регистры A_{max} и A_{min} заносятся новые значения до тех пор, пока не пройдет вся выборка, вплоть до максимального количества отсчетов S_{max} . Все текущие данные A_{max} и A_{min} непрерывно выводятся на индикатор в виде цифровых отсчетов.

На рис. 3 показана блок-схема программы, задающей различные режимы "развертки" индикатора. Вначале устанавливается режим работы выборочный или непрерывный. В первом случае происходит чтение данных АЦП, и для каждого нового номера отсчета информация записывается в соответствующий регистр памяти РП. После записи всей выборки (до S_{max}) идет операция последовательного чтения данных из РП и последовательной их передачи на контроллер графического ЖКИ. Информация отображается на экране индикатора в виде графика. В случае непрерывного режима информация визуально отображается в виде непрерывно «движущегося» графика. Каждый последующий отсчет записывается в следующий по счету РП (а после сброса – по циклу). После отображения на табло всей последовательности, соответствующей S_{max} , с учетом того, что после каждого цикла индикации записывается одно или несколько новых значений A_c , информация на экране будет восприниматься как движущееся слева направо изображение. Направление

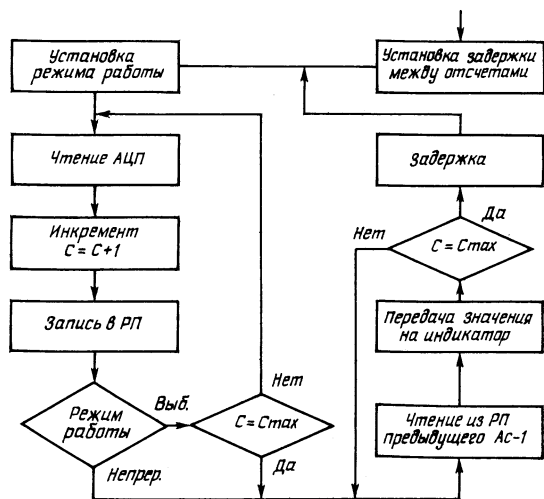


Рис. 3

ствляться некоторый предварительный анализ результатов отсчетов, например, вычисление среднего, максимального и минимального значений по блокам информации, а также самокалибровка и диагностика всего модуля.

На блок-схеме рис. 2 показан упрощенный алгоритм работы блока. После подачи напряжения питания происходит инициализация микроконтроллера и установка начального режима. При этом производится установка «нуля» АЦП при закороченных аналоговых входах. Значение скорректированного кода запоминается в соответствующих регистрах. После этого блок переходит в режим ожидания приема команды от МВУ.

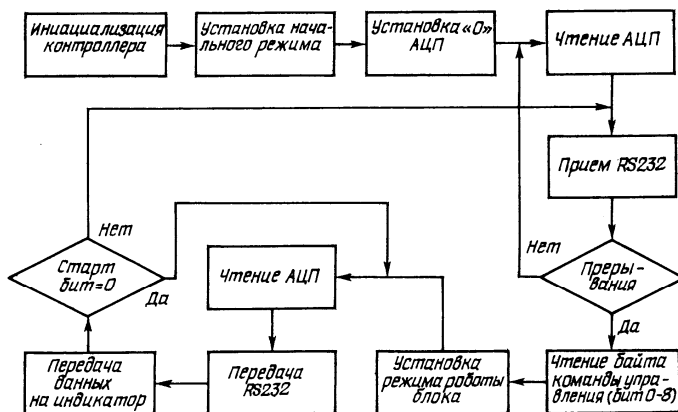


Рис. 2

движения будет зависеть от того, в какую, последующую или предыдущую, ячейку записывается каждое новое значение A_c . Возможен также режим «прокрутки изображения». При этом записывается в РП не $Stax$, а, например, $2Stax$ значений. В процессе инкрементирования счетчика изображение на экране будет иметь вид движущегося изображения. Это дает возможность наблюдать более длительные процессы, выходящие за пределы зон отображения графического ЖКИ.

На рис. 4 показана часть блок-схемы программы автоматической установки предела измерений.

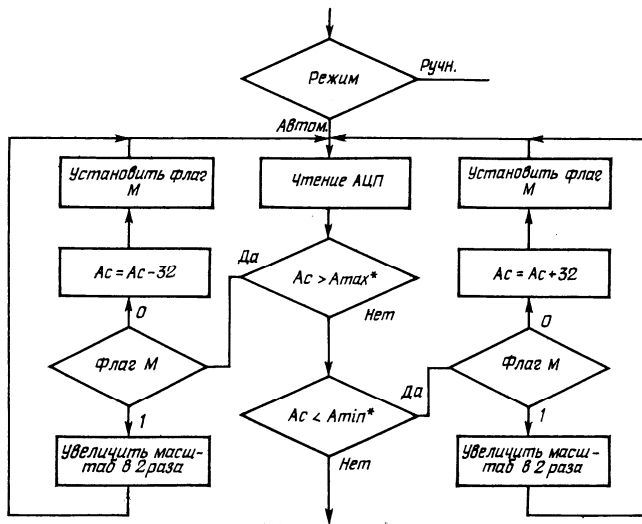


Рис. 4

После каждого последующего значения отсчета АЦП производится проверка условий $A_c > A_{max}^*$ и $A_c < A_{min}^*$, где A_{max}^* и A_{min}^* – максимальное и минимальное значения сигналов, доступных для отображения на экране ЖКИ. При выполнении этих условий устанавливается флаг масштаба M . После отображения на индикаторе всей последовательности $Stax$ осуществляется проверка наличия флагов. Если флаги установлены, то производится сдвиг сигнала на половину шкалы индикатора (для применяемого индикатора это 32): $A_c = A_c + 32$ или $A_c = A_c - 32$ в зависимости от условия. Если после этого сигнал не перестает выходить за пределы отображения, то увеличивается масштаб изображения сигнала путем сдвига номеров битов передаваемой информации. Сдвиг изображения индикатора по вертикали не пред-

ставляет сложностей, поскольку это заложено в программном алгоритме его работы. Для изменения масштаба изображения нужно только сдвинуть номера битов передаваемой информации.

Практическая реализация разработанных алгоритмов может быть различной. Новизна заключается не только в особенностях алгоритмов работы, но также в наличии дополнительных функций, позволяющих оперативно и визуально удобно наблюдать исследуемый сигнал. Визуальное графическое отображение сигнала в виде движущейся картинкой позволяет наблюдать получаемую информацию при скоростях до сотен отсчетов в секунду. Непрерывный поиск экстремальных значений сигнала позволяет оператору вовремя принимать нужные решения. Использование цифровой синхронизации и задержки позволяет удобно наблюдать передние фронты периодических сигналов, что важно при анализе кардиосигналов при диагностике различных заболеваний. Запоминание выбранного сигнала и отображение информации в виде движущейся картинкой позволяет наблюдать сигналы большой длительности, выходящей за пределы зон отображения ЖКИ. Одновременная цифровая и графическая индикация сигнала дает относительно полную информацию о сигнале. Возможно одновременное наблюдение нескольких сигналов. Вся информация может передаваться на компьютер, где могут решаться сложные задачи анализа сигналов (например, кардиодиагностика). Достигнутые результаты подтверждают необходимость дальнейшей разработки и использования графических ЖКИ в универсальных модулях нижнего уровня.

1. Василенко О.Д., Мельник В.Г. Про вибір принципів побудови мультиплексних контрольно-вимірювальних систем // Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2002. – Ч.2. – С. 108 – 112.
2. Василенко О.Д., Мельник В.Г., Карпов И.М. Информационно-измерительная система с двух-уровневыми измерительными терминалами для исследования быстропротекающих процессов. // Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2004. – Ч. 6. – С. 119–124.
3. Гриневич Ф.Б., Борщев П.И., Василенко А.Д., Мельник В.Г. Аппаратные и программные средства распределенных сетевых импедансометрических систем // Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2000. – Ч. 2. – С. 82–85.
4. Мельник В.Г., Могилевский В.М., Лысак А.В., Лукина И.В. Открытая сетевая информационно-измерительная система с реализацией обмена данными и управления по технологии "клиент-сервер". // Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2006. – Ч.3. – С. 113–118.
5. Яковлев В. Сравнительный анализ способностей осциллографов Tektronix и LeCroy достоверно представлять информацию о тестируемых сигналах. // CHIP NEWS Украина. Инженерная микроэлектроника. – 2005. – № 2. – С. 52–56.

Надійшла 16.07.09